MATHEMATISCHES

WÖRTERBUCH

ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

LUDWIG HOFFMANN
WEILAND BAUMEISTER IN BERLIN.

VII. BAND

T — Z.

Von L. NATANI.

BERLIN
VERLAG VON WIEGANDT UND HEMPEL
1867.

[illegible]

Nachwort.

Das mathematische Wörterbuch, welches der Unterzeichnete vom Buchstaben Q an verfasst hat, liegt nunmehr vollendet vor.

Es war Bestreben, wo irgend thunlich zugleich die in den ersten Bänden enthaltenen, von Hoffmann herrührenden Artikel zu ergänzen und zu vervollständigen, weshalb viele Ueberschriften der letzten Bände, welche andern der ersten synonym sind, nicht auf diese verweisen, sondern selbstständige, zum Theil längere Artikel geben.

Da ein Werk dieser Art für einen grossen und sehr verschieden vorbereiteten Leserkreis berechnet ist, so hat man bei jedem einzelnen Artikel gesucht, den Ansprüchen desselben in sofern gerecht zu werden, als z. B. bei Artikeln aus der kaufmännischen Rechenkunst mathematische Betrachtungen überhaupt vermieden, bei technischen Artikeln dieselben in möglichst elementarer Weise gegeben sind. Dagegen hat man sich bei Betrachtungen aus der höheren Mathematik ein sogenanntes Popularisiren ganz erspart. Die neuesten Forschungen wurden dagegen überall berücksichtigt.

Berlin, September 1867.

L. Natani.

T.

Tabelle. Siehe Tafel.

Tafel (Arithmetik).

Unter mathematischer Tafel wird jedes Verzeichniss von Grössen verstanden, welches Behufs des Aufschlagens geordnet ist. Hinsichtlich der Anordnung kann man unterscheiden: Tafeln, welche Formeln enthalten, z. B. Integraltafeln, wie sie hier gegeben sind (siehe den Artikel: Quadratur), Tafeln von algebraischen, trigonometrischen und dergleichen Formeln. Bei diesen ist keine andere Anordnung als die systematische möglich. Die zweite Art von Tafeln kommt namentlich in der angewandten Mathematik vor und enthält Zahlen, welche gewissen Stoffen oder Gegenständen entsprechen, wie z. B. die Reibungstafeln, die Tafeln der specifischen Gewichte. Die Namen der Gegenstände, auf welche sich die Zahlen beziehen, müssen hier alphabetisch geordnet sein. Ueber diese beiden Arten von Tafeln lässt sich weiter nichts Allgemeines sagen, als dass sie übersichtlich und namentlich correct sein müssen. Ihr Werth wird völlig illusorisch, wenn nicht mit der grössten Genauigkeit auf Vermeidung von Rechen- und Druckfehlern hingewirkt ist, und gilt dies namentlich von Tafeln der zweiten Art, wo derjenige, welcher sie benutzt, oft kein Mittel hat, Unrichtigkeiten zu erkennen, während bei Formeltafeln Vergleiche mit andern Formeln, Symmetrie, Proben oft mit geringer Mühe Fehler erkennen lassen, und bei gehöriger Vorsicht und Gewandtheit selbst nicht völlig correcte Tafeln nutzbar machen können. Desto mehr ist jedoch von den Tafeln dritter Art zu sagen, auf welche wir jetzt kommen.

Dieselben enthalten Zahlen, welche gewissen andern gegebenen Zahlen entsprechen, mit andern Worten, sie sind dazu bestimmt, eine gewisse Function $f(x)$ für beliebige reelle Werthe von x ohne Weiteres anzugeben. Die am häufigsten angewandten solcher Tafeln sind bekanntlich logarithmische und trigonometrische Tafeln. Ausserdem gehören hierher Potenztafeln, die (noch nicht vollständig vorhandenen) Tafeln der Thetareihen und elliptischen Functionen. Auch in den verschiedenen Anwendungen der Mathematik kommen dergleichen Tafeln vor, von denen wir nur die Lebensdauertafeln erwähnen wollen. — Die Grösse x, mit welcher man in die Tafel geht, wird gewöhnlich Argument genannt. Bei der Anwendung solcher Tafeln kommt es zunächst auf zwei Hauptpunkte an, die Zwischenräume des Arguments und die Grenzen, in welchen die Tafel berechnet ist. Es ist, was zunächst den letzten Umstand anbetrifft, klar, dass die Tafel unmöglich von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ berechnet werden kann. Dies übt allerdings keinen Einfluss, wenn $f(x)$ eine periodische Function von x ist, wo man natürlich nur diejenigen Werthe von $f(x)$, welche eine Periode bilden, zu berechnen hat. Dies ist bei den trigonometrischen Tafeln der Fall. Aber auch bei andern Tafeln ergeben sich bequeme Auskunftsmittel. Bei den gemeinen Logarithmen z. B. übt bekanntlich die Stellung des Komma auf die Mantisse, welche die Tafeln allein enthalten, keinen Einfluss aus, und ist die Kennziffer leicht direct zu finden Eben diese Eigenschaft hat ja eben unter den unendlich vielen logarithmischen Systemen zur Auswahl des gemeinen Systems geführt. — Bei andern Tafeln nähert sich die Function mit positiv oder negativ wachsendem x einer constanten Grenze, und dann ist unmittelbar die Grenze der Be-

rechnung gegeben. Soll nämlich $f(x)$ auf eine Anzahl, z. B. fünf, Decimalstellen gefunden werden, so ist bis zu dem Werthe von x zu gehen, für welchen sich $f(x)$ in den ersten fünf Stellen nicht von dem Grenzwerth unterscheidet. Die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandten Tafeln für das Integral $\int_0^x e^{-x^2}dx$ sind derartig eingerichtet. Für $x = \pm\infty$ hat man nämlich den Grenzwerth $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, dem sich die Function sehr schnell nähert, so z. B. stimmt sie für $x = 2{,}75$ schon auf vier Stellen mit dem Grenzwerthe überein. In andern Fällen wird sich die gesuchte Function zwar keiner Constante, aber einer direct und ohne Tafeln leicht zu bestimmenden andern Function zu nähern, so dass der Werth, wo die letztere anwendbar wird, die Grenze der Tafeln bezeichnet.

Schliesslich ist jedoch zu bemerken, dass alle diese Hülfsmittel versagen können, und man dann eben untersuchen muss, in welchem Umfange ausschliesslich oder vorzugsweise die gedachte Function etwa in Anwendung kommen möge. Was nun die Zwischenräume anbetrifft, in welchen die Function zu berechnen ist, so muss, da der Grösse x in den Tafeln keine Continuität gegeben werden kann, darauf gesehen werden, dass man mit hinreichender Genauigkeit und Leichtigkeit aus den gegebenen Werthen von $f(x)$ die dazwischen liegenden ermitteln, d. h. dass man die Tafeln interpoliren kann.

Die einfachste, und wenn die Zwischenräume hinreichend klein sind, immer anwendbare Form der Interpolation beruht auf der Betrachtung, dass sich der Ausdruck $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x}$ einer bestimmten Grenze $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ immer nähert, wenn die Differenz $\xi - x$ sich der Null nähert. Nur für einzelne Werthe von x kann eine Ausnahme stattfinden. Sind also x_1, x zwei auf einander folgende, in der Tafel enthaltene Argumente, zwischen welchen sich ein solcher Ausnahmswerth nicht befindet, und ausserdem einander so nah, dass für die Anzahl von Decimalstellen, auf welche $f(x)$ in der Tafel berechnet ist, man setzen kann:

$$\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x} = f'(x),$$

und ist ξ ein zwischen x und x_1 liegendes, nicht in der Tafel enthaltenes Argument, so ist auch:

$$\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} = \frac{f(x_1)-f(x)}{x_1 - x}.$$

Also $f(\xi)$ ergibt sich mit der für die Rechnung hinreichenden Genauigkeit durch die Formel:

$$1)\quad f(\xi) = f(x) + (\xi - x)\frac{\triangle f(x)}{\triangle(x)},$$

wo:

$$\triangle f(x) = f(x_1) - f(x),\quad \triangle(x) = x_1 - x$$

bezüglich die Differenzen zweier auf einander folgenden, in der Tafel enthaltenen Functionen und der entsprechenden Argumente anzeigen. — Fast alle Tafeln sind so eingerichtet, dass die Argumente in arithmetischer Reihe fortschreiten, dann ist $\triangle(x)$ constant. Ist $\triangle(x)$, wie es sehr oft der Fall ist, gleich der Einheit, so ist $\frac{\triangle f(x)}{\triangle(x)} = f(x_1) - f(x)$ eine Grösse, die sich durch blosses Abziehen schnell finden lässt. Ist $\triangle(x)$ nicht gleich Eins, so ist es am bequemsten, wenn diese Grösse (die sogenannte Differenz) bei jedem Argument in den Tafeln selbst angegeben ist. Die Interpolation besteht dann lediglich in der Multiplication mit $\xi - x$, die übrigens durch sogenannte Interpolationstäfelchen noch erleichtert wird, und in der Addition zu der in der Tafel enthaltenen nächsten Function $f(x)$. — Uebrigens kann in Formel 1) sowohl $x < \xi < x_1$, als auch $x_1 < \xi < x$ genommen werden, und wird man dies thun, je nachdem ξ dem nächst kleinern oder nächst grössern in den Tafeln enthaltenen Argument näher liegt. Im letztern Falle verwandelt sich die Addition in Subtraction.

Die meisten Tafeln dienen aber, nicht allein das zu gegebenen x gehörige $f(x)$, sondern auch, wenn $f(x)$ gegeben ist, das zugehörige x zu ermitteln. Die auch hierbei nöthige Interpolation wird mittels derselben Grundformel, die sich auch schreiben lässt:

$$\frac{\xi - x}{f(\xi) - f(x)} = \frac{x_1 - x}{f(x_1) - f(x)},$$

vollführt, und man erhält:

$$2)\quad \xi = x + \frac{f(\xi) - f(x)}{\triangle f(x)}\triangle(x).$$

An die Stelle der Multiplication in der ersten Interpolationsformel tritt hier die Division.

Die gegebenen Formeln sind unabhängig von der Form der Function, welche die Tafel geben soll. Die Bedingung, dass sie anwendbar seien, bestimmt aber zugleich die Grösse der Zwischenräume, welche dem Argnment gegeben werden darf. Zunächst dürfen dieselben keinen Werth von x einschliessen, wo der Ausdruck $f(x)$ continuirlich zu sein aufhört, weil sonst die Grundbedingung unseres Verfahrens aufhören würde. Dann darf auch kein Maximum oder Minimum von $f(x)$ zwischen denselben liegen, weil für ein solches:

$$f'(x)=0$$

ist, also nicht allgemein mit $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}$ identificirt werden kann. Freilich kann es, wenn der Werth x' von x, welcher dem Maximum oder Minimum entspricht, irrational ist, nicht vermieden werden, dass die Argumente x_1 und x dasselbe zwar enthalten, wobei aber x_1 dem Werthe x' wenigstens sehr nahe ist. Dies thut natürlich nichts. Da es auf absolute Genauigkeit bei Tafeln nicht ankommt, sondern immer nur auf eine gewisse Anzahl von Decimalstellen. Endlich müssen sich die Ausdrücke $f'(x)$ und $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$ wirklich hinreichend nähern. Dies erkennt man im Allgemeinen daran, dass für 3 auf einander folgende Argumente der Tafeln die Werthe $\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ sich nur um wenige Einheiten der letzten Stelle unterscheiden.

Es wäre zu verlangen, dass die Unterschiede der Argumente bis auf eine Einheit übereinstimmten, wenn man absolute Genauigkeit bis auf die letzte Stelle beim Interpoliren verlangte, eine Genauigkeit, die jedoch schon aus andern leicht ersichtlichen Gründen nicht zu erreichen ist.

Nicht für alle Argumente der Tafel ist diese Bedingung durch dieselben Zwischenräume zu erreichen. Ein Beispiel geben die trigonometrischen, die Logarithmen der Sinus u. s. w. enthaltenden Tafeln. Dieselben können in dieser einfachen Weise bis auf sieben Decimalstellen sehr gut interpolirt werden, wenn die Zwischenräume der Argumente eine Minute enthalten, jedoch nur von etwa 6 Grad an aufwärts; bis dahin sind viel engere Zwischenräume nöthig. In den ersten Minuten wären selbst einzelne Secunden zu gross, wenn hier nicht die Sinus und Tangenten den Bogen identificirt werden könnten, und sich so leichtere, von den Tafeln unabhängige Berechnungsarten ergäben.

Der Begriff der Interpolation ist jedoch noch in einer viel allgemeineren Weise aufzufassen. Es ist hierbei jedoch zunächst auf die Natur der Functionen, welche die Tafeln geben, einzugehen.

Ist $y=f(x)$, die durch die Tafeln gegebene Function, monogen, d. h. eine solche, die einer Erweiterung für imaginäre x fähig ist, so hat sie die Eigenschaft (vergleiche den Artikel: imaginäre Quantitäten), dass sie sich nach ganzen positiven Potenzen einer Grösse $x-x_1$ entwickeln lässt, wenn $f(x_1)$ continuirlich, und in dem Zwischenraume ($x-x_1$ als den Modul einer complexen Zahl gedacht) sich keine Discontinuität oder Mehrdeutigkeit befindet. Man hat also für hinreichend kleines $x-x_1$:

$$y=y_1+(x-x_1)A_1+(x-x_1)^2A_2+\ldots,$$

wo $y_1=f(x_1)$, A_1, A_2 gewisse Constanten sind. Obgleich diese Reihe ins Unendliche verläuft, so wird sie doch für jede gegebene Grenze der Genauigkeit auf eine Anzahl von Gliedern sich beschränken, da sie convergirt. Es ist dann y als ein Polynom $n$ter Ordnung von x zu betrachten. Ein solches bildet aber immer eine arithmetische Reihe $n$ter Ordnung, und bei solchen sind die $n$ten Differenzen constant (vergleiche den Artikel: Reihen). Ist also die Tafel in gleichen sonst mit der Maassgabe beliebigen Zwischenräumen berechnet, dass sich in solchen keine Discontinuitäten oder Mehrdeutigkeiten befinden, so wird, die Discontinuitätspunkte ausgenommen, noch immer eine Interpolation möglich sein, ganz als wenn die Tafel eine arithmetische Reihe höherer Ordnung enthielte. Wir werden aber die entsprechenden Formeln hier sogleich für den allgemeinen Fall geben, dass die Zwischenräume beliebig, also auch ungleich sein können. Zunächst bemerken wir jedoch, dass dies nur für monogene Functionen gilt. Man hat sogar hiernach ein Criterium, ob eine Tafel eine solche Function enthalte. Bildet man nämlich die ersten, zweiten u. s. w. Differenzen, so muss man in diesem Falle zuletzt für grössere Zwischenräume auf Differenzen kommen, die von einander nur sehr wenig abweichen.

Als Beispiel denken wir uns z. B. eine Tafel der Logarithmen der Sinus von 10 zu 10 Minuten berechnet. Ein Theil solcher Tafel ist:

Bogen	Log. Sinus	1. Diff.	2. Diff.
39° 0′	9,7988718	15554	
39°10′	9,8004272	15463	—91
39°20′	9,8019735	15370	—93
39°30′	9,8035105	15280	—90
39°40′	9,8050385	15190	—90
39°50′	9,8065575	15100	—90
40° 0′	9,8080675		

Es sind also schon die zweiten Differenzen als constant zu betrachten.

Wollte man dagegen in gleicher Weise z. B. eine Tafel der Lebensdauer untersuchen, so würde man auf keine gleiche Regelmässigkeit kommen, und dies ist ein Zeichen, dass diese Function keineswegs monogen ist. Das hin und wieder aufgetauchte Bestreb n, dieselbe durch eine mathematische Formel auszudrücken, ist also als ein verfehltes zu betrachten.

Setzen wir jetzt eine monogene Function y von x voraus. Mögen den Werthen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Werthe $y_1, y_2 \ldots y_n$ entsprechen, und zwar derart, dass zwischen den beiden äussersten x sich keine Discontinuität und Mehrdeutigkeit befinde, so kann für jedes dazwischen liegende x die Function y als ein Polynom $n$ter Ordnnng von x betrachtet werden, und ein solches stimmt bekanntlich immer mit y überein, wenn es für die n Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ bezüglich mit $y_1, y_2 \ldots y_n$ übereinstimmt. Um also den zur Interpolation dienenden Werth von y zu ermitteln, ist eine ganze algebraische Function $n$ter Ordnung von x zu ermitteln, welche die eben angeführte Eigenschaft hat. Setzen wir zunächst:

$$y=y_1+(x-x_1)[\delta y_1+(x-x_2)y'],$$

wo:

$$\delta y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

genommen wurde, so stimmt diese Function offenbar für $x=x_1$ mit y_1, und für $x=x_2$ mit y_2 überein, wenn das sonst beliebige y' für $x=x_2$ nicht unendlich wird. Bestimmen wir jetzt y' so, dass für $x=x_3$ die Function mit y_3 zusammenfalle. Zu dem Ende muss offenbar gesein, wenn y_1' der entsprechende Werth von y' ist:

$$\delta y_1+(x_3-x_2)y_1'=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1},$$

$$y_1'=\left[\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\frac{1}{x_3-x_2};$$

hierfür kann man, wie leicht zu sehen, setzen:

$$y_1'=\left[\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right]\frac{1}{x_3-x_1},$$

also wenn man setzt:

$$\delta y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\quad \delta^2 y_1=\frac{\delta y_2-\delta y_1}{x_3-x_1},$$

$$y'=\delta^2 y_1+(x-x_3)y'',$$

da für $x=x_1$ diese Formel in die vorhergehende übergeht. Man hat also:

$$y=y_1+(x-x_1)\delta y_1 +(x-x_1)(x-x_2)[\delta^2 y_1 +(x-x_3)y''],$$

wo y'' für $x=x_3$ nicht unendlich werden darf.

Nun bestimmt man y'' derart, dass für $x=x_4$ auch $y=y_4$ wird, und dies gibt, wie oben:

$$y''=\delta^3 y_1+(x-x_4)y''',$$

wo gesetzt wurde:

$$\delta y_3=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3},\quad \delta^2 y_2=\frac{\delta y_3-\delta y_2}{y_4-y_2},$$

$$\delta^3 y_1=\frac{\delta^2 y_2-\delta^2 y_1}{y_4-y_1},$$

und indem man so fortfährt, hat man:

3) $$y=y_1+(x-x_1)\delta y_1 +(x-x_1)(x-x_2)\delta^2 y_1 +(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\delta^3 y_1 +\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)\delta^n y_1,$$

wo zu setzen ist:

$$\delta y_s=\frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s},\quad \delta^2 y_s=\frac{\delta y_{s+1}-\delta y_s}{x_{s+2}-x_s},$$

$$\delta^3 y_s=\frac{\delta^2 y_{s+1}-\delta^2 y_s}{x_{s+3}-x_s}\ \ldots$$

$$\delta^n y_s=\frac{\delta^{n-1}y_{s+1}-\delta^{n-1}y_s}{x_{s+n}-x_s}.$$

Diese von La Place herrührende Formel kann als allgemeinste Interpolationsformel gelten, unter der Bedingung, dass y als ein Polynom $n$ter Ordnung gedacht werden kann. Die Formel wird für die Werthe $x_1, x_2 \ldots x_n$ von x genau richtig. — Sie dient für uns zunächst, aus n in den Tafeln enthaltenen auf einander folgenden Werthen $y_1, y_2 \ldots y_n$ jeden dazwischen liegenden Werth

y zu finden. Vertauscht man y und x, so dient sie dazu, aus der gegebenen Function das Argument zu finden.

Sind gleiche Zwischenräume vorhanden, hat man also:

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = h,$$

so ist:

$$\delta y_s = \frac{\triangle y_s}{h}, \quad \delta^2 y_s = \frac{\triangle^2 y_s}{1 \cdot 2\, h^2} \quad \ldots \quad \delta^n y_s = \frac{\triangle^n y_s}{1 \cdot 2 \ldots n h^n},$$

wo:

$$\triangle y_s = y_{s+1} - y_s, \quad \triangle^2 y_s = \triangle y_{s+1} - \triangle y_s \ldots$$

die erste, zweite u. s. w. Differenz angeben. Die Gleichung 3) nimmt dann die Form an:

$$4) \quad y = y_1 + \frac{(x - x_1)}{h} \triangle y_1 + \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)}{1 \cdot 2 \cdot h^2} \triangle^2 y_1 + \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_1)(x - x_1 - h)(x - x_1 - 2h) \ldots (x - x_1 - \widehat{n-1}\, h)}{1 \cdot 2 \ldots n - 1\, h^n}.$$

Soll aber aus den gegebenen Werthen von y das Argument x berechnet werden, so ist x mit y zu vertauschen. Gleiche Zwischenräume vorausgesetzt, hat man dann:

$$\delta x_s = \frac{h}{\triangle y_s}, \quad \delta^2 x_s = -\frac{h \triangle^2 y_s}{(y_{s+2} - y_s) \triangle y_s \triangle y_{s+1}} \ldots$$

Die Formeln entbehren in diesem Falle der Einfachheit und Regelmässigkeit. Schreitet man nur bis zur zweiten Differenz vor, so kommt also:

$$5) \quad x = x_1 + \frac{(y - y_1)\, h}{\triangle y_1} + \frac{(y - y_1)(y - y_2) \triangle^2 y_1\, h}{(y_3 - y_1) \triangle y_1 \triangle y_2} + \ldots$$

Man sieht namentlich, zum Auffinden des Arguments diese allgemeinere Interpolationsmethode viel Rechnung darbietet. Tafeln, welche oft gebraucht werden, sind daher immer so einzurichten, dass man nach der erstgegebenen Methode verfahren kann. — Indess wird auch die allgemeinere Interpolation dem directen Berechnen der Grösse selbst in der Regel vorzuziehen sein, vorausgesetzt, dass man das Gesetz kennt, wonach dieselbe zu entwickeln ist. Oft genug ist dies aber nicht der Fall. Man ist auf einzelne, durch Versuche oder auf andere Weise gefundene Werthe angewiesen, die man in eine Tafel ordnen kann, und die Interpolation nach der letztern Methode wird zur Nothwendigkeit. Welche Vortheile für einzelne Fälle oder im Allgemeinen sich hiermit noch verbinden lassen, dies auseinander zu setzen, würde hier zu weit führen.

Die Interpolationsformeln sind aber auch für die Berechnung und Prüfung der Tafeln selbst von besonderer Wichtigkeit. Man wird nämlich nicht für alle in den Tafeln enthaltenen Werthe direct die Functionen ermitteln, sondern dies nur für grosse Zwischenräume thun, dieselben in den kleineren Zwischenräumen, welche die Tafel geben soll, aber durch Interpolation nach Formel 3) oder 4) finden. Damit bei den mehrfachen hier vorkommenden Multiplicationen, Divisionen und Additionen die letzten Stellen noch genau seien, müssen aber die Grundwerthe auf mehr Stellen, als die Tafeln enthalten, gegeben sein, also z. B. auf zehn Stellen, wenn die Tafeln deren sieben enthalten sollen.

Da es bei allen Tafeln auf Correctheit ankommt, so muss eine besondere Controlle der Rechnungs- und Druckfehler eintreten, und dazu hat man ein sehr bequemes Mittel, indem man die verschiedenen Differenzreihen bildet. Ist Alles correct, so müssen die letzten Differenzreihen aus nur sehr langsam sich ändernden Zahlen bestehen. Wegen des Einflusses der weggelassenen Ziffern wird allerdings bei der letzten Ziffer immer trotz der Controlle noch eine Unsicherheit von einer oder einigen Stellen bleiben, und ist daher bei Berechnung der Tafel auf die Richtigkeit dieser Ziffer besonders zu achten.

Indess selbst diese Unsicherheit kann, da auf absolute Genauigkeit der letzten Stelle doch in allen Rechnungen zu verzichten ist, den Gebrauch der Tafeln kaum gefährden, während Fehler in den höhern Stellen den Nutzen der ersteren fast illusorisch zu machen im Stande sind.

Die Interpolationsformeln können auch zuweilen überhaupt die Tafeln vertreten, insofern man, wenn für einige Werthe der Variablen die Function gegeben ist, den durch Interpolation sich ergebenden Werth derselben für diese setzen kann, freilich nur in gewissen Grenzen. Aendern sich diese Grenzen, so ändert sich somit auch die Form der Function. Dabei braucht man den wirklichen Ausdruck derselben gar nicht zu kennen, oder darf ihn ignoriren, wenn er zu complicirt ist. Dies ist wichtig, wenn es nicht auf einen bestimmten Werth der Function ankommt, sondern man dieselben in Formeln einsetzen will. Freilich gewähren auch dazu die Tafeln die Möglichkeit, selbst wenn es auf Integrale ankommen sollte, an deren Stelle dann mechanische Quadratur tritt. Indess würden hierbei oft sehr weitläuftige Rechnungen erfordert, und ist das eben angedeutete Verfahren daher in den Anwendungen der Mathematik und in den technischen Rechnungen oft vorzuziehen. Auch braucht man sich hierbei nicht gerade der Interpolationsformel 2) zu bedienen, sondern kann nach Bedürfniss andere algebraische oder transcendente Ausdrücke nehmen, da auch diese in gewissen Grenzen immer ganzen algebraischen gleich zu setzen sind. Nur müssen hinreichend viel Constanten darin enthalten sein, welche sich durch gewisse, in Zwischenräumen gefundene Werthe der Function bestimmen lassen. Beispiele hierzu sind z. B. die Formeln, welche die Dampfspannungen im Maximum als Function der Temperatur geben. Die Formeln hierfür sind lediglich als Interpolationsformeln zu betrachten, und nehmen für verschiedene Temperaturgrenzen auch verschiedene Gestalt an, während das wirkliche Gesetz der Dampfspannung unbekannt ist. — Es wäre daher sehr gut, dass man dergleichen Ausdrücke als das, was sie sind, als Interpolationsformeln, auch immer gäbe. Leider ist es aber namentlich in technischen Werken ein sehr schädlicher Missbrauch, solche Formeln aus einem seichten und falschen Raisonnement abzuleiten, in dem Bewusstsein, dadurch das wahre Gesetz gefunden zu haben, wodurch sich die grosse Verwirrung und Unklarheit, die in vielen Büchern derart sich findet, nothwendig auch dem mittheilen muss, der aus den in Rede stehenden Werken Belehrung schöpfen will. Namentlich aber sind oft die Streitigkeiten spasshaft, wenn der einen Formel von Seiten eines andern Verfassers eine andere gegenübergestellt wird, natürlich als die eigentlich wahre, und an Beispielen gezeigt wird, dass letztere besser mit der Erfahrung übereinstimme. Nach dem Obigen kann dies nicht anders sein, wenn die Beispiele für den Zweck ausgewählt sind, denn die eine Formel gibt in diesen, die andere in jenen Grenzen genauere Interpolationswerthe.

Wir erwähnen schliesslich noch der Tafeln, welche Functionen von zwei oder mehreren Variablen enthalten, und bemerken nur, dass das Gesagte auf solche ebenfalls Anwendung findet, da jedem Werthe der einen Variablen unendlich viele der anderen entsprechen. Die Interpolationsformeln für solche Functionen lassen sich leicht durch Wiederholung der gegebenen Schlüsse ableiten. Begnügt man sich mit ersten Differenzen, so hat man:

$$f(x, y, z \ldots) = f(x_1, y_1, z_1 \ldots) + (x - x_1)\frac{\triangle_1 f}{x_2 - x_1} + (y - y_1)\frac{\triangle_2 f}{y_2 - y} + (z - z_1)\frac{\triangle_3 f}{z_2 - z} + \ldots,$$

wo:

$$\triangle_1 f = f(x_2, y_1, z_1) - f(x_1, y_1, z_1),$$
$$\triangle_2 f = f(x_1, y_2, z_1) - f(x_1, y_1, z_1)$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

ist, wie sich leicht aus den Elementen der Differenzialrechnung ergibt.

Tafel (Perspective).

Die Ebene, auf welcher das Bild entworfen wird. Sie ist Basis eines Kegels, dessen Spitze das Auge des Beobachters, und dessen Seiten die Verbindungslinien desselben mit den entsprechenden Punkten des Objects sind. Der Durchschnitt der Tafel mit dem Kegelmantel ist eben das Bild.

Tag (Astronomie und Chronologie).

Im astronomischen Sinne ist Tag die Zeit, in welcher die Erde um ihre Axe rotirt. Diese Zeit wird auch Sternentag genannt.

Ihm gegenüber steht der Sonnentag, d. h. die Zeit, in welcher die Sonne zu gleicher Höhe über den Horizont zurückkehrt. Im bürgerlichen Leben bestimmt man hierzu die Zeit zwischen den zwei tiefsten Standpunkten (untern Culminationen) der Sonne, also von Mitternacht zu Mitternacht, in der Astronomie oft auch die Zeit zwischen zwei Mittagen (obern Culminationen der Sonne). — Die Sonnentage sind im Laufe des Jahres ungleich, immer aber hat das Jahr einen Sonnentag weniger als Sternentage.

Zur Ausgleichung und zur bürgerlichen Zeitbestimmung dient der mittlere Tag, d. h. die arithmetische Mitte aus allen Tagen eines Jahres. Sein Verhältniss zum wahren Sonnentage gibt die Zeitgleichung, oder was dasselbe ist, den Unterschied des Ganges einer Taschenuhr von dem der Sonnenuhr.

Die Einführung der mittleren Tage ins bürgerliche Leben stammt erst seit Ende des vorigen Jahrhunderts. — Nicht alle Völker zählten die Tage von Mitternacht an, sondern viele wählten noch viel schwankendere Anfangspunkte, die Juden vom Sichtbarwerden der Gestirne.

Im engeren Sinne ist Tag die Zeit, während deren die Erde von der Sonne erleuchtet ist; sie ist also ungleich für verschiedene Breiten und Jahreszeiten. Auch hier tritt ein Schwanken ein. Man kann den Tag von Sonnen-Aufgang bis Untergang, oder vom Anfang der Morgendämmerung bis zum Ende der Abenddämmerung rechnen.

Tagebogen (Astronomie).

Diejenige Zeit oder derjenige Theil eines Parallelkreises, welche ein Stern von seinem Auf- bis zum Untergange zurücklegt. — Circumpolarsterne haben also einen Tagebogen von 24 Stunden oder 360 Grad.

Tangente, Berührungslinie (Geometrie).

Diejenige Grade, welche die Grenze der Richtung einer Sehne bezeichnet, wenn man zwei Schnittpunkte derselben einander immer näher rücken lässt. Kürzer kann man auch sagen: Die Tangente ist diejenige Sehne, von der zwei Schnittpunkte einander unendlich nahe sind.

Tangente (Trigonometrie).

Der Quotient des Sinus durch den Cosinus, oder wenn man den gegebenen Winkel als zu einem rechtwinkligen Dreieck gehörig denkt: das Verhältniss der gegenüberliegenden Cathete zur anliegenden.

Denkt man den Winkel als Centriwinkel eines Kreises mit Radius Eins, so ist Tangente auch das zwischen beiden Schenkeln liegende Stück derjenigen geometrischen Tangente an den Kreis, welche in dem Schnittpunkte des einen Schenkels berührt.

Tangentialkraft (Dynamik).

Wenn irgend ein Punkt sich in einer Curve bewegt, und man zerlegt die auf ihn augenblicklich wirkende Kraft nach Normale und Tangente, so wird die letztere Componente mit diesem Namen bezeichnet.

Tangentialrad (Maschinenlehre).

Gleichbedeutend mit Turbine.

Tara (practisches Rechnen).

Die Vergütigung, welche dem Käufer einer Waare für den geringern Werth der Verpackung vom Bruttogewicht derselben bewilligt wird. In der Regel wird die Tara nicht jedesmal einzeln durch Wiegen bestimmt, sondern sie ist ein- für allemal festgestellt (Usotara), und besteht entweder in einem gewissen Procentsatz von der Kaufsumme, oder im Freigeben eines gewissen Gewichtsatzes. Existiren solche Feststellungen nicht, so ermittelt man wohl auch bei grössern Sendungen durch Wiegen der Verpackungen einzelner Colli eine Durchschnittstara, und überträgt diese auf die ganze Sendung.

Taucherkolben (Maschinenlehre).

Kolben, wie sie bei Druckpumpen in Anwendung kommen. Der Taucherkolben ist mit einem verticalen engen Kanal versehen, welcher oben durch einen Hahn geschlossen ist. Oeffnet man diesen, so wird der innere Pumpenraum mit der äussern Luft in Verbindung gebracht, und dadurch die unter der Stopfbüchse und im Cylinder angesammelte verdichtete Luft entfernt.

Tautochrone (Dynamik).

Diejenige Curve, auf welcher ein Körper, aus ungleichen Höhen herabfallend, in gleicher Zeit eine Schwingung ausführt. Die Cycloide oder Radlinie hat diese Eigenschaft (vergleiche den Artikel: Radlinie).

Taylor'scher Satz (Analysis).

Die bekannte Formel, welche die Entwickelung der Functionen nach ganzen positiven Potenzen des Zuwachses gibt:

$$f(x+h) = f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{1 \cdot 2}f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}f'''(x)+ \ldots$$

Ueber Beweis und Anwendung derselben siehe den Artikel: Quantität (imaginäre).

Telescop.

Siehe Fernrohr.

Terminrechnung (practisches Rechnen).

Die Reductionen der ungleichen Zeiten, in welchen gewisse Summen zahlbar sind, auf eine mittlere Verfallzeit, oft auch der ungleichen Zinssätze auf einen mittleren. Ein Beispiel wird dies Verfahren klar machen.

Beispiel.

Jemand schuldet 300 Thlr. zu 4 % in 4 Monaten, 600 Thlr. zu 5 % in 6 Monaten, 200 Thlr. zu $3\frac{1}{2}$ % in 8 Monaten.

Man reducirt zunächst auf 1 % und 1 Monat. Also da z. B. die Zinsen von 300 Thlr. zu 4 % gleichbedeutend mit den Zinsen von $4 \cdot 300$ zu 1 %, und $4 \cdot 300$ Thlr. zu 4 Monaten so viel Zinsen geben, als $4 \cdot 4 \cdot 300$ in 1 Monat, so hat man also zu bilden:

$$\begin{array}{llll} 300 \cdot 4 = 1200 & & 1200 \cdot 4 = & 4800 \\ 600 \cdot 5 = 3000 & & 3000 \cdot 6 = & 18000 \\ 200 \cdot 3\frac{1}{2} = 700 & & 700 \cdot 8 = & 5600 \\ \hline 1100 & 4900 & & 28400 \end{array}$$

Indem man die betreffenden Glieder addirt, findet man also, dass sich 1100 so verzinsen, wie 4900 zu 1 %, woraus hervorgeht, dass sie zu:

$$\frac{4900}{1100} = 4\frac{5}{11} \%$$

ausstehen müssen, und dass 4900 Thaler so viel Zinsen bringen, wie 28400 in einem Monat, so dass die Summe $\frac{28400}{4900} = 5\frac{39}{49}$ Monat ausgestanden haben muss. Es ist also $4\frac{5}{11}$ % der mittlere Zinsfuss, $5\frac{39}{49}$ Monat, gleich 5 Monat 24 Tage, die mittlere Verfallzeit.

Terrestrisches Fernrohr (Optik).

Ein Fernrohr, welches die Gegenstände aufrechtstehend zeigt. (Siehe den Artikel: Fernrohr.)

Tertie (Chronologie).

Der sechzigste Theil einer Secunde.

Tetraeder (Geometrie).

Ein von vier Dreiecken begrenzter Körper.

Tetragon.

Siehe Viereck.

Tetragonalzahl (Arithmetik).

Gleichbedeutend mit Quadratzahl.

Thaler (Münzwesen).

Die Hauptrechnungsmünze Deutschlands und anderer Länder. Nach der Convention von 1856 werden in allen deutschen Staaten Thaler, deren 30 auf ein Pfund fein neuen Gewichts ($\frac{1}{2}$ Kilogramm) gehen, und zu $\frac{9}{10}$ Feingehalt ausgeprägt. Nach dem ältern Vertrage von 1838 prägten die Zollvereinsstaaten 14 Thaler aus einer Cölnischen Mark feinen Silbers (0,2338123 Kilogramm), und zu 12 Loth Feingehalt, also $\frac{3}{4}$. Es ist sonach das Verhältniss des neuen Thalers zum alten:

$$\frac{1}{30} : \frac{1}{14}\, 0{,}2338123,$$

also das Verhältniss ist:

$$1 : 1{,}002053 = 0{,}998949 : 1.$$

Von andern Thalern sind zu merken:

Der Hamburger Bankthaler ($11\frac{1}{3}$ auf die Cölnische Mark).

Für Dänemark:

Der Reichsbankthaler ($18\frac{1}{2}$ auf die Cölnische Mark).
Der Speciesthaler ($9\frac{1}{4}$ auf die Mark).
Thaler Courant ($11\frac{1}{3}$ auf die Mark).

Für Schweden:

Species-Reichsthaler (9,162 auf die Mark).

Blosse Rechnungsmünze ist der Thaler Gold, und wird darunter der fünfte Theil des Louisd'or oder der Pistole verstanden.

Thara.

Siehe Tara.

Theiler (Arithmetik).

Gleichbedeutend mit Divisor. Ueber das Auffinden der einfachen Theiler der Zahlen, sowie der grössten gemeinschaftlichen Theiler mehrerer Zahlen siehe den Artikel: Quotient.

Theilkreis (Maschinenlehre).

Der (gedachte) Kreis, auf welchem die Theilung eines Zahnrades anzubringen ist (vergleiche den Artikel: Rad).

Theilung (Arithmetik).

Zerlegung einer Summe in zwei oder mehrere Glieder.

Theilung (Geometrie).

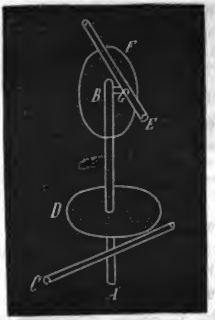
Zerlegung einer Raumgrösse in mehrere Stüche, nach irgend einem Gesetze.

Die Theilung der graden Linie enthält der Artikel: Raumlehre. Ueber die Theilung gradliniger Figuren siehe den Artikel: Dreieck, über die des Kreises siehe: Kreistheilung, über die der Lemniscate: elliptische Transcendenten.

Theodolith (practische Astronomie und Geodäsie).

Instrument zur gleichzeitigen Aufnahme des Azimuthes und der Höhe. Es besteht aus einem horizontalen eingetheilten Kreise D und einem vertikalen F (Fig. 1), beide verbunden mit Fernröhren C und E. C ist beweglich um eine Vertikalaxe und an dieser Bewegung nimmt auch Kreis F Theil. E ist beweglich um eine Horizontalaxe. Dreht man das erste Fernrohr so lange, bis F in den entsprechenden Scheitelkreis fällt, und bringt dann E in die Gesichtslinie des gesuchten Objects, so kann auf dem ersten Kreise das Azimuth, auf der andern die Höhe abgelesen werden. Die Präcisionsvorrichtungen, Stauen, Stellschrauben, Fernröhre zum Ablesen und Mikrometer sind wie bei andern astronomischen Instrumenten.

Fig. 1.



Theorem (allgemeine Mathematik).

Siehe Lehrsatz.

Theorische Astronomie (Astronomie).

Die Lehre von der wahren Bewegung der Himmelskörper (siehe: Astronomie).

Thermometer (Wärmelehre).

Jedes Instrument zum Messen der Temperatur. Die gebräuchlichsten sind die Weingeist- und Quecksilber-Thermometer, ausserdem sind Metall- und Luft-Thermometer zu bemerken. Die feinsten Thermometer bestehen aus einer Thermosäule in Verbindung mit einer Boussole. Was die Eintheilung anbetrifft, so sind häuptsächlich deren drei üblich:

Das Réaumur'sche Thermometer, namentlich in Deutschland gebräuchlich, in welchem der Abstand vom Gefrier- zum Siedepunkte in 80 Grad getheilt wird.

Das Celsius'sche, in Frankreich eingeführt, wo dieser Abstand in 100 Grad zerfällt.

Beide haben den Nullpunkt der Theilung im Gefrierpunkte.

Das Fahrenheit'sche, in England üblich, theilt diesen Abstand in 180 Grad, hat aber seinen Nullpunkt 32 Grad (Fahrenheit) unter dem Gefrierpunkte.

Vergleiche den Artikel Wärme.

Thesis (allgemeine Mathematik).

Behauptung; das in einem Satze Ausgesagte oder Behauptete im Gegensatze zur Hypothesis oder Voraussetzung.

Thetareihen (Analysis).

Die Reihen, welche Zähler und Nenner der elliptischen Functionen darstellen. Auch die Abel'schen Functionen werden auf ähnliche Reihen zurückgeführt.

Thierkreis (Astronomie).

Der über den ganzen Himmel gehende grösseste Kreis, in welchem sich die Ekliptik, d. h. die scheinbare Sonnenbahn, befindet. Er wird in zwölf Theile getheilt, welche nach den dort befindlichen Sternbildern meistentheils Thiernamen führen: Widder, Stier, Zwillinge, Krebs, Löwe, Jungfrau, Waage, Scorpion, Schütz, Steinbock, Wassermann, Fische.

Jeder dieser Theile entspricht einem

Monate, derart, dass vom Frühlingsäquinoctium bis zum 21. April sich die Sonne im Widder befindet u. s. w.

Thomsons Turbine (Hydraulik).

Siehe Turbine, hydraulisches Rad.

Thurmmühle (Maschinenlehre).

Siehe Mühle, Windmühle.

Tiefe (Perspective).

Die senkrechte Entfernung eines hinter der Tafel befindlichen Punktes von derselben.

Ton (Akustik).

Die durch regelmässige (pendelartige) Schwingungen elastischer Körper hervorgebrachte wellenförmige Bewegung der Luft und der übrigen umgebenden Körper in ihrer Einwirkung auf den Gehörsinn. Helmholz unterscheidet den Ton vom Klange, indem er unter dem ersteren eine einfache pendelartige Schwingung, unter dem letzteren eine zusammengesetzte versteht.

Ueber die Gesetze der Entstehung von dergleichen Schwingungen vergleiche den Artikel: Schwingungen und: Wellenbewegung, über die Entstehung des Tones daraus und die Gesetze der Töne den Artikel: Akustik.

Tonart (Akustik).

Die Art und Weise, wie die einzelnen Töne der Scala aus dem Grundtone abgeleitet werden. (Vergleiche den Artikel: Akustik.)

Tonika (Akustik).

Gleichbedeutend mit Grundton.

Tonne (Messkunst).

Ein Gewicht und Flüssigkeitsmaass an verschiedenen Orten. Die englische Tonne (Tun) enthält 20 englische Centner.

Als Körpermaass hat die englische Tonne $\frac{1}{4}$ Last = 5 Quarters, als Weinmaass 2 Pipen = 252 Gallons.

Die Schiffstonne enthält 20 Centner.

Als Flüssigkeitsmaass ist die Tonne in verschiedenen Gegenden Deutschlands üblich. Die Dresdener Tonne hat 105 Dresdener Kannen, die Leipziger 75 Leipziger Kannen, die Berliner 160 Quart, die Kopenhagener 136 Pott, die Stockholmer 48 Kannen.

Tonnenfach (Maschinenlehre).

Die aus Brettern, Stangen u. s. w. gebildete Bahn, auf welcher in einem flachen Schachte die Kübel stehen.

Dieselbe ist an den Seiten und in der Mitte mit aufrechten Brettern versehen, damit die Kübel nicht mit einander und mit andern Gegenständen zusammenstossen.

Tonnengebläse (Maschinenlehre).

Ein doppelt wirkendes Gebläse mit Wasserliderung. (Vergleiche den Artikel: Gebläse.)

Tonnengewölbe (Statik).

Ein Gewölbe, bestehend aus einem Halbkreise auf zwei parallelen Wänden. (Vergleiche den Artikel: Gewölbe.)

Tonnenmühle (Hydraulik).

Eine Wasserschnecke (Schraube) mit rechtwinkligem Querschnitte, welche von aussen mit cylindrischem Mantel umgeben ist, welcher, fest mit den Gängen verbunden, dem Ganzen das Ansehen einer Tonne gibt.

Tontine (practisches Rechnen).

Eine Leibrente, zu deren Ankauf sich eine Gesellschaft derart verbindet, dass die Ueberlebenden die Rente der Verstorbenen erben. Ueber die Berechnung der Tontinen siehe den Artikel: Rente.

Torsion (Statik).

Die Drehung, welche die einzelnen Fasern eines nicht völlig festen Körpers unter der Einwirkung zweier gleichen, aber entgegengesetzten Paare erleiden.

Torsionselasticität (Statik).

Die durch Torsion in einem elastischen Körper erregte Kraft.

Torsionsfestigkeit (Statik).

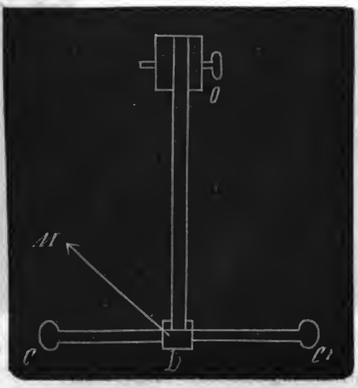
Der Widerstand gegen die Torsion, welche in einem festen Körper stattfindet.

Vergleiche über die Theorie der Torsion die Artikel: Elasticität und: Festigkeit.

Torsionspendel (Dynamik).

Eine elastische Stange oder ein solcher Faden, welcher vermittelst der Torsion um seine eigene Axe schwingt. Dieselbe ist in der Regel mit einem Querarme $C\,C_1$ (Fig. 2) versehen, durch

Fig. 2.



dessen Drehung man die Schwingungen hervorbringt. Sei l die Länge des Fadens OD, $a = CD$ der Radius des Querarms, ϑ der momentane Drehungswinkel CDM. Die Torsion wirkt auf den Arm als ein Paar, welches diesem Winkel ϑ proportional ist und die Grösse hat:

$$P = -\frac{\vartheta WC}{l},$$

wo W das Trägheitsmoment des Fadens, C der Elasticitätsmodul ist. Man hat somit, wenn Mk^2 das Trägheitsmoment des Querarms CC_1 ist:

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{CW\vartheta}{l} = 0.$$

Diese Formel ist ganz wie die angenäherte Pendelformel zu integriren.

Setzt man:

$$\frac{d\vartheta}{dt} = u, \qquad dt = \frac{d\vartheta}{u},$$

so kommt:

$$Mk^2 u^2 = \frac{CW}{l}(\alpha^2 - \vartheta^2),$$

wo α der Anfangswerth von ϑ ist, also:

$$\frac{d\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} = \frac{dt}{k}\sqrt{\frac{CW}{lM}},$$

also abermals integrirt:

$$\operatorname{arc\,cos}\frac{\vartheta}{\alpha} = \frac{t}{k}\sqrt{\frac{CW}{lM}},$$

$$\vartheta = \alpha \cos\frac{t}{k}\sqrt{\frac{CW}{lM}}.$$

Das Pendel macht isochrone Schwingungen, welche von dem Ausschlagswinkel α unabhängig, und wo die halbe Schwingungsdauer gleich $k\pi\sqrt{\frac{lM}{CW}}$ ist.

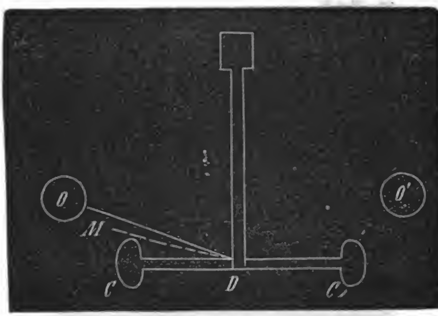
Das Torsionspendel dient namentlich dient namentlich als Drehwaage, welche von Colomb herrührt. Dieselbe wandte Cawendish an, um die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen.

Sei wieder CC_1 (Fig. 3) die Querstange. In O und O' sind zwei Bleikugeln von 8 Zoll Durchmesser (englisch) angebracht, welche anziehend auf C und C_1 wirken. Sei wieder $DC = a$, $DO = b$, Winkel $CDO = \gamma$, die Masse jeder Bleikugel gleich M, $CDM = \vartheta$ der momentane Drehungswinkel, $MO = z$, so hat man:

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma - \vartheta).$$

Die Anziehungskraft der Bleikugeln wirkt neben der Torsion. Diese Anziehungskraft ist umgekehrt dem Quadrat der Entfernung proportional, also wirkt auf M in Richtung MO die Kraft $\frac{\mu m n}{z^2}$, wo n die Masse der Kugel C ist. Diese Kraft zerfällt in eine normale, welche wegen der Festigkeit der Querstange vernichtet wird, und in eine tangentiale:

Fig. 3.



$\frac{\mu m n b \sin(\gamma-\vartheta)}{z^3}$.

Die zweite Kugel wirkt in gleicher Weise auf C_1. Die Wirkung von O' auf C und von O auf C_1 ist dagegen zu vernachlässigen, und man hat die Bewegungsgleichung:

$$Mk^2 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{CW\vartheta}{l} = \frac{2\mu m a b n \sin(\gamma-\vartheta)}{z^3}.$$

Nimmt man an, dass der Querstab nur ein sehr geringes Gewicht habe, also die Kugeln C und C_1 allein die Masse M bilden, so ist $Mk^2 = 2na^2$, also:

$$a\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{CW\vartheta}{2lan} = \frac{\mu b m \sin(\gamma-\vartheta)}{z^3}.$$

Mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von ϑ erhält man:

$$\frac{a d^2\vartheta}{dt^2} = g'\beta - g'\vartheta,$$

wo gesetzt wurde:

$$g' = [(a^2+b^2)\cos\gamma - 2ab - ab\sin\gamma^2]\frac{\mu m b}{c^5} + \frac{CW}{2lan},$$

$$\beta = \frac{\mu m b \sin\gamma}{c^3 g'}, \quad c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

Durch Integration erhält man ganz wie oben:

$$a\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = g'[\alpha^2 - (\vartheta-\beta)^2],$$

$$\vartheta = \beta + \alpha\cos\left(t\sqrt{\frac{g'}{a}} + \lambda\right),$$

wo α und λ Constante sind.

Man hat also isochrone Schwingungen, deren halbe Dauer $\pi\sqrt{\frac{a}{g'}}$ ist. Aus dem Vergleich dieser Zahl mit der halben Schwingungsdauer eines gewöhnlichen mathematischen Pendels lässt sich das Verhältniss der Dichtigkeit der Erde zu der der Bleikugeln ableiten. Diese halbe Schwingungsdauer ist nämlich (siehe die Artikel: Pendel, oder: Rotation) $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, wo l die Pendellänge, g die Beschleunigung der Schwere ist. Damit also beide Pendel in gleicher Zeit ihre Schwingungen machen, muss sein:

$$ga = g'l.$$

Ist M die Masse der Erde, r der Radius, so hat man aber:

$$g = \frac{\mu M}{r^2}.$$

Ausserdem war:

$$g' = \frac{\mu m b \sin\gamma}{c^3\beta},$$

wo b, c und γ bekannt sind. — β lässt sich leicht experimental bestimmen. Man hat nämlich:

$$\text{für } t=0: \quad \vartheta=\beta+\alpha\cos\lambda,$$

und:

$$\text{für } t=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \quad \vartheta_1=\beta-\alpha\cos\lambda,$$

so dass $\beta=\frac{\vartheta+\vartheta_1}{2}$ gleich dem halben Ausschlagswinkel des Torsionspendels ist. Somit also ergibt sich:

$$M=\frac{m\,b\,l\,r^2\sin\gamma}{c^2\,\beta\,a}.$$

m ist ebenfalls bekannt. — Auf diese Weise findet Cawendish für die mittlere Dichtigkeit der Erde, die des Wassers als Einheit genommen, 5,48, Hutton findet 5,32, Reicht durch einen genauern Apparat 5,43, später 5,583, Bayly 5,675.

Aehnliche Apparate, und dies ist ihre ursprüngliche Bestimmung, werden zur Bestimmung der electrischen und magnetischen Intensität angewandt. Vergleiche hierüber den Artikel: Drehwaage.

Totaliseur, Totalisirungsapparat (Maschinenlehre).

Vorrichtung, um die Arbeit einer Kraft zu messen (vergleiche den Artikel: Dynamometer).

Trabant (Astronomie).

Siehe Satellit.

Tractorie, Zuglinie (Geometrie).

Eine Curve, deren Tangente vom Berührungspunkt bis zu einer andern Curve, Directrix genannt, eine constante Grösse hat. Die Tractorie entsteht, wenn man einen biegsamen, an einem Ende belasteten Faden mit dem andern Ende an einer Curve auf horizontaler Ebene entlangschiebt.

Um die Gleichung der Tractorie zu finden, bedienen wir uns, wie öfter in diesem Wörterbuche, der Beziehung zwischen Bogenlänge und Tangentenwinkel.

Sei s der Bogen der Directrix von einem festen, sonst beliebigen Punkte an bis zu dem betreffenden Punkte A (Fig. 4), l der Winkel der durch A gezogenen Tangente mit einer festen Linie CE, $AB=a$ die Tangente an die Tractorie, B ein Punkt derselben, B_1, A_1 zwei nächste Punkte der Tractorie und Directrix, also $B_1A_1=BA=a$, der Bogen der Tractorie sei gleich σ, der Winkel ihrer Tangente BA mit CE gleich λ, also $BB_1=d\sigma$, Winkel $ABA_1=d\lambda$. Setzen wir noch Winkel $BAA_1=\tau$, so ist in Dreieck ABA_1:

$$\frac{a-d\sigma}{\sin\tau}=\frac{ds}{d\lambda}=\frac{a}{\sin(\tau+d\lambda)},$$

und ausserdem in Dreieck CAE:

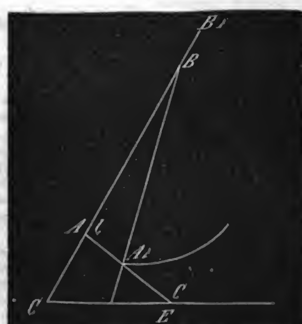
$$\pi-l+\lambda=\tau,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$1)\quad a\,d\lambda=\sin(l-\lambda)\,ds,$$

$$2)\quad d\sigma=-\cos(l-\lambda)\,ds.$$

Fig 4.



Die einfachste Tractorie ist die, deren Directrix eine Grade ist. Indem wir letztere mit der Linie CE identificiren, erhalten wir $l=\pi$, also:

$$a\,d\lambda=\sin\lambda\,ds,\quad d\sigma=\cos\lambda\,ds,$$

somit:

$$d\sigma=a\cot\lambda\,d\lambda,\quad \sigma=a\lg\sin\lambda,$$

wo $\sigma=0$ für $\lambda=\frac{\pi}{2}$ gesetzt ist; also auch:

$$\sin\lambda=e^{\frac{\sigma}{a}}.$$

Noch gibt die Gleichung 1) sehr leicht:

$$s=a\lg\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2},\quad \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}=e^{\frac{s}{a}},$$

wo ebenfalls $s=0$ für $\lambda=\frac{\pi}{2}$ gesetzt ist.

Nimmt man CE als Abscissenaxe, und legt den Anfangspunkt der Coordinaten so, dass die Ordinatenaxe die Tractorie berührt, so ist der eben gefundene Werth von s offenbar die Subtangente, während man hat:

$$\frac{dy}{d\sigma}=\sin\lambda,\quad dy=a\cos\lambda\,d\lambda,$$

$$y=a\sin\lambda,$$

da offenbar für $\lambda=\frac{\pi}{2}$: $y=a$ ist.

Ausserdem ist:

$$dx=\cos\lambda\,d\sigma=\frac{a\cos\lambda^2\,d\lambda}{\sin\lambda},$$

also:

$$x=a\left(\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}+\cos\lambda-1\right),$$

da x für $\lambda=\frac{\pi}{2}$ verschwindet.

Eliminirt man λ aus diesen Ausdrücken, so hat man die Gleichung der Tractorie in Parallelcoordinaten. Die Rectificationsformel enthält die Gleichung:

$$\sin\lambda=e^{\frac{\sigma}{a}}$$

unmittelbar. Was die Quadratur anbetrifft, so ist die Formel dafür:

$$F=\int y\,dx=a^2\int\cos\lambda^2\,d\lambda,$$

also:

$$F=\frac{a^2}{4}(2\lambda+\sin 2\lambda-\pi),$$

wo man ebenfalls mit $\lambda=\frac{\pi}{2}$ beginnt. — Was die Gestalt der Curve anbetrifft, so ist aus der Gleichung:

$$\sin\lambda=e^{\frac{\sigma}{a}}$$

ersichtlich, dass σ nur negativ sein kann, und dass den äussersten Werthen $\sigma=-\infty$: $\lambda=0$ und $\lambda=\pi$, $\sigma=0$ dagegen $\lambda=\frac{\pi}{2}$ entspricht. Zu jedem λ und dem entsprechenden $\pi-\lambda$ gehört ein gleicher Werth von σ. Die Curve zerfällt also in zwei congruente Zweige, die sich in einer Spitze an einander schliessen, wo die Axe der y berührt ist, während die Axe der x eine Asymptote ist. Der Flächeninhalt des ganzen, ins Unendliche fortgesetzten Zweiges wird gefunden, wenn man $\lambda=0$ und $\lambda=\pi$ setzt. Man erhält bezüglich:

$$F=-\frac{\pi a^2}{4}\quad\text{und}\quad F=\frac{\pi a^2}{4},$$

also jedesmal der vierte Theil eines Kreises, der a zum Durchmesser hat.

Sei jetzt die Directrix ein Kreis, so ist $s=rl$, wenn r der Radius desselben, und die Linie CE ein Durchmesser ist. Man hat dann:

1) $$a\,d\lambda=r\sin(l-\lambda)\,dl,$$

2) $$d\sigma=-r\cos(l-\lambda)\,dl,$$

also wenn wir $l-\lambda=\tau$ setzen:

$$a\,d\lambda=r\sin\tau\,(d\tau+d\lambda),$$

oder:

$$d\lambda=\frac{r\sin\tau\,d\tau}{a+r\sin\tau}=d\tau-\frac{a\,d\tau}{a+r\sin\tau},$$

$$\lambda=\tau+\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}}\arccos\left(\frac{r+a\sin\tau}{a+r\sin\tau}\right),$$

wo der Anfangswerth von λ angemessen bestimmt ist, und ausserdem:

$$d\sigma=-r\cos\tau\,(d\tau+d\lambda)$$

$$=-r\cos\tau\left(2d\tau-\frac{a\,d\tau}{a+r\sin\tau}\right),$$

$$\sigma=-2r\sin\tau+a\lg(a+r\sin\tau)-a\lg a,$$

wenn für $\tau=0$ also für $l=\lambda$ auch $\sigma=0$ genommen ist.

Die letztere Formel dient zur Rectification. Eliminirt man τ, so hat man die Gleichung der betreffenden Tractorie.

Die Tractorie, deren Directrix eine Grade ist, hat auch eine mechanische Anwendung.

Sei R der Axendruck für den Quadratzoll eines stehenden Zapfens, welcher eine Rotationsfläche von zu bestimmender Gestalt bildet. Der Normaldruck gegen den Zapfen ist dann offenbar gleich $\frac{R}{\sin\alpha}$, wo α der Neigungswinkel des betreffenden Flächenelements gegen die Axe ist. Dieser Grösse ist die Reibung proportional. Ist noch z der horizontale Abstand des Elements von der Axe, so ist das Moment der Reibung gleich $\frac{Rz}{\sin\alpha}$. Offenbar aber ist $\frac{z}{\sin\alpha}$ gleich der Länge der Tangente an die Erzeugungscurve vom Berührungspunkt bis zur Axe. Soll nun der Zapfen (sogenannter Antifrictionszapfen) einer gleichmässigen Abnutzung unterliegen, so muss dieses Moment constant, d. h. die Erzeugungscurve des Zapfens eine Huyghens'sche Tractorie sein, deren Directrix die Zapfenaxe ist.

Träger (Maschinenlehre).

Jede Einrichtung zum Tragen oder Stützen.

Trägheit (Mechanik).

Die Eigenschaft der materiellen Punkte, sich unter dem Einflusse eines momentan wirkenden Antriebes so lange mit gleichmässiger und gleichgerichteter Geschwindigkeit zu bewegen, bis ein anderer Antrieb hinzukommt. Die Trägheit ist also weiter nichts, als der metaphysische Satz vom zureichenden Grunde auf die Mechanik angewandt. Es ist die Trägheit aber lediglich eine Abstraction, da erstens die in der Natur wirkenden Kräfte nicht momentan, sondern continuirlich sind, also die Trägheit nicht für diese Kräfte selbst, sondern für die unendlich kleinen, von Moment zu Moment sich wiederholenden Impulse gilt, in welche man sich diese Kräfte zerlegt denkt, andererseits aber die materiellen Punkte nicht getrennt, sondern mit andern verbunden vorkommen, welche gewisse von dem dynamischen Zustande des Systems abhängige Spannungen, also auch Kräfte, auf einander ausüben. Bei sogenannten Stosskräften zeigt sich die Trägheit am einfachsten, da man dieselben für gewisse Betrachtungen als momentan annehmen kann.

Trägheitshalbmesser (Mechanik).

So wird oft die Entfernung eines Punktes A von einer festen Axe B genannt, dessen Trägheitsmoment in Bezug auf diese Axe, wenn man die Masse eines gegebenen Körpers C in ihn vereint denkt, dem Trägheitsmoment dieses Körpers gleich wäre. Ist also M die Masse, T das Trägheitsmoment von C, ϱ der Trägheitshalbmesser von A, so hat man:

$$M\varrho^2 = T, \quad \varrho = \sqrt{\frac{T}{M}}.$$

Trägheitskräfte (Mechanik).

So werden jetzt oft die Producte des Massenelements in dem Zuwachs einer der nach den Axen zerlegten Geschwindigkeitscomponenten mit umgekehrten Vorzeichen genannt. Die Trägheitskräfte haben also die Ausdrücke:

$$-\frac{d^2x}{dt^2}\,dm, \quad -\frac{d^2y}{dt^2}\,dm, \quad -\frac{d^2z}{dt^2}\,dm.$$

Führt man sie ein, so lässt sich das das d'Alembert'sche Prinzip so aussprechen: Die Trägheitskräfte eines Systems und die auf das System wirkenden continuirlichen Kräfte halten einander jederzeit das Gleichgewicht. — Was den Namen anbetrifft, so liegt demselben vielleicht folgende Betrachtung zu Grunde. Wenn man in irgend einem Momente auf jeden Punkt eines bewegten Systems die Kräfte $-\frac{d^2x}{dt^2}dm$ u. s. w. einwirken liesse, so würden diese den Geschwindigkeitszuwachs $+\frac{d^2x}{dt^2}dm$ vernichten, jeder Punkt des Körpers sich also gleichmässig und in constanter Richtung bewegen, wie es dem Trägheitsgesetze gemäss stattfinden muss.

Uebrigens ist der Name kein gerade glücklich gewählter.

Trägheitsmoment (Mechanik).

So wird die Summe für irgend ein System $\Sigma(mr^2)$ genannt, wo m die Masse eines materiellen Punktes, r seine senkrechte Entfernung von einer gegebenen Axe ist, erstreckt auf das ganze System. Also wenn dasselbe in einem continuirlichen Körper besteht, und dm das Massenelement ist, so ist das Trägheitsmoment gleich $\int r^2\,dm$.

Ueber Berechnung und Anwendung der Trägheitsmomente vergleiche den Artikel: Rotation.

Der Name Trägheitsmoment rührt von Euler her.

Tragbögen (Statik).

Bogenförmige Träger. Siehe den Artikel: Festigkeit, auch: Holz- und Eisen-Construction.

Tragketten (Statik) sind Tragbögen, die nach unten gerichtet sind, und darum oft nicht aus massivem Holz oder Eisen, sondern aus Seilen, Drahtseilen und Ketten von Schmiedeeisen angefertigt sind. Dergleichen sind z. B. die Hängebrücken (vergleiche den Artikel: Seilcurven).

Tragkraft (Statik).

Siehe Festigkeit.

Tragmodul (Statik).

Die Zugkraft, welche einen prismatischen Körper, dessen Querschnitt der Einheit gleich ist, bis zur Grenze der Elasticität ausdehnt oder zusammendrückt. Es gibt also zwei Tragmoduln, die von einander verschieden sind.

Tragmoment (Statik).

Siehe Biegungsmoment.

Trajectorie (Geometrie).

1) So wird eine Curve genannt, welche eine gegebene Schaar anderer Curven unter constantem Winkel schneidet.

Setzen wir ebene Curven voraus, und sei:

1) $$f(x,\ y,\ \alpha)=0$$

die Gleichung einer Curve aus der gegebenen Schaar, wo mithin α der veränderliche Parameter ist. Sei λ der Winkel der Tangente an die Trajectorie mit der Axe der x, l der, welchen die Tangente an irgend einer Curve aus der Schaar in dem Punkte, wo die Trajectorie schneidet, mit derselben Axe macht, a der constante Winkel einer Curve aus der Schaar mit der Trajectorie, so hat man:

2) $$\lambda = a + l.$$

Ist $p=\left(\frac{dy}{dx}\right)$ der aus Gleichung 1) genommene Differenzialquotient, also:

3) $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}p=0,$$

so gibt Gleichung 2):

4) $$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\lambda=\operatorname{tg}(a+l),\quad \frac{dx}{d\sigma}=\cos\lambda=\cos(a+l),\quad \frac{dy}{d\sigma}=\sin\lambda=\sin(a+l),$$

wo die Grössen dx, dy, $d\sigma$ sich auf die Trajectorie beziehen, also auch:

5) $$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tg}a+p}{1-p\operatorname{tg}a},\quad \frac{dx}{d\sigma}=\frac{\cos a-p\sin a}{\sqrt{(1+p^2)}},\quad \frac{dy}{d\sigma}=\frac{\sin a+p\cos a}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

wo $d\sigma$ das Bogenelement der Trajectorie ist.

Eine der Gleichungen 5) gibt, wenn man α und p mittels 3) und 1) eliminirt, die Differenzialgleichung der Trajectorie. Oft ist es jedoch bequemer, statt der Ausdrücke rechts ihre Werthe:

$$\operatorname{tg}(a+l),\quad \sin(a+l),\quad \cos(a+l)$$

zu benutzen. Sei z. B. die Schaar gradlinig, und schneiden sich alle in einem Punkte, den wir zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen, so wird die Gleichung 1) die Gestalt haben:

$$y = x\operatorname{tg} l.$$

l ist hier selbst der Parameter. Man hat:

$$\frac{dx}{d\sigma}=\cos(a+l),\quad \frac{dy}{d\sigma}=\sin(a+l),$$

d. h. wenn man y, als Function von x und l betrachtet, für dy einsetzt:

$$\frac{\operatorname{tg} l\,dx + x\sec l^2\,dl}{d\sigma}=\sin(a+l),$$

$$\operatorname{tg} l\cos(a+l)+\frac{x\,dl}{d\sigma\cos l^2}=\sin(a+l),$$

d. h.:

$$\sin a\,d\sigma=\frac{x\,dl}{\cos l},\quad dx=\sin a\,d\left(\cos l\frac{d\sigma}{dl}\right),$$

und da man hat:

$$dx = \cos\lambda\, d\sigma = \cos(a+l)\, d\sigma,$$

$$\cos(a+l)\, d\sigma = \sin a \cos l \frac{d^2\sigma}{dl} - \sin a \sin l\, d\sigma,$$

d. h.:

$$\cos a\, d\sigma = \sin a \frac{d^2\sigma}{dl},$$

$$l = \operatorname{tg} a \lg\left(\frac{d\sigma}{dl} A\right),$$

$$A\frac{d\sigma}{dl} = e^{l \cot a}, \quad \sigma = B e^{l \cot a},$$

wo B eine Constante ist, welche durch den Anfangspunkt bestimmt werden muss. Setzt man $l = \lambda - a$, so kommt:

$$\sigma = C e^{\lambda \cot a},$$

wo λ eine andere Constante ist. Die Trajectorie ist eine logarithmische Spirale (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten).

Ist $a = \frac{\pi}{2}$, also die Trajectorie eine rechtwinklige, so hat man:

$$\frac{d^2\sigma}{dl} = 0, \qquad \sigma = A\lambda + B;$$

in diesem Falle ist sie ein Kreis.

Setzen wir jetzt für die Gleichung der logarithmischen Spirale: $s = \frac{Ae^{cl}}{C} + B$, so erhalten wir:

$$dx = \cos l\, ds = Ae^{cl} \cos l\, dl,$$

$$dy = \sin l\, ds = Ae^{cl} \sin l\, dl,$$

$$x + yi = A\int e^{l(c+i)}\, dl = \frac{Ae^{l(c+i)}}{c+i},$$

also, wenn man sich x und y als Functionen von l und A, A also als den veränderlichen Parameter denkt:

$$\frac{\partial(x+iy)}{\partial l} dl + \frac{\partial(x+iy)}{\partial A} dA = e^{l(c+i)}\left(A\, dl + \frac{dA}{c+i}\right),$$

während aus den Gleichungen 4) folgt:

$$\frac{d(x+iy)}{d\sigma} = e^{(a+l)i},$$

so dass man hat:

$$e^{l(c+i)}\left(A\frac{dl}{d\sigma} + \frac{dA}{d\sigma\,(c+i)}\right) = e^{(a+l)i},$$

oder:

$$e^{cl}\left(A\frac{dl}{d\sigma} + \frac{dA}{d\sigma}\frac{c-i}{1+c^2}\right) = e^{ai},$$

wenn man also Reelles und Imaginäres trennt:

$$e^{cl}\left(A\frac{dl}{d\sigma} + \frac{c}{1+c^2}\frac{dA}{d\sigma}\right) = \cos a,$$

$$\frac{e^{cl}}{1+c^2}\frac{dA}{d\sigma} = \sin a.$$

Durch Elimination von $\frac{dA}{d\sigma}$ ergibt sich:

$$A e^{cl} \frac{dl}{d\sigma} = \cos a + c \sin a,$$

und indem man dies in die vorletzte Gleichung einsetzt:

$$-\frac{1}{1+c^2}(\cos a + c \sin a)\frac{d}{dl}\left(\frac{d\sigma}{dl}e^{-cl}\right) = \sin a \frac{d\sigma}{dl}e^{-cl},$$

also durch Integration:

$$-\frac{\cos a + c \sin a}{1+c^2} \lg \frac{d\sigma}{dl}e^{-cl} = l \sin a + b,$$

wo b eine Constante ist; somit:

$$\frac{d\sigma}{dl}e^{-cl} = e^{-\frac{(l \sin a + b)(1+c^2)}{\cos a + c \sin a}},$$

$$d\sigma = Be^{\left(c - \frac{\sin a\,(1+c^2)}{\cos a + c \sin a}\right) l} dl,$$

B ist eine leicht zu bestimmende Constante, und das Integral:

$$\sigma = E e^{\left(c - \frac{\sin a\,(1+c^2)}{\cos a + c \sin a}\right) \lambda},$$

wo $\lambda = a + l$ gesetzt ist, zeigt, dass man abermals eine logarithmische Spirale hat, was somit nicht bloss bei rechtwinkligen Trajectorien stattfindet, wie dies schon Nicolaus Bernoulli gezeigt hat, sondern bei jedem Schnittwinkel.

Denken wir uns eine Schaar Parabeln mit gemeinschaftlichem Parameter und gemeinschaftlicher Axe, so ist:

$$y^2 = 2A(x - \alpha),$$

wo α veränderlich ist. Die Gleichung 5) wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{tg} a + A}{y - A \operatorname{tg} a},$$

oder:

$$dx = \frac{y - A \operatorname{tg} a}{y \operatorname{tg} a + A} dy = dy\left(\cot a - \frac{A}{\sin a\,(y \sin a + A \cos a)}\right),$$

also:

$$x = y \cot a - \frac{A}{\sin a^2} \lg (y \sin a + A \cos a)$$

bei passender Wahl der Constante. Ist die Trajectorie eine rechtwinklige, so kommt:

$$x = -A \lg y, \quad y = e^{-\frac{x}{A}},$$

also eine logarithmische Linie. — Haben die Parabeln parallele Axen, und liegen die Scheitel in einer darauf senkrechten Graden, so ist:

$$(y - \alpha)^2 = 2Ax,$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{tg} a\,(y - \alpha) + A}{(y - \alpha) - A \operatorname{tg} a} = \frac{\sqrt{A} + \operatorname{tg} a \sqrt{(2x)}}{\sqrt{(2x)} - \operatorname{tg} a \sqrt{A}},$$

oder:

$$dy = \left(\operatorname{tg} a + \frac{\sqrt{A}}{\cos a^2 \left(\sqrt{(2x)} - \operatorname{tg} a \sqrt{A}\right)}\right) dx,$$

$$= \operatorname{tg} a\, dx + \frac{\sqrt{A}}{\cos a^2} \left(\sqrt{2} + \frac{\operatorname{tg} a \sqrt{(2A)}}{\sqrt{(2x)} - \operatorname{tg} a \sqrt{A}}\right) d\sqrt{x},$$

also:

$$y = x \operatorname{tg} a + \frac{\sqrt{(2Ax)}}{\cos a^2} + \frac{A \operatorname{tg} a}{\cos a^3} \lg \left(\sqrt{(2x)} - \operatorname{tg} a \sqrt{A}\right);$$

aber wenn die Trajectorie rechtwinklig ist, erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{2x}{A}},$$

d. h.:

$$y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{A} x^3},$$

was die Gleichung einer Neil'schen Parabel ist.

2) Von besonderem Interesse ist aber die Theorie der Trajectorien eines Systems von graden Linien An diesen Fall will der Verfasser dieses Wörterbuchs eine Reihe von Betrachtungen knüpfen, die vielleicht zur Vervollständigung dieser Theorie nicht unwesentlich sind.

Als Coordinaten nehmen wir Bogenlänge und Tangentenwinkel an (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten), welche dem Problem eine möglichst einfache Gestalt geben.

Eine Schaar von graden Linien in der Ebene, die nicht alle parallel sind, ist vollständig bestimmt, wenn man ihre Einhüllungscurve kennt. Diese wollen wir hier Charakteristik nennen, und der Kürze wegen die Trajectorie der Graden auch als Trajectorie dieser Charakteristik und umgekehrt bezeichnen. Sei a der Schnittwinkel der Trajectorie; für $a = \frac{\pi}{2}$ verwandeln sich dann Trajectorie und Charakteristik in Evolvente und Evolute.

Sei OY (Fig. 5) eine beliebige Grade, AA_1A_2 ein Bogen der Charakteristik, A_1B, A_2B_1 zwei unendlich nahe Tangenten, BB_1 das Bogenelement der Trajectorie, l der Winkel zwischen OY und A_1B_1, also $l+dl$ der von OY mit A_2B, λ sei der von OY mit BB_1, also: Winkel $A_1BY = a = \lambda - l$

Sei ferner $A_1A_2 = ds$, $BB_1 = d\sigma$. Noch ist Winkel $B_1AB = dl$. l und s sind die Coordinaten der Charakteristik, λ und σ die der Trajectorie.

Wir setzen noch $A_1B = r$, also:

$$A_2B_1 = r + dr, \quad A_1B_1 = r + dr - ds,$$

dann ist in Dreieck B_1AB:

Fig. 5.



$$d\sigma : dl = r : \sin a,$$

und:

$$r + dr - ds : \sin a = r : \sin(a - dl).$$

Aus der letzteren Gleichung folgt:

$$d(r-s)\sin a = r\, dl \cos a,$$

also wenn man r aus der erstern einsetzt:

$$d(r-s) = \cos a\, d\sigma,$$

$$r - s = A + \sigma \cos a,$$

also wenn man r hieraus in die erste Gleichung einsetzt:

$$1) \quad s + A = \frac{d\sigma}{dl}\sin a - \sigma \cos a, \quad \lambda = a + l,$$

wo A eine willkürliche Constante ist, die sich aus den beliebigen Anfangswerthen von σ oder s ergibt. Die Gleichungen 1) reichen hin, um s und l als Functionen von λ, oder σ und λ als Functionen von l zu finden. Nach Elimination von l, bezüglich λ hat man die Gleichung der Charakteristik oder Trajectorie. Setzt man $a = \frac{\pi}{2}$, so kommt für die Beziehung zwischen Evolvente und Evolute:

2) $$s+A=\frac{d\sigma}{dl'},\quad \lambda=\frac{\pi}{2}+l.$$

Beispiel 1.

Die Trajectorie sei ein Kreis mit Radius B, also:

$$\sigma=B\lambda.$$

Die Gleichungen 1) geben dann:

$$s+A=B\sin a-B\lambda\cos a$$

Setzen wir:

$$B\sin a-B\,a\cos a-A-s=s',$$

was lediglich eine Coordinaten-Transformation ist (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten), so kommt:

$$s'=Bl\cos a.$$

Man hat also einen Kreis mit Radius $B\cos a$, d. h.:

„Alle Graden, die einen Kreis unter gleichem Winkel schneiden, hüllen einen concentrischen Kreis ein, dessen Radius gleich dem Lothe vom Mittelpunkte auf eine der Schnittlinien ist.“

Beispiel 2.

Die Trajectorie sei eine Radlinie (Cycloide, Epicycloide oder Hypocycloide), so ist ihre Gleichung (vergleiche den Artikel: Radlinie):

$$\sigma=B\cos\alpha l,$$

also wenn man, wie dies immer geschehen kann, $A=0$ setzt:

$$s=-B\alpha\sin\alpha l\sin a-B\cos\alpha l\cos a.$$

Wir setzen noch:

$$\alpha\sin a=C\sin\alpha b,\quad \cos a=C\cos\alpha b,\quad l'=l+a-b,\quad CB=D.$$

dann kommt:

$$-s=D\cos\alpha l',$$

d. h. eine der erstern ähnliche Radlinie. Für die gemeine Cycloide ist $\alpha=1$, $C=1$, $D=B$, also:

$$-s=B\cos l'.$$

Die Charakteristik ist hier der Trajectorie congruent. Gleiches findet natürlich auch für Evolvente und Evolute statt.

Für die logarithmische Spirale ist die Gleichung:

$$\sigma=Ce^{\alpha l}.$$

(Vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten.) Setzen wir:

$$a+l=l'+b,\quad C(\alpha\sin a-\cos a)=D,\quad De^{\alpha b}=C,$$

so ist für die Charakteristik:

$$s=Ce^{\alpha l'},$$

also eine congruente Curve. Ist jedoch $\alpha=\cot a$, so wird $D=0$, $s=0$, also die Charakteristik kann auch ein Punkt sein. Für $\alpha=1$ z. B. kommt $a=\frac{\pi}{4}$ in diesem Falle.

Ist die Gleichung der Charakteristik gegeben, und soll die der Trajectorie gefunden werden, so muss Gleichung 1) integrirt werden. Diese Integration lässt sich leicht auf Quadraturen zurückführen, und wie leicht zu sehen, erhält man, wenn B eine neue Constante ist:

1a) $$\sigma=\frac{e^{l\cot a}}{\sin a}\int s\,e^{-l\cot a}dl-\frac{A}{\cos a}+\frac{Be^{l\cot a}}{\sin a}.$$

Für $a=\frac{\pi}{2}$ ergibt sich direct aus Gleichung 2):

2a) $$\sigma=\int s\,dl+Al+B.$$

Beispiel 1.

Die Gleichung der Kettenlinie ist:

$$s=C\operatorname{tg} l.$$

(Siehe den Artikel: Seilcurve). Man erhält für ihre Evolvente:

$$\sigma = -C \lg \cos l + A l;$$

für ihre Evolute würde sich nach dem Vorigen ergeben:

$$s = \frac{C}{\cos l^2}.$$

Beispiel 2.

Die Gleichung des Kreises ist $s = Rl$. Die Gleichung 1a) gibt für die Trajectorie immer wieder einen Kreis, nur für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ gibt die Gleichung 2a), wenn man $B = 0$ setzt:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} R l^2 + A l.$$

Dies ist also die Gleichung der Kreisevolvente. Sei:

$$\sigma' = \tfrac{1}{2} r l'^2 + a l'$$

die einer zweiten Kreisevolvente, und setzen wir:

$$l' = l + b, \quad \sigma' - \tfrac{1}{2} r b^2 - a b = \sigma, \quad r b + a = \frac{A r}{R},$$

so kommt:

$$\sigma = \tfrac{1}{2} \frac{r}{R} (R l^2 + A l),$$

offenbar eine der ersten ähnliche Curve, also:

„Jede zwei Kreisevolventen sind ähnlich."

Die Evolvente einer Kreisevolvente nennen wir Kreisevolvente zweiter Ordnung, die der letztern Kreisevolvente dritter Ordnung u. s. w. Man sieht dann aus Gleichung 2a), dass die Kreisevolvente $n$ter Ordnung eine Gleichung derart hat, dass die Bogenlänge als beliebige ganze rationale Function $n+1$ter Ordnung des Tangentenwinkels gegeben ist, also:

$$s = A_0 l^{n+1} + A_1 l^n + A_2 l^{n-1} + \ldots + A_{n+1}.$$

Eine Gleichung von ähnlicher Gestalt ergibt sich, wie Gleichung 1) zeigt, für die Charakteristik der allgemeinen Kreisevolvente, d. h.:

„Alle Graden, die eine Kreisevolvente von beliebiger Ordnung unter gleichem Winkel schneiden, hüllen eine Kreisevolvente von derselben Ordnung ein."

Nur für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ wird der Coefficient der höchsten Potenz von l der Null gleich und, wie selbstverständlich, die Evolute um eine Ordnung niedriger.

Ist die Gleichung einer Curve in rechtwinkligen Coordinaten gegeben, so ergibt sich die Bogenlänge als Function des Tangentenwinkels nur dann in endlicher Form, wenn diese Curve rectificirbar ist; indessen folgt, dass die Bogenlänge der Evolute:

$$s = \frac{d\sigma}{dl} - A,$$

oder wenn man $s + A = s'$ nimmt:

$$s' = \frac{d\sigma}{dl}$$

immer in endlicher Form sich finden lässt. Sei nämlich $f = 0$ die Gleichung der Evolvente in rechtwinkligen Coordinaten, und setzen wir:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f', \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f'', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_1', \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_2,$$

so ist, wenn man die Axe der Y als die Linie annimmt, mit welcher die Tangente den Winkel l macht:

$$dx = \sin l\, ds, \quad dy = \cos l\, ds;$$

ist also s die unabhängige Veränderliche:

$$d^2 x = \cos l\, dl\, ds, \quad d^2 y = -\sin l\, dl\, ds.$$

Differenziiren wir $f = 0$ zweimal, und eliminiren dx, dy, $d^2 x$, $d^2 y$, so kommt:

$$f = 0, \quad f' \sin l + f_1 \cos l = 0,$$

$$(f'' \sin l^2 + 2 f_1' \sin l \cos l + f_2 \cos l^2)\, s' + f' \cos l - f_1 \sin l = 0.$$

Aus diesen drei Gleichungen ist x und y zu eliminiren, um s' und $\frac{ds}{dl}$ als Function von l zu haben.

Beispiel 1.

Für die Parabel ist:

$$f = y^2 - 2 a x.$$

Es ergibt sich:

$$s' = \frac{ds}{dl} = \frac{A}{\cos l^3}.$$

Dies ist die Gleichung der Parabelevolute (Neil'sche Parabel).

Beispiel 2.

Für die Ellipse oder Hyperbel ist:

$$f = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1.$$

Für die Evolute erhält man:

$$a b s'^2 \left(\frac{\sin l^2}{a} + \frac{\cos l^2}{b} \right)^3 = 1.$$

3) Damit zwei Trajectorien demselben System von Graden angehören, muss sein:

$$s = \frac{d\sigma}{dl}\cos a - \sigma\sin a - A = \frac{d\sigma'}{dl}\cos b - \sigma'\sin b - B,$$

wo a der Schnittwinkel der einen, b der der andern ist. Setzt man also $A - B = C$, so hat man die Bedingung:

1) $$\frac{d\sigma}{dl}\sin a - \sigma\cos a = C + \frac{d\sigma'}{dl}\sin b - \sigma'\cos b.$$

Sind die Schnittwinkel gleich, so kommt:

$$\sin a\,\frac{d(\sigma-\sigma')}{dl} - \cos a\,(\sigma-\sigma') = C,$$

also durch Integration:

2) $$\sigma - \sigma' = A\,e^{l\cot a} - \frac{C}{\sin a}.$$

Wir untersuchen jetzt, in welchem Falle zwei Trajectorien desselben Systems bei gleichem Schnittwinkel auch ähnlich sind. Ist $\sigma = f(l)$ die Gleichung der einen, so muss die der andern die Form haben (vergleiche den Artikel: Transformations-coordinaten):

$$\sigma' = \alpha + k f(\beta \pm l);$$

man hat also:

$$f(l) - k f(\beta \pm l) = A\,e^{l\cot a} - g,$$

wo:

$$g = \frac{C}{\sin a} - \alpha$$

ist. Diese Functionengleichung ist leicht aufzulösen.

Habe l zunächst das positive Zeichen, so setzen wir:

$$f(l) = \varphi(l) + m e^{l\cot a} + n,$$

und wenn wir dies einsetzen, m und n aber so bestimmen, dass:

$$m = \frac{A}{1 - k e^{\beta\cot a}}, \quad n = \frac{g}{k-1}$$

ist, so kommt:

$$\varphi(l) = k\varphi(\beta + l).$$

Illusorisch wird diese Gleichung für:

$$k = 1 \text{ und für } k = e^{\beta\cot a}.$$

Im letztern Falle setzen wir:

$$f(l) = \varphi(l) + (m + pl)\,e^{l\cot a} + n,$$

wo sich dann ergibt:

$$n = \frac{g}{k-1}, \quad m \text{ willkürlich}, \quad p = -\frac{g}{\beta},$$

und wie oben:

$$\varphi(l) = k\varphi(\beta + l).$$

Für $\beta = 0$ wird auch dieser Werth illusorisch. Dann ist aber:

$$A\,e^{l\cot a} = g,$$

also die Gleichung unmöglich.

Ist dagegen $k = 1$, so ist zu setzen:

$$f(l) = \varphi(l) + m\,e^{l\cot a} + q\,l + n,$$

es wird dann n willkürlich,

$$m=\frac{A}{1-e^{\beta\cot a}},\quad q=\frac{g}{\beta},$$

und wieder:

$$\varphi(l)=k\varphi(\beta+l).$$

Nur für $e^{\beta\cot a}=1$ ist dieser Ausdruck illusorisch. In diesem Falle ist entweder:

$$\cot a=0,\quad a=\frac{\pi}{2},$$

man hat also die Evolvente; dann ist aber die Gleichung 2) illusorisch. Dieser Fall wird nachher direct untersucht werden. Oder es ist $\beta=0$, ein Fall, der offenbar unmöglich ist.

Es führt also in jedem Fall unsere Aufgabe auf die Auflösung der Gleichung:

$$\varphi(l)=k\varphi(\beta+l),$$

und man erhält dafür:

$$\varphi(l)=Fk^{-\frac{l}{\beta}},$$

wo F eine beliebige Function ist, welche die Periode β hat. Denkt man sich die Constanten mit σ vereint, so kommt im Allgemeinen:

$$\sigma=Fk^{-\frac{l}{\beta}}+m\,e^{l\cot a},$$

wenn aber $k=e^{-\beta\cot a}$ ist:

$$\sigma=(F+pl)\,e^{l\cot a},$$

und wenn $k=1$ ist:

$$\sigma=F+me^{l\cot a}+ql.$$

Der letztere Fall entspricht der Congruenz. In jedem dieser Fälle sind also zwei Trajectorien congruent. Ist jedoch F eine Constante, so sind alle drei Ausdrücke von β unabhängig, da im ersten Falle k, also auch $k^{-\frac{1}{\beta}}$ beliebig ist.

Man hat dann also Liniensysteme, zu denen unter Schnittwinkel a unendlich viel continuirlich auf einander folgende ähnliche Trajectorien gehören.

Was übrigens die Lage der einzelnen Trajectorien anbetrifft, so ist diese durch den zugehörigen Anfangswerth der Länge der Schnittlinie r gegeben, und diesen bestimmt die Gleichung:

$$d\sigma : dl=r:\sin a.$$

Untersuchen wir jetzt die Charakteristiken, zu welchen unendlich viel ähnliche Trajectorien gehören, so gibt die Gleichung:

$$s=\frac{d\sigma}{dl}\sin a-\sigma\cos a,$$

in den beiden ersten Fällen logarithmische Spiralen, im letzten einen Kreis. Es ist aber noch der Fall zu untersuchen, wo in $f(\beta\pm l)$ das untere Vorzeichen stattfindet.

In der Formel:

$$f(l)-kf(\beta-l)=A\,e^{l\cot a}-g$$

schreiben wir $\beta-l$ für l, und erhalten:

$$f(\beta-l)-kf(l)=A\,e^{(\beta-l)\cot a}-g,$$

also wenn $\beta-l$ eliminirt wird:

$$f(l)=\frac{Ae^{l\cot a}+ke^{(\beta-l)\cot a}-g(1+k)}{1-k^2}.$$

Dies ist indess nur ein besonderer Fall des allgemeinen Werths von σ. Dieser Ausdruck wird für $k=\pm l$ illusorisch, also, wenn er eintritt, dann hat man:

$$f(l)\pm f(\beta-l)=A\,e^{l\cot a}-g,$$

also auch:

$$\pm[f(l)\pm f(\beta-l)]=A\,e^{(\beta-l)\cot a}-g,$$

Gleichungen, die nur für $a=\frac{\pi}{2}$, also in dem schon oben ausgeschlossenen Falle der Evolvente zu realisiren sind. Diesen Fall untersuchen wir jetzt direct. Man hat für ihn:

$$\frac{d(\sigma-\sigma')}{dl}=C,\quad \sigma-\sigma'=Cl+E,$$

also im Falle der Aehnlichkeit:

$$f(l)-kf(\beta\pm l)=Cl+E,$$

wo E mit $E+\alpha$ vertauscht ist. Bei positivem Zeichen ist zu setzen:

$$f(l)=\varphi(l)+b\,l+g,$$

und man erhält:

$$b=\frac{C}{1-k},\quad g=\frac{(1-k)E+kC\beta}{1-k},$$

und:

$$\varphi(l)=k\varphi(\beta+l).$$

Der Fall, wo dies illusorisch wird, ist: $k=1$; dann setzt man:

$$f(l)=\varphi(l)+al^2+bl+g,$$

wo dann erhalten wird:

$$a=\frac{C}{2\beta},\quad b=-\frac{2E+C\beta}{2\beta},$$

und:

$$\varphi(l)=\varphi(\beta+l),$$

also ist F wieder eine Function mit Periode β, so ergibt sich:

$$\sigma=Fk^{-\frac{l}{\beta}}+\beta l,$$

und im Falle der Congruenz:

$$\sigma=F+al^2+bl.$$

Für constantes F gilt wieder das Obige. — In diesem Falle gibt die Gleichung für die Evolute $\sigma=\frac{d\sigma}{dl}$ bezüglich wieder einen Kreis und eine logarithmische Spirale.

Es ist aber hiermit nicht gesagt, dass alle Trajectorien unter gleichem Schnittwinkel, bezüglich alle Evolventen der logarithmischen Spirale ähnlich sind, und wir wollen also dieselben noch direct untersuchen.

In die Formel:

$$\sigma=\frac{e^{l\cot a}}{\sin a}\int s\,e^{-l\cot a}\,dl+B\,\frac{e^{l\cot a}}{\sin a},$$

welche die Trajectorie gibt, setzen wir zu dem Ende für s den der logarithmischen Spirale entsprechenden Werth:

$$s=Ae^{\alpha l},$$

und erhalten:

$$\sigma=\frac{Ae^{\alpha l}}{\sin a\,(\alpha-\cot a)}+\frac{Be^{l\cot a}}{\sin a}.$$

Um eine zweite Trajectorie zu finden, setzen wir B_1 für B und vertauschen l mit $l+c$, so kommt:

$$\sigma=\frac{Ae^{c\alpha}e^{\alpha l}}{\sin a\,(\alpha-\cot a)}+\frac{B_1}{\sin a}e^{c\cot a}e^{l\cot a}.$$

Damit beide Curven ähnlich seien, muss man haben:

$$B_1\,e^{c\cot a}=Be^{c\alpha}.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich c reell bestimmen, wenn B und B_1 gleiches Vorzeichen haben.

Die Trajectorien der logarithmischen Spirale mit gegebenem Schnittwinkel zerfallen also in zwei Klassen; für die eine ist B positiv, für die andere negativ, und jede Klasse enthält nur ähnliche Curven. Zwischen beiden Klassen findet sich eine einzeln stehende Trajectorie, für welche $B=0$ ist, und dies ist eben die der Charakteristik ähnliche logarithmische Spirale. Diese Untersuchung aber wird illusorisch, wenn $a=\operatorname{arc}\cot\alpha$ ist. In diesem Falle hat man jedoch direct:

$$\sigma=\left(\frac{Al}{\sin a}+B\right)e^{l\cot a}.$$

Vertauscht man l mit $l+c$, B mit B_1, so kommt:

$$\sigma=\left(\frac{Al}{\sin a}+B_1+\frac{Ac}{\sin a}\right)e^{c\cot a}e^{l\cot a}.$$

Damit diese der ersteren ähnlich sei, muss:

$$B_1+\frac{Ac}{\sin a}=B$$

sein, und hier ist c immer reell. Also für den Schnittwinkel $\operatorname{arc}\cot\alpha$ sind alle Trajectorien einander ähnlich.

Dieselben Betrachtungen sind für die Evolvente zu machen. Setzt man in die Formel:

$$\sigma=\int s\,dl+Bl$$

den Werth:

$$s=Ae^{\alpha l},$$

so kommt:

$$\sigma=\frac{A}{\alpha}e^{\alpha l}+Bl,$$

und durch Aenderung von B ergeben

sich wieder zwei Klassen einander ähnlicher Evolventen, die positiven und negativen B entsprechen, und durch eine der Evolute ähnliche Curve von einander getrennt werden.

Es ist jetzt noch der Kreis zu untersuchen. Setzt man in die Formel für die Trajectorie:

$$s = Al,$$

so kommt:

$$\sigma = \frac{Be^{l\cot a} - Al}{\sin a}.$$

Vertauscht man B und l mit B_1 und $l+c$, so ergibt sich für die Congruenz (denn es war ja hier $k=1$):

$$B_1 e^{c\cot a} = B,$$

was wieder lehrt, dass B_1 und B gleiche Zeichen haben. Für $B=0$ ergibt sich ein Kreis, so dass das oben Gesagte auch für diesen Fall gilt.

Von den Evolventen eines Kreises haben wir schon oben gezeigt, dass sie alle congruent sind. Vergleicht man noch die Formeln:

$$\sigma = \frac{A}{\alpha} e^{\alpha l} + Bl,$$

und:

$$\sigma = \frac{Be^{l\cot a} - Al}{\sin a},$$

so ergibt sich:

„dass jede Trajectorie eines Kreises, seine Evolvente ausgenommen, zugleich Evolvente einer logarithmischen Spirale ist."

Die Trajectorie der logarithmischen Spirale, welche der Charakteristik congruent ist, hatte zur Gleichung:

$$\sigma = \frac{Ae^{\alpha l}}{\sin a(\alpha - \cot a)}.$$

Setzt man dies in die Gleichung:

$$r = \sin a \frac{d\sigma}{dl},$$

so kommt:

$$r = \frac{A\alpha e^{\alpha l}}{\alpha - \cot a}.$$

Für $r=0$ kommt:

$$l = -\infty.$$

Es geht also diese Curve durch den Punkt, um welchen sich die Charakteristik in verengten Windungen herumwickelt. Für die Evolvente gilt dasselbe. — Für die Kreistrajectorie war:

$$\sigma = -\frac{Al}{\sin a} \quad \text{für} \quad B=0,$$

also:

$$r = -A,$$

d. h.: Die Trajectorien schneiden von den Tangenten der Charakteristik gleiche Stücke ab.

4) Noch interessanter ist das Problem: „Zu finden, in welchem Falle eine Trajectorie und ihre Charakteristik ähnlich sind, der Fall der Evolvente und Evolute natürlich mit inbegriffen."

Es ist hier zu setzen:

$$s = \varphi(l), \quad \sigma = \alpha + k\varphi(\beta \pm l).$$

In die Formel:

$$s + A = \frac{d\sigma}{dl}\sin a - \sigma\cos a$$

setzen wir noch:

$$\frac{1}{m} \text{ für } k, \quad \frac{A}{m} \text{ für } A + \alpha\cos a,$$

$$\pm\beta - l \text{ für } l,$$

je nachdem in $\varphi(\beta \pm l)$ das obere oder Zeichen genommen wird. Dann hat man entweder:

$$1) \quad A + m\varphi(l-\beta) = \sin a\,\varphi'(l) - \cos a\,\varphi(l),$$

oder:

$$2) \quad A + m\varphi(\beta - l) = \sin a\,\varphi'(l) - \cos a\,\varphi(l).$$

$\varphi'(l)$ stellt den Differenzialquotienten von $\varphi(l)$ vor, für $m = \pm 1$ findet Congruenz statt, m, α, β, A sind reelle Zahlen. — Was zunächst die Gleichung 2) anbetrifft, so differenziiren wir dieselbe. Es kommt:

$$-m\varphi'(\beta - l) = \sin a\,\varphi''(l) - \cos a\,\varphi'(l),$$

und wenn man $\beta - l$ für l setzt:

$$-m\varphi'(l) = \sin a\,\varphi''(\beta - l) - \cos a\,\varphi'(\beta - l).$$

Nochmaliges Differenziiren der vorletzten Gleichung gibt:

$$m\varphi''(\beta - l) = \sin a\,\varphi'''(l) - \cos a\,\varphi''(l).$$

Aus diesen drei Gleichungen kann $\varphi'(\beta - l)$ und $\varphi''(\beta - l)$ eliminirt werden. Dies gibt:

$$\sin a^2\,\varphi'''(l) = (\cos a^2 - m^2)\,\varphi'(l).$$

Man erhält als allgemeines Integral dieser Gleichung:

$$\varphi(l) = C + C_1 e^{\alpha_1 l} + C_2 e^{-\alpha_1 l},$$

wo:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{(\cos a^2 - m^2)}}{\sin a}$$

zu setzen ist.

Jedoch ist dieser Ausdruck allgemeiner als die gegebene Function in Gleichung 2). Setzt man nämlich diesen Werth von $\varphi(l)$ in dieselbe, so kommt, wenn man nach Potenzen von $e^{\alpha_1 l}$ ordnet, und den Coefficienten jedes Gliedes einzeln verschwinden lässt:

$$C = -\frac{A}{m+\cos a}, \quad C_2 = C_1 \cdot \frac{\alpha_1 \sin a - \cos a}{m} e^{\alpha_1 \beta} = -\frac{m\, C_1\, e^{\alpha_1 \beta}}{\alpha_1 \sin a + \cos a}.$$

Die beiden Werthe von C_2 werden jedoch identisch, wenn man für α_1 seinen Werth setzt. Ist noch:

$$s = \varphi(l) - C,$$

was lediglich Coordinaten-Transformation entspricht, so kommt:

$$3) \qquad s = C_1 \left(e^{\alpha_1 l} + \frac{\alpha_1 \sin a - \cos a}{m} e^{\alpha_1 (\beta - l)}\right).$$

Dieser Ausdruck wird illusorisch, wenn $m = -\cos a$ ist. Für diesen Fall, und auch für $m = \cos a$, hat man jedoch:

$$\varphi'''(l) = 0,$$

also:

$$\varphi(l) = C\, l^2 + C_1\, l + C_2,$$

und wenn man dies in die Functionengleichung setzt, für den Fall, wo $m = -\cos a$ ist:

$$C = 0, \quad C_2 = \frac{C_1 (\sin a - \beta \cos a)}{\cos a}.$$

Die Curve ist also ein Kreis.

Illusorisch wird auch dies für $a = \frac{\pi}{2}$. Man erhält dann direct:

$$C_1 = 0,$$

was einem Punkte entspricht.

Ist noch $m = \cos a$, so wird:

$$C_1 = \frac{C(\sin a - \beta \cos a)}{\cos a} = \frac{A - c\,\beta^2 \cos a}{\sin a + \beta \cos a},$$

also:

$$C = \frac{A \cos a}{\sin a^2}, \quad C_1 = \frac{A \sin a - \beta \cos a)}{\sin a^2}.$$

Die Gleichung der Curve ist:

$$C = C\, l^2 + C_1\, l.$$

Man hat eine Kreisevolvente. Für $a = \frac{\pi}{2}$ aber ist:

$$\varphi'(l) = A, \quad s = A\, l,$$

also ein Kreis. Kreis und Kreisevolvente ausgeschlossen, gibt die Gleichung 3) das allgemeine Resultat.

Es sind nun die Fälle zu unterscheiden, wo, abgesehen vom Vorzeichen, m grösser oder kleiner als $\cos a$ ist. Im erstern Falle hat man:

$$\alpha_1 = p\, i, \quad m = \sqrt{(p^2 \sin a^2 + \cos a^2)}.$$

Setzen wir ferner:

$$D = \frac{C e^{\frac{\alpha_1 \beta}{2}}}{\sqrt{(\cos a + i p \sin a)}}, \quad l + \frac{\beta}{2} = l',$$

so kommt:

$$s = D\,[e^{ipl'}\sqrt{(\cos a + ip\sin a)} + e^{-ipl'}\sqrt{(\cos a - ip\sin a)}.$$

Sei ferner:

$$\cos a = m\cos\alpha,$$

also auch:

$$p\sin a = m\sin\alpha,$$

ferner:

$$l' - \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2p} = l,\quad C = 2D\sqrt{m}\; e^{\frac{\pi}{4}i},$$

so kommt:

$$s = C\cos pl,$$

also eine Epicycloide, Hypocycloide oder Cycloide, ein Resultat, was uns schon bekannt ist. Sei aber m kleiner als $\cos a$, und setzen wir:

$$m = \cos a\cos b,$$

so ist:

$$\alpha_1 = \cot a\sin b,\quad \frac{\alpha_1\sin a - \cos a}{m} = \frac{\sin b - 1}{\cos b}.$$

Je nachdem nun $\sin b - 1$ und $\cos b$ gleiche oder ungleiche Zeichen haben, nehmen wir:

$$e^{\alpha_1\beta}\,\frac{\sin b - 1}{\cos b} = \pm e^{2\alpha_1 g},\quad l - e = l',\quad D = C e^{\alpha_1 g},$$

und erhalten:

$$s = D\,(e^{\alpha_1 l} \pm e^{-\alpha_1 l}.$$

Da nun $\alpha_1 = \cot a\sin b$, also $\cot a$, abgesehen vom Vorzeichen, grösser als α_1 ist, so kann man, wenn ν grösser als a ist, setzen:

$$\alpha_1 = \cot\nu,$$

wo sich dann ergibt:

$$s = D\,(e^{l\cot\nu} \pm e^{-l\cot\nu}).$$

Die beiden hierin enthaltenen Curven wollen wir (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten) als imaginäre Cycloiden erster und zweiter Gattung bezeichnen. Sie haben somit die Eigenschaft, dass alle Linien, welche sie unter einem spitzen Winkel a, der kleiner als der spitze Winkel ν ist, schneiden, eine ähnliche Curve einhüllen. Für $a > \nu$ ist aber die Trajectorie nicht mehr der Charakteristik ähnlich.

Es ist $m = \cos a$, oder kleiner als $\cos a$, soll also $m = \pm 1$ sein, so muss $a = 0$ oder π werden, wo dann Trajectorie und Charakteristik zusammenfallen. Es ist also hier der Fall der Congruenz ausgeschlossen.

Wir müssen der Vollständigkeit wegen untersuchen, welche Curve von Graden eingehüllt wird, die unter einem Winkel a, der kleiner als ν ist, eine der beiden imaginären Cycloiden schneiden.

Setzt man die Gleichung der letztern in die Formel:

$$s + A = \frac{d\sigma}{dl}\sin a - \sigma\cos a,$$

so kommt:

$$s + A = \frac{D}{\cos\nu}\,[\sin(a-\nu)\,e^{l\cot\nu} \mp \sin(a+\nu)\,e^{-l\cot\nu}].$$

Setzen wir ferner:

$$\frac{D}{\cos\nu} = \frac{E}{R},\quad \sin(a-\nu) = \pm R\,e^{-k\cot\nu}\quad \sin(a+\nu) = Re^{k\cot\nu},$$

so ist:

$$\sin(a-\nu)\sin(a+\nu) = \pm R^2,$$

also das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem a grösser oder kleiner als ν ist. — Wenn noch $s + A$ mit s, $l - \cot\nu$ mit l vertauscht wird, so hat man für die Charakteristik der imaginären Cycloide erster Gattung:

$$s = E\left(e^{l \cot \nu} \mp e^{-l \cot \nu}\right),$$

und für die der Cycloide zweiter Gattung:

$$s = E\left(e^{l \cot \nu} \pm e^{-l \cot \nu}\right).$$

Das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem a grösser oder kleiner als ν ist. D. h.:

„Werden beide Curven unter einem Winkel, der grösser als ν ist, geschnitten, so ist die Charakteristik der ersten Curve der zweiten Curve ähnlich und umgekehrt. — Für $a = \nu$ erhält man aber:

$$s + A = \mp \frac{D}{\cos a} \sin 2a \, e^{-l \cot a},$$

d. h. für $a = \nu$ haben beide Cycloiden eine logarithmische Spirale als Charakteristik.

Wir wenden uns jetzt zur Gleichung 1), welche ein viel allgemeineres Resultat gibt. Setzt man in dieselbe:

$$\varphi(l) = f(l + k),$$

wo:

$$k = -\frac{A}{m + \cos a}$$

ist, so erhält man:

3) $m f(l - \beta) = \sin a \, f'(l) - \cos a \, f(l).$

Ausgeschlossen ist der Fall, wo:

$$m = -\cos a$$

ist. Dann setzen wir:

$$\varphi(l) = f(l) + k l.$$

Man erhält dann dieselbe Gleichung 3), und man hat:

$$k = \frac{A}{\sin a - \beta \cos a}.$$

Auch dies wird illusorisch, wenn ausserdem $\beta = \operatorname{tg} a$ ist, und man setzt dann:

$$\varphi(l) = f(l) + k l^2 + k_1 l.$$

Es ergibt sich wieder die Gleichung 3), und ausserdem:

$$k = \frac{A \cot a}{\sin a},$$

während k_1 unbestimmt bleibt.

Jedenfalls ist also Gleichung 3) zu integriren. Denken wir uns ν verschwindend klein, so ist:

$$f'(l) = \frac{f(l + \nu) - f(l)}{\nu}$$

zu setzen. Ausserdem kann man immer setzen:

$$-\beta = g \nu,$$

wo g als eine ganze positive ins Unendliche wachsende Zahl gedacht werden kann, wenn ν nöthigen Falls negativ genommen wird. Die Gleichung 3) hat nun die Form:

$$m \nu f(l + g\nu) = [f(l + \nu) - f(l)] \sin a - \nu f(l) \cos a.$$

Denkt man sich ν zunächst endlich, so besteht das Integral aus g Theilsätzen von der Form:

$$C_s e^{\alpha_s l},$$

und wenn man dies in die gegebene Gleichung einsetzt, so hat man zur Bestimmung α_s die Gleichung:

$$m \nu e^{\alpha g \nu} = \sin a (e^{\alpha \nu} - 1) - \nu \cos a,$$

also $e^{\alpha \nu}$ ist Wurzel einer Gleichung $g$ten Grades. Ist ν unendlich klein, so ist dieser Grad unendlich gross, und die Gleichung, die nun transcendent ist, hat die Form:

4) $m e^{-\alpha \beta} = \alpha \sin a - \cos a,$

während das allgemeine Integral die Form hat:

5) $f(l) = \Sigma C_s e^{\alpha_s l},$

wo die Summe auf alle Wurzeln α_s der Gleichung 4) geht, und C_s beliebige Constanten vorstellt.

Wir setzen noch:

$$-\alpha\beta = u, \quad \frac{\sin a}{\beta m} = B, \quad -\frac{\cos a}{m} = D,$$

Man hat dann:

4a) $e^u + B u = D,$

5a) $f(l) = \Sigma C_s e^{-\frac{u_s}{\beta} l}.$

Wir wollen zunächst untersuchen, welche reelle Wurzeln die Gleichung 4a) hat. Denken wir uns D veränderlich, so wird für $u = -\infty$, $D = \pm \infty$ werden, je nachdem B negativ oder positiv ist; für $u = +\infty$ aber wird $D = +\infty$ sein. Für alle andern Werthe bleibt D endlich und continuirlich. Untersuchen wir die etwaigen Maxima und Minima von B. Es ist:

$$\frac{dD}{du} = e^u + B.$$

Damit dies Null sei, muss $e^u = -B$ sein, was nur bei negativem B möglich ist. Für negatives B hat also D ein Minimum, und zwar ist für dasselbe:

$$u = \lg(-B).$$

Es geht dann D abnehmend von $+\infty$ bis zu dem Werthe:

$$D = -B[1 - \lg(-B)],$$

der dem Minimum entspricht. Dieser Werth ist positiv oder negativ, je nachdem $-B$ kleiner oder grösser als e ist. Ist B positiv, so wird dagegen D immer wachsen, und zwar von $-\infty$ bis $+\infty$.

Man hat also:

1) Bei positivem B für jedes gegebene D nur einen reellen Werth von u.

2) Bei negativem B für jedes D, das algebraisch grösser als $-B[1-\lg(-B)]$ ist, zwei reelle Werthe von u, der eine grösser, der andere kleiner als $\lg(-B)$. Jedem D, das algebraisch kleiner als $-B[1-\lg(-B)]$ ist, entspricht dagegen gar kein u. Nur für $D = -B[1-\lg(-B)]$ gibt es einen Werth von u, nämlich $u = \lg(-B)$, und zwar ist der zugehörige Werth positiv, negativ oder Null, je nachdem $-B$ grösser, kleiner als, oder gleich e ist.

Ist $a = \frac{\pi}{2}$, so hat man eine Evolvente. Dann ist $D = 0$, $B = \frac{1}{m\beta}$. Für $m = \cos a$ ist $D = 1$, $B = -\frac{\lg a}{\beta}$. Es bleibt also, wegen des willkürlichen β, B immer unbestimmt. Ist aber $m = -\cos a$, und ausserdem $\beta = \operatorname{tg} a$, so wird $D = 1$, $B = -1$. Es ist dann $\lg(-B) = 0$. Man hat dann nur ein reelles u, nämlich $u = 0$.

Untersuchen wir jetzt die imaginären Werthe von u. Wir setzen $u = v + wi$ Die Gleichung 4a) zerfällt dann in zwei andere:

$$e^v = -\frac{Bw}{\sin w}, \quad e^v \cos w + Bv = D,$$

oder wenn man den Werth von v aus der ersten Gleichung in die zweite setzt:

$$-Bw \cot w + B \lg\left(\frac{-Bw}{\sin w}\right) = D,$$

d. h. wenn:

$$K = -\frac{1}{B} e^{\frac{D}{B}}$$

gesetzt wird:

4 b) $$\frac{w}{\sin w} e^{-w \cot w} = K,$$

eine Gleichung, die unverändert bleibt, wenn man w mit $-w$ vertauscht. Man braucht also nur die positiven Wurzeln zu betrachten. Sei K veränderlich, und nehmen wir zuerst w unendlich klein, so wird:

$$\frac{w}{\sin w} = w \cot w = 1,$$

also:

$$K = \frac{1}{e}, \quad D = -B[1 - \lg(-B)].$$

Sei ferner:

$$w = s\pi - \nu,$$

wo s eine beliebige positive ganze Zahl, ν unendlich klein und positiv ist, so wird:

$$\cot w = -\infty,$$

$$\sin w = (-1)^{s-1}\nu,$$

$$K = (-1)^{s-1}\infty,$$

d. h. K ist am Ende jedes ungraden Halbkreises positiv unendlich, am Ende jedes graden negativ unendlich. Dagegen wird für $w = s\pi + \nu$:

$$\cot w = \frac{1}{\nu}, \quad \sin w = (-1)^s \nu,$$

$$K = \frac{(-1)^s s\pi}{e\, e^{\frac{s\pi}{\nu}} \cdot \nu} = (-1)^s \mu,$$

wo μ positiv und unendlich klein ist. Also am Ende jedes Halbkreises springt K von $\pm\infty$ nach Null mit verändertem Vorzeichen. Nur für $s = 0$ ist $K = \frac{1}{e}$, und da K für $w = \pm\nu$ seinen Werth nicht ändert, so findet hier ein Minimum statt. Im Laufe jedes Halbkreises aber bleibt K continuirlich.

Suchen wir jetzt die etwa noch vorhandenen Maxima und Minima.

Man hat:

$$\frac{dK}{dw} = \frac{e^{-w \cot w}}{\sin w}\left(1 - 2w \cot w + \frac{w^2}{\sin w^2}\right).$$

Damit dieser Ausdruck verschwinde, muss entweder:

$$w \cot w = \infty$$

sein, was nur an der Grenze der Halb-

kreise stattfindet, wo also Discontinuität herrscht, oder es muss sein:

$$w^2+\sin w^2=2w\sin w\cos w=w\sin 2w.$$

Ist w grösser als 1, so ist immer:

$$w^2+\sin w^2>w^2,\quad w\sin 2w<w^2,$$

also diese Gleichung unmöglich. Ist w kleiner als 1, so kann w nur im ersten Quadranten liegen. Die Gleichung hat aber auch die Form:

$$(w-\sin w)^2=2w\sin w(\cos w-1),$$

wo beide Seiten ungleiche Zeichen haben, also auch in diesem Falle die Gleichung unmöglich, wenn nicht $w=0$ ist, und hier findet das schon bekannte Minimum statt. K geht also in allen graden Halbkreisen fallend von 0 bis $-\infty$, in den ungraden wachsend, von 0 bis $+\infty$, mit Ausnahme des ersten, wo es von $\frac{1}{e}$ bis $+\infty$ geht. Ist also:

1) K negativ, d. h. B positiv, so liegt in jedem graden Halbkreise ein positiver Werth von w.

2) Ist K positiv, also B negativ, so liegt in jedem ungraden Halbkreise mit Ausnahme des ersten ein positiver Werth von w.

3) Ist K grösser als $\frac{1}{e}$, d. h. D kleiner als $-B\,[1-\lg(-B)]$, so gibt es auch einen positiven Werth von w im ersten Halbkreise. Dieser Fall findet also dann statt, wenn die Gleichung gar keine reellen Wurzeln hat.

Zu jedem positiven w gehört ein gleiches negatives. Nur für:

$$K=\frac{1}{e},\quad D=-B[1-\lg(-B)]$$

fallen die beiden im ersten Quadranten befindlichen Wurzeln zusammen, und geben $w=0$. Dies ist dann die einzige Wurzel, welche in diesem Falle stattfindet.

Es zerfällt also $f(l)$ in einen reellen und einen imaginären Theil, der erstere besteht aus Null, einem oder zwei Theilsätzen. Der imaginäre Theil hat immer unendlich viel Glieder von der Form:

$$\Sigma C e^{-(v+wi)\frac{l}{\beta}}.$$

Es war aber:

$$e^v=\frac{Bw}{\sin w}.$$

Sei:

$$-B=b,\quad \text{also}\quad b=\frac{-\sin a}{m\beta},$$

und nehme man zu jedem positiven w das entsprechende negative, so nimmt der imaginäre Theil die Form an:

$$\Sigma\left(\frac{\sin w}{bw}\right)^{\frac{l}{\beta}}\left\{a e^{\frac{wli}{\beta}}+C e^{-\frac{wli}{\beta}}\right\}.$$

Sei noch:

$$a+c=G,\quad i(a-c)=H,$$
$$\varphi(l)=f(l)+k=s,$$

so ist also die allgemeinste Lösung der Functionengleichung:

$$6)\quad s=C_1 e^{-u_1\frac{l}{\beta}}+C_2 e^{-u_2\frac{l}{\beta}}+\Sigma\left(\frac{\sin w}{bw}\right)^{\frac{l}{\beta}}\left\{G\cos\frac{wl}{\beta}+H\sin\frac{wl}{\beta}\right\}.$$

Es ist hier erforderlichen Falls einer der Ausdrücke C_1 und C_2, oder beide der Null gleich zu setzen. Die Summe aber besteht aus unendlich vielen Gliedern, die man natürlich auf eine beliebige Zahl reduciren kann, wenn man die entsprechenden G und H verschwinden lässt.

Ist $m=-\cos a$, so kommt zu s noch ein Glied kl hinzu, und ist ausserdem $\beta=\operatorname{tg} a$, so ist $kl^2+k_1 l$ hinzuzufügen.

Untersuchen wir jetzt einige specielle Fälle.

Möge zunächst die Gleichung zwei reelle Wurzeln haben. Nimmt man diese willkürlich an, so kann man B und D, also auch β und m bestimmen. Wegen:

$$e^{u_1}+Bu_1=D,\quad e^{u_2}+Bu_2=D$$

ist nämlich:

$$B=\frac{e^{u_1}-e^{u_2}}{u_2-u_1},\quad D=\frac{u_2 e^{u_1}-u_1 e^{u_2}}{u_2-u_1},$$

und daher:

$$\beta=\operatorname{tg} a\,\frac{u_1 e^{u_2}-u_2 e^{u_1}}{e^{u_1}-e^{u_2}},$$

$$m=\frac{\cos a\,(u_1-u_2)}{u_2 e^{u_1}-u_1 e^{u_2}}.$$

Nur wenn $m=-\cos a$ ist, findet zwischen u_1 und u_2 eine Bedingungsgleichung statt, und es dürfen dann nicht mehr beide willkürlich genommen werden. Die Auflösung wird illusorisch, wenn $a=\frac{\pi}{2}$ ist, da dann:

$$D=0,\quad B=\frac{1}{\beta m}$$

wird, also β und m sich nicht abgesondert berechnen lassen. Dann ist:

$$u_1 e^{u_1} - u_2 e^{u_2} = 0,$$

$$e^{u_2} = \frac{u_1}{u_2} e^{u_1}, \quad \beta m = B = -\frac{e^{u_1}}{u_1}.$$

In beiden letzten Fällen kann man also nur ein u willkürlich annehmen. Im allgemeinen Falle dagegen setzen wir:

$$-\frac{u_1}{\beta} = \gamma, \quad -\frac{u_2}{\beta} = \delta,$$

und man hat die particuläre Auflösung:

$$s = C_1 e^{\gamma l} + C_2 e^{\delta l}.$$

Von dieser Gleichung sind die beiden imaginären Cycloiden besondere Fälle. Sie enthält übrigens a nicht, und es kommen also unendlich viel ähnliche Charakteristiken, die jede einem andern Schnittwinkel entsprechen. Indess schliessen wir hieraus nicht, dass dies für alle Schnittwinkel stattfinde, da möglicherweise die Substitution, welche, um die Aehnlichkeit zu erweisen, gemacht werden muss, zu imaginären Beziehungen führen kann. Untersuchen wir also den Fall direct, und setzen in:

$$s = \frac{d\sigma}{dl} \sin a - \sigma \cos a$$

für σ den eben gefundenen Werth ein. Man erhält:

$$s = C_1 (\gamma \sin a - \cos a) e^{\gamma l} + C_2 (\delta \sin a - \cos a) e^{\delta l},$$

wenn $1 + \vartheta$ für l gesetzt wird:

$$s = C_1 e^{\gamma\vartheta} (\gamma \sin a - \cos a) e^{\gamma l} + C_2 e^{\delta\vartheta} (\delta \sin a - \cos a) e^{\delta l}.$$

Damit Aehnlichkeit stattfinde, muss sein:

$$e^{\gamma\vartheta} (\gamma \sin a - \cos a) = e^{\delta\vartheta} (\delta \sin a - \cos a),$$

d. h.:

$$\vartheta(\gamma - \vartheta) = \lg\left(\frac{\delta \sin a - \cos a}{\gamma \sin a - \cos a}\right),$$

ϑ ist reell, wenn $\delta \sin a - \cos a$ und $\gamma \sin a - \cos a$ dasselbe Zeichen haben, d. h. wenn $\delta \operatorname{tg} a$ und $\gamma \operatorname{tg} a$ gleichzeitig algebraisch grösser oder kleiner als 1 sind. Sind γ und δ positiv, und γ die grössere Zahl, so kann man: $\gamma = \cot \mu$, $\delta = \cot \nu$ und $\mu > \nu$ setzen. Dann ist:

$$\operatorname{tg} a > \operatorname{tg} \mu \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} a < \operatorname{tg} \nu,$$

d. h. damit Aehnlichkeit zwischen Trajectorie und Charakteristik stattfinde, muss der Schnittwinkel zwischen 0 und ν oder zwischen μ und π liegen. Sind γ und δ negativ, so kann man den Schnittwinkel in entgegengesetzter Richtung nehmen, also $-a$ für a schreiben. Sei dann $\gamma = -\cot \mu$, $\delta = -\cot \nu$, so hat man dieselben Ausdrücke wie oben, und die Folgerung ist die nämliche.

Ist jetzt γ positiv und δ negativ, so setzen wir $\gamma = \cot \mu$, $\delta = -\cot \nu$, dann wäre entweder:

$$-\operatorname{tg} a > \operatorname{tg} \nu, \quad \operatorname{tg} a > \operatorname{tg} \mu,$$

was beides nicht gleichzeitig stattfinden kann, oder:

$$-\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} \nu, \quad \operatorname{tg} a < \operatorname{tg} \mu,$$

d. h.:

$$a < \mu \quad \text{oder} \quad a > \pi - \nu.$$

Für die imaginären Cycloiden z. B. ist $\nu = \mu$, also $a < \mu$ oder $a > \pi - \mu$, wie dies schon früher gefunden wurde.

In allen Fällen aber, wo die Trajectorie nicht der Charakteristik ähnlich ist, kann man ϑ durch die Gleichung bestimmen:

$$e^{\gamma\vartheta} (\gamma \sin a - \cos a) + e^{\delta\vartheta} (\delta \sin a - \cos a) = 0,$$

wie sich leicht darthun lässt.

Man hat somit zwei Curven von der Form:

$$s = C_1 e^{\gamma l} + C_2 e^{\delta l},$$

$$s = C_1 e^{\gamma l} - C_2 e^{\delta l},$$

die sich leicht auf die Form bringen lassen:

$$s = C(e^{\gamma l} \pm e^{\delta l}),$$

davon ist eine immer Charakteristik der andern für Schnittwinkel, die keine ähnlichen Charakteristiken geben, wohl aber ist dann die eine Trajectorie immer der Charakteristik der andern ähnlich. Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn a auf den Grenzen ν oder μ liegt.

Seien γ und δ positiv. Im erstern Falle wird:

$$s = -\frac{C_1}{\sin \mu} \sin(\mu - \nu) e^{\gamma l},$$

im letztern:

$$s = \frac{C_2}{\sin \nu} \sin(\mu - \nu) e^{\delta l}.$$

Für negatives γ und δ erhält man entsprechende Resultate. Also in jedem

der beiden Fälle ist die Charakteristik eine logarithmische Spirale, und zu dieser Curve gehört dann ein System einander ähnlicher Trajectorien, wie sich leicht zeigen lässt. Für $\gamma=\delta$ hat man als Trajectorie eine logarithmische Spirale, die der Charakteristik ähnlich ist, wenn a ungleich μ ist. Ist $a=\mu$, so bildet aber die Charakteristik einen Punkt.

Nehmen wir jetzt an, dass γ und δ einander unendlich nahe liegen; es ist dies der Fall, wo $D=-B[1-\lg(-B)]$ ist, und setzen wir:

$$\delta=\gamma+\nu,\quad e^{\delta l}=e^{\gamma l}(1+\nu l),$$
$$C_1+C_2=A,\quad C_2\nu=B,$$

so kommt:

$$s=(A+Bl)e^{\gamma l},$$

woraus sich durch Transformation leicht bilden lässt:

$$s=Dl\,e^{\gamma l}.$$

Vertauschen wir s mit σ, und setzen in die Gleichung:

$$s=\frac{d\sigma}{dl}\sin a-\sigma\cos a$$

ein, so kommt:

$$s=D[(\gamma\sin a-\cos a)\,l+\sin a]\,e^{\gamma l}.$$

Setzen wir $l'+\vartheta$ für l, so muss im Falle der Aehnlichkeit sein:

$$\vartheta(\gamma\sin a-\cos a)+\sin a=0,$$

was immer möglich ist, was auch a sei. Hier sind also alle Charakteristiken mit Einschluss der Evolute der Trajectorie ähnlich. Nur wenn $\gamma=\cot a$, tritt eine Ausnahme ein, und dann ist die Charakteristik wieder eine logarithmische Spirale. — Sollen Trajectorie und Charakteristik in diesem Falle nicht blos ähnlich, sondern congruent sein, so muss man haben:

$$e^{\gamma\vartheta}(\gamma\sin a-\cos a)=\pm 1,$$

welche Gleichung mit:

$$\vartheta(\gamma\sin a-\cos a)+\sin a=0$$

zu verbinden ist.

Für den Fall, wo $a=\frac{\pi}{2}$, also die Evolvente der Evolute congruent ist, ergibt sich:

$$\gamma e^{\gamma\vartheta}=\pm 1,\quad \gamma\vartheta=-1,$$

also:

$$\gamma=\pm e,$$
$$s=Dl\,e^{\pm e\cdot l}.$$

Alle Gleichungen, auf welche die Betrachtung der reellen Wurzeln führt, sind also:

$$s=C(e^{\gamma l}\pm e^{\delta l}),\quad s=Ce^{\gamma l},$$
$$s=Dl\,e^{\gamma l},$$

und nach dem oben Gesagten sind alle drei Curven als Trajectorien der logarithmischen Spirale zu bezeichnen. Wir wollen aber auch zwei zusammengehörige imaginäre Wurzeln, die den Werthen w und $-w$ entsprechen, betrachten.

Wir setzen C, C_1 und alle H und A bis auf je eine dieser Constanten H_1 und A_1 der Null gleich. Sei ferner:

$$e^{\alpha}=\left(\frac{\sin w}{bw}\right)^{\frac{1}{\beta}},\quad \frac{w}{\beta}=\gamma,$$

$$H_1=G\operatorname{tg}\mu,\quad A_1=\frac{G}{\cos\mu}.$$

In diesem Falle ist:

$$s=Ae^{\alpha l}\cos(\gamma l+\mu).$$

Wir untersuchen ganz wie oben, welche Werthe a annehmen kann, damit Charakteristik und Trajectorie ähnlich bleiben. Man gelangt zu der Gleichung:

$$s=Ae^{\alpha l}[\cos(\gamma l+\mu)(\alpha\sin a-\cos a)$$
$$-\sin(\gamma l+\mu)\gamma\sin a],$$

und wenn man $l+\vartheta$ für l setzt, so kommt als Bedingung der Aehnlichkeit durch Vergleich der Factoren:

$$\sin(\gamma\vartheta)(\alpha\sin a-\cos a)$$
$$+\cos(\gamma\vartheta)\gamma\sin a=0,$$

d. h.:

$$\operatorname{tg}(\gamma\vartheta)=\frac{\gamma\sin a}{\cos a-\alpha\sin a},$$

woraus sich ϑ immer reell ergibt. Also die Charakteristik bleibt der Trajectorie für jedes a ähnlich, also auch für $a=\frac{\pi}{2}$. — Damit Congruenz stattfinde, kommt noch die zweite Bedingung hinzu:

$$e^{\alpha\vartheta}[\cos(\gamma\vartheta)(\alpha\sin a-\cos a)$$
$$-\sin(\gamma\vartheta)\gamma\sin a]=\pm 1,$$

woraus sich γ in transcendenter Form ergibt. Für $a=\frac{\pi}{2}$ geben diese Gleichungen:

$$\operatorname{tg}(\gamma\vartheta)=-\frac{\gamma}{\alpha}, \quad \cos(\gamma\vartheta)=\pm\alpha e^{\alpha\vartheta}.$$

Für $\gamma=0$ kommt die logarithmische Spirale wieder, für $\alpha=0$ die reellen Cycloiden.

Ist noch $m=-\cos a$, so kommt zu dem Ausdrucke für s ein Glied kl hinzu. Es ist dann $D=1$, also die Constante nicht der Art willkürlich, dass man zwei Wurzeln beliebig annehmen kann. Dies macht die beiden Lösungen, wo zwei reelle oder imaginäre Wurzeln gegeben waren, illusorisch. Dagegen ist eine der oben gefundenen Lösung $s=A\cos\alpha l$ ensprechende, also:

$$s=A\cos\alpha l+kl,$$

vorhanden. Bestimmen wir jedoch die Charakteristik, so kommt $\alpha=0$, also die Curve ist ein Kreis.

Man kann aber auch setzen:

$$s=Ale^{\alpha l}+kl.$$

Hier ist a ein Minimum, $D=1$, und hieraus ergibt sich:

$$B=-1,$$

da:

$$D=-B[1-\lg(-B)]$$

war, ferner $u=0$, $\alpha=0$, also wieder ein Kreis. Wird endlich:

$$s=Ae^{\alpha l}kl$$

gesetzt, so kommt:

$$s-k\sin a=Ae^{\alpha l}(\alpha\sin a-\cos a)$$
$$-kl\cos a.$$

Die Bedingung der Aehnlichkeit wird:

$$e^{-\alpha\vartheta}+\alpha\operatorname{tg}a=0.$$

Hier ist ϑ reell, wenn $1-\alpha\operatorname{tg}a$ positiv, also $\alpha\operatorname{tg}a<1$ ist.

α kann als positiv betrachtet werden, da man im entgegengesetzten Falle l mit $-l$ vertauschen kann. Ist also $\alpha=\cot\mu$, so ist:

$$a<\mu, \text{ oder } \frac{\pi}{2}<a<\pi.$$

Hat a keinen dieser Werthe, so stehen, wie leicht zu sehen, die beiden Curven:

$$s=Ae^{\alpha l}+kl, \text{ und: } s=Ae^{\alpha l}-kl$$

wieder in der Relation, dass die eine Curve der Charakteristik der andern ähnlich ist. Für $a=\frac{\pi}{2}$ erhält man die logarithmische Spirale, für $a=\mu$ den Kreis.

Ist noch $\beta=\operatorname{tg}a$, so kommt ein Glied kl^2 hinzu. Dies gibt jedoch nur Auflösungen, wo auf die Natur der Wurzeln der transcendenten Gleichung zurückzugehen ist, den Fall ausgenommen, wo alle C, G, H Null werden, und der die Kreisevolvente gibt.

Die Discussion der hier behandelten Curven wird übrigens in dem Artikel: Transformationscoordinaten gegeben.

Diese Betrachtungen lassen sich zum Theil auf doppelt gekrümmte Linien ausdehnen. Wir verweisen in Bezug auf diesen Gegenstand auf den Artikel: Schraubenlinie.

5) Es muss noch das von Johann Bernoulli zuerst gelöste Problem der reciproken Trajectorien angeführt werden. Dies besteht in folgender Aufgabe:

Es sind zwei einander congruente Curven symmetrisch so an einander gelegt, dass sie sich schneiden. Die eine wird parallel sich selbst fortgeschoben. Wie müssen die Curven beschaffen sein, damit die zweite in jeder so entstandenen Lage die erste unter constantem Winkel schneidet, also diese zur Trajectorie hat?

Legt man die Axe der y so, dass sie den Winkel beider ursprünglichen Curven, den wir mit a bezeichnen, halbirt, so sind die Gleichungen dieser Curven bezüglich von der Form:

$$y=f(x), \quad y=f(-x).$$

In irgend einer Verschiebung aber hat die zweite Curve die Gleichung:

$$y=f(-x)+\alpha,$$

wo α der Parameter ist.

Nun ist:

$$\lambda=l+a, \quad \operatorname{tg}l=f'(x), \quad \operatorname{tg}\lambda=-f'(-x),$$

also wenn wir $l=\varphi(x)$ setzen:

$$\operatorname{tg}\varphi(x)=f'(x),$$

und da:

$$\operatorname{tg}\lambda=-f'(-x)=\operatorname{tg}[-\varphi(-x)]$$

ist, so hat man:

$$\lambda=-\varphi(-x)+s\pi.$$

Es ist aber s gleich Null, wenn man annimmt, dass weder l noch λ grösser als zwei Rechte sein sollen.

Man hat also die Functionengleichung:

$$\varphi(x)+\varphi(-x)+a=0.$$

Diese Gleichung gibt leicht die Lösung:

$$\varphi(x) = u - \frac{a}{2},$$

wo u eine beliebige ungrade Function von x ist. Ferner:

$$f'(x) = \operatorname{tg}\left(u - \frac{a}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg} u \operatorname{tg}\frac{a}{2}}.$$

Ist u eine ungrade Function, so ist $\operatorname{tg} u$ eine solche. Man kann also setzen:

$$f'(x) = \frac{v-b}{1+bv}, \quad y = \int \frac{v-b}{1+bv}\, dx,$$

wo $b = \operatorname{tg}\frac{a}{2}$, v eine beliebige ungrade Function von x ist.

Man hat noch:

$$\frac{v-b}{1+bv} = \frac{1}{b} - \frac{\left(b+\frac{1}{b}\right)}{1+bv} = c + \frac{1+c^2}{c+v},$$

wo $c = \frac{1}{b}$ gesetzt ist, also:

$$y = cx - (1+c^2)\int \frac{dx}{c+v},$$

woraus sich unendlich viel Curven der bezeichneten Art ableiten lassen.

6) Ist eine Curvenschaar im Raume gegeben, welche also eine Oberfläche bilden, so kann man ebenfalls von ihrer Trajectorie sprechen. Die Gleichungen einer der Curven seien:

1) $f(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \varphi(x, y, z, \alpha) = 0.$

Durch Elimination von α lässt sich immer die Gleichung der Oberfläche finden, auf welcher alle diese Curven und also auch die Trajectorie liegen, für welche also noch eine Gleichung zu finden ist.

Seien die aus den beiden Gleichungen 1) gezogenen Werthe:

$$\frac{dx}{ds} = p, \quad \frac{dy}{ds} = q, \quad \frac{dz}{ds} = r,$$

wo:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ist; a der Schnittwinkel. Die Cosinus der Winkel, welche die Trajectorie mit den Axen macht, sind dann: $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, genommen aus den Gleichungen der Trajectorie, also nicht mit p, q, r zu verwechseln, und man hat:

2) $$\cos a = p\frac{dx}{ds} + q\frac{dy}{ds} + r\frac{dz}{ds}.$$

Aus dieser Gleichung und aus 1) wird α und etwa z eliminirt. Man hat dann die Differenzialgleichung der Trajectorie, welche mit der Gleichung der bereits bestimmten Oberfläche zu verbinden ist.

Liegen die Curven alle auf einer Kugel, so führt man sphärische Coordinaten ein.

Sei φ die Entfernung des zu bestimmenden Punktes vom Aequator, auf dem durch den Pol gehenden grössten Kreis (Meridian) gemessen, ϑ der Winkel dieses grössten Kreises mit einem Anfangsmeridian. Sei dann AB ein Curvenelement, O der Pol, also:

$$OA = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad OB = \frac{\pi}{2} - \varphi - d\varphi,$$

Winkel $AOB = d\vartheta$.

Sei Winkel $ABO = l$, $AB = ds$, so hat man:

$$\sin l = \cos\varphi \frac{d\vartheta}{ds},$$

und:

$$\cos ds = \sin\varphi \sin(\varphi + d\varphi) + \cos\varphi \cos(\varphi + d\varphi) \cos d\vartheta,$$

d. h.:

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos\varphi^2\, d\vartheta^2,$$

woraus sich dann auch ergibt:

$$\cos l = \frac{d\varphi}{ds}, \quad \operatorname{tg} l = \cos\varphi \frac{d\vartheta}{d\varphi}.$$

Sei jetzt λ der Winkel der Trajectorie mit dem Meridian, und $a = \lambda - l$ der constante Winkel zwischen der Trajectorie und den Curven, so ist also:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} l}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} l}.$$

Die Gleichung der Curven hat die Gestalt:

$$f(\varphi, \vartheta, \alpha) = 0,$$

wo α der Parameter ist. Daraus ergibt sich der Werth von:

$$\operatorname{tg} l = \cos\varphi \frac{d\vartheta}{d\varphi},$$

als Function von φ und α. Beziehen sich nun φ und ϑ auf die Trajectorie, so hat man:

$$\cos\varphi \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} l}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} l},$$

woraus mittels der gegebenen Gleichung nur noch α zu eliminiren ist.

Ein Beispiel bietet die loxodromische Linie, welche alle Meridiane unter gleichem Winkel schneidet.

Die Gleichung eines Meridians ist offenbar:

$$\vartheta = \alpha, \quad \operatorname{tg} l = 0,$$

also:

$$\cos\varphi \frac{d\vartheta}{d\varphi} = \operatorname{tg}\alpha$$

ist die Differenzialgleichung der gesuchten Linie. Man erhält durch Integration:

$$\vartheta = -\operatorname{tg}\alpha \lg\left(\frac{\cot\frac{\varphi}{2}}{A}\right),$$

$$\cot\frac{\varphi}{2} = Ae^{-\vartheta\cot\alpha}.$$

Die Constante A wird bestimmt, wenn man weiss, welches Stück φ_0 die Trajectorie vom Anfangsmeridian abschneidet. Man hat dann:

$$\vartheta = 0,$$

also:

$$\cot\frac{\varphi_0}{2} = A,$$

also:

$$\cot\frac{\varphi}{2} = \cot\frac{\varphi_0}{2}\, e^{-\vartheta\cot\alpha}.$$

Transcendente (Analysis).

Jede nicht algebraische Function, die sich mithin weder durch die vier Species noch durch Potenziren oder Wurzelausziehen ergibt. In neuerer Zeit nennt man wohl auch transcendente Function nur solche, die sich nicht durch die Auflösung algebraischer Gleichungen ergeben, mögen letztere nun zu Potenzwurzeln führen oder nicht. Ueber die Eintheilung der Transcendenten siehe den Artikel: Quantität (imaginäre).

Transformation (Analysis).

Gleichbedeutend mit Umwandlung oder Umformung, das Verfahren, aus einem gegebenen analytischen Ausdruck einen andern zu bilden, indem man für die darin enthaltenen Variablen andere einsetzt. Namentlich wichtig ist die lineare Transformation algebraischer Ausdrücke. (Vergleiche darüber den Artikel: Invariante.) Die Transformation der Parallel-Coordinaten ist ein besonderer Fall dieses Problems (siehe die Artikel: Coordinaten, und: Analytische Geometrie).

Transformationscoordinaten (Geometrie).

Der Verfasser gibt hier gewisse Betrachtungen, auf die in verschiedenen Artikeln dieses Wörterbuchs verwiesen ist, und die einen Gegenstand behandeln, der zur Erleichterung der Auflösung geometrischer Probleme oft sehr dienlich ist.

Wenn man sich nämlich bei der Behandlung geometrischer Probleme analytischer Methoden und somit eines Coordinatensystems bedient, so ist man genöthigt, in die Behandlung des Problems ein von der im Allgemeinen zufälligen Wahl des letzteren herrührendes Element mit aufzunehmen, welches die ganze Ausführung und alle darin vorkommenden Formeln mit einem dem Problem fremden Rechnungsmaterial belasten, welches zuletzt wieder eliminirt werden muss. Namentlich ist dies bei solchen Problemen der Fall, wo Coordinaten-Transformationen vorzunehmen sind, wo dann die Transformationsformeln eine grosse Menge Rechnung, die in anderer Weise vermieden werden könnte, erfordern. — Solche Probleme haben den Verfasser veranlasst, dasjenige Coordinatensystem aufzusuchen, bei welchem die Transformationsformeln möglichst einfach sind. Es bezieht sich auf einfach und doppelt gekrümmte Linien. Sprechen wir jedoch zunächst von den ersteren.

Sei $A\,A_1\,A_2$ (Fig. 6) ein beliebiger Curvenbogen, U ein Punkt auf demselben. Durch A legt man die feste Grade AM in beliebiger Richtung, durch U die Tangente UV, sei Winkel $UVM = l$, Bogen $UA = s$. Diese Grössen s und l, „Bogenlänge und Tangentenwinkel", sind unsere Coordinaten. Die Gleichung $f(l, s) = 0$ bestimmt die Curve.

Die Transformation dieser Coordinaten kann nur darin bestehen, dass man statt A den Punkt A_1 und statt AM die Grade A_1M_1 nimmt. Sei Winkel $A_1M_1A = \alpha$, und Bogen $A\,A_1 = \beta$, Winkel $UV_1M_1 = l_1$, $UA_1 = s_1$, so ist:

$$l_1 = l - \alpha, \quad s_1 = s - \beta.$$

Nimmt man aber statt A_1 den Punkt A_2 auf der andern Seite von U, und zählt die Bogen und Winkel in umgekehrter Richtung, so ist, wenn man A_2M_2 durch A_2 legt:

$$\text{Winkel } A_2M_2A = \pi - \alpha, \quad AA_2 = \beta,$$

$$A_2U_2 = s_2 = \beta - s,$$

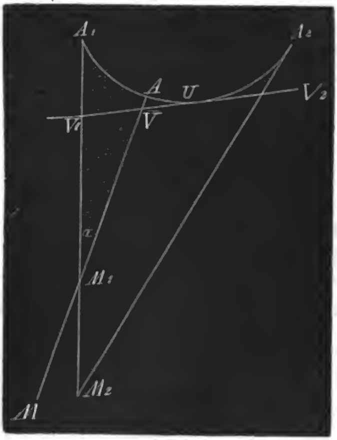
$$\text{Winkel } UV_2M_2 = l_2 = \alpha - l.$$

Also sind l', s' die transformirten Coordinaten, a, b Constanten, so sind die Transformationsformeln:

$$l' = a \pm l, \quad s' = b \pm s,$$

also in der That die möglichst einfachen.

Fig. 6.



Die Beziehung der Transformationscoordinaten zu den rechtwinkligen ist einfach. Die Linie AM sei Axe der Y, so hat man:

$$\operatorname{tg} l = \frac{dx}{dy}, \quad ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Ist y als Function von x gegeben, so kann man x mittels dieser Gleichungen eliminiren, und hat s als Function von l. Ist die Gleichnng zwischen s und l gegeben, so hat man:

$$dx = \sin l\, ds, \quad dy = \cos l\, ds,$$

und erhält, wenn man s eliminirt, die zwischen x und y. — Aus diesen Formeln oder aus bekannten Eigenschaften der in Rede stehenden Curven erhält man ihre Gleichnngen in Transformationscoordinaten leicht. Es ist:

1) Für die grade Linie:

$$l = a.$$

2) Für den Kreis mit Radius r:

$$s = r\, l.$$

3) Für die Hypocycloide, wenn der Erzeugungskreis den Radius r, der feste den Radius R hat:

$$s = \frac{4r}{R}(R-r)\cos\frac{R}{R-2r}\, l.$$

Schreibt man $-r$ für r, so hat man die Epicycloide, für $R=\infty$ hat man die Cycloide. Es ist also für letztere:

$$s = 4r\cos l.$$

Die Gleichung:

$$s = A\cos\alpha\, l,$$

oder:

$$s = A\sin\alpha\, l,$$

wo l für $\frac{\pi}{2\alpha} - l$ geschrieben ist, stellt also jedenfalls eine der allgemeineren Cycloiden vor (vergleiche den Artikel: Radlinie).

Schreiben wir αi für α, so kommt:

$$s = B(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}),$$

und:

$$s = B(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}).$$

Diese Curven, welche in dem Artikel: Trajectorie betrachtet sind, und welche die Eigenschaft haben, ihrer Charakteristik ähnlich zu sein, bezeichnen wir als imaginäre Cycloiden erster und zweiter Gattung.

4) Für die logarithmische Spirale ist:

$$s = A e^{\alpha l}.$$

5) Für die Kettenlinie:

$$s = A\operatorname{tg} l.$$

Untersuchen wir z. B., welche Form die Gleichungen zweier congruenten Curven haben. Seien dieselben:

$$s=\varphi(l), \quad \text{und} \quad s=\psi(l),$$

jede derselben muss dann durch Coordinaten-Transformation in die andere übergehen. Sei:

$$s=\alpha \pm s, \quad l'=\beta \pm l,$$

so ist also identisch:

$$s=\psi(l) \quad \text{und} \quad s'=\varphi(l'),$$

d. h.:

$$\psi(l)=\alpha \pm \varphi(\beta \pm l),$$

welches die verlangte Bedingung ist.

Sei nun $s=f(l)$ die Gleichung einer dritten Curve, die den beiden ersteren ähnlich ist. Man kann dann annehmen, dass sie mit der zweiten auch ähnlich liege. Es müssen dann zu gleichen Winkeln l, proportionale Bogen s gehören, und somit ist:

$$f(l)=k\psi(l),$$

oder wenn wir für $\psi(l)$ seinen Werth setzen, $k\alpha$ mit α und $\pm k$ mit k vertauschen:

$$f(l)=\alpha+k\varphi(\beta \pm l).$$

Dies ist die Aehnlichkeitsbedingung zwischen den beiden Curven:

$$s=f(l), \quad s=\varphi(l).$$

k ist die Proportionalzahl, und wenn $k=\pm 1$ ist, findet Congruenz statt.

Die Constanten α und β bestimmen die Lage der Curven zu einander.

Um eine einfache Anwendung zu geben, suchen wir diejenige Curve, in welcher sich zu jedem gegebenen Bogen eine andere ähnliche finden lässt.

Die Functionen $f(l)$ und $\varphi(l)$ sind hier zu identificiren, und man hat also die Bedingung:

$$\varphi(l)=\alpha+k\varphi(\beta \pm l).$$

Setzen wir zunächst das positive Zeichen voraus, so sei:

$$\varphi(l)=f(l)+c,$$

also:

$$f(l)=kf(\beta+l),$$

wo $c=\frac{\alpha}{1-k}$ ist. Die Auflösung ist bekanntlich:

$$f(l)=\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\beta}}F,$$

wo F eine sonst beliebige Function von l mit Periode β, also auch eine Constante sein kann.

Setzt man:

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{\beta}}=A,$$

so ist A wegen des beliebigen β von k unabhängig, also:

$$s=FA^{l}$$

die verlangte Gleichung. Ist F constant, so hat man eine logarithmische Spirale, und da β und k ganz ausfallen, so lässt sich für jeden Bogen ein ähnlicher von beliebiger Grösse finden. Es sind also 2 logarithmische Spiralen für jede Verhältnisszahl ähnlich, und somit auch congruent. Ist F aber periodisch, so bestimmt die Periode β auch k, wenn A gegeben ist; jedem Bogen entspricht dann nur ein ähnlicher von bestimmtem Verhältniss.

Sei z. B.:

$$F=\sin\alpha l,$$

so ist:

$$\beta=\frac{2\pi}{\alpha}, \quad k=A^{-\frac{2\pi}{\alpha}};$$

also auf der Curve, deren Gleichung ist:

$$s=A^{l}\sin\alpha l$$

lässt sich zu jedem Bogen ein ähnlicher und $A^{-\frac{2\pi}{\alpha}}$ mal so grosser finden. Für $k=1$ wird wegen $c=\frac{\alpha}{1-k}$ diese Betrachtung illusorisch. Dann ist:

$$\varphi(l)=\alpha+\varphi(\beta+l).$$

Diese Gleichung zeigt Congruenz an. Wir setzen:

$$\varphi(l)=f(l)+bl,$$

und erhalten:

$$b=-\frac{\alpha}{\beta}, \quad f(\beta+l)=f(l).$$

f kann also jede Function mit Periode β sein, und es ist:

$$s=f+bl.$$

Für constantes F hat man den Kreis. Sei jetzt aber:

$$\varphi(l)=\alpha+k\varphi(\beta-l),$$

so schreibe man $\beta-l$ für l, und es ist:

$$\varphi(\beta-l)=\alpha+k\varphi(l).$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\varphi(l)=\frac{\alpha}{1-k},$$

was einen Punkt vorstellt. Nur für $k=1$ wird dies illusorisch; dann aber ist offenbar:

$$\varphi(l)=2\alpha+\varphi(l),$$

d. h. $\alpha=0$, und es kommt:

$$\varphi(l)=\varphi(\beta-l).$$

Setzen wir:

$l+\frac{\beta}{2}$ für l, und $\psi(l)$ für $\varphi\left(l+\frac{\beta}{2}\right)$,

so kommt:

$$\psi(l)=\psi(-l).$$

Die Curve hat die Gleichung:

$$s=\psi(l),$$

wo ψ eine sonst beliebige grade Function von l ist.

Andere Anwendungen gibt der Artikel: Trajectorie.

Namentlich aber ist es von Interesse, aus der Gleichung in Transformationscoordinaten die Gestalt und die singulären Punkte der betreffenden Curve ermitteln zu können. Für diese Discussion bieten sich folgende Grundlagen.

So lange s mit wachsendem l immer zu- oder immer abnimmt, findet die Krümmung der Curve offenbar in demselben Sinne statt, es muss also, falls dies geschieht, $\frac{ds}{dl}$ dasselbe Zeichen haben. Wenn sich der Sinn der Krümmung ändern soll, ist also $\frac{ds}{dl}=0$, und diese Gleichung zeigt an, dass die Tangente ihre Richtung ändert, also eine Spitze eintritt. Denkt man sich aber s immer zunehmend, und es ändert l sein Zeichen, es wird also $\frac{dl}{ds}=0$, so werden zwei einander unendlich nahe Werthe von l gleich, man hat einen Wendepunkt. So lange nun weder $\frac{ds}{dl}$ noch $\frac{dl}{ds}$ verschwindet, bildet die Curve entweder 1) eine geschlossene Linie, oder 2) eine sich erweiternde, oder 3) eine sich verengende Spirale, oder 4) eine Schleife. Damit das Letztere eintrete, muss entweder der Krümmungsradius $\frac{ds}{dl}$ vom Abnehmen ins Zunehmen und umgekehrt übergehen, da sonst fortwährendes Verengen oder Erweitern stattfindet. Es muss also einmal $\frac{d^2s}{dl^2}$ verschwinden. — Jedoch ist nicht immer umgekehrt, wenn dies geschieht, eine Schleife da. Also nur indem man der Gleichung gemäss die Tangentenschaar der Curve wirklich zeichnet, kann man sich über das Vorhandensein einer Schleife Gewissheit verschaffen.

Der zweite Fall bedingt, dass der Krümmungsradius immer zunimmt, d. h. dass $\frac{ds}{dl}$ und $\frac{d^2s}{dl^2}$ immer gleiche Zeichen haben. Im dritten Falle müssen diese Zeichen verschieden sein.

Der erste Fall aber tritt ein, wenn $\frac{ds}{dl}$ gleich wird für jede zwei Werthe, die sich um 2π unterscheiden. Es ist also $\frac{ds}{dl}$ entweder constant, also die Curve ein Kreis, oder es hat $\frac{ds}{dl}$ die Periode 2π, in welchem Falle, Continuität vorausgesetzt, $\frac{d^2s}{dl^2}$ einmal verschwinden muss.

Wir wollen diese Betrachtungen auf einige Curven, die in dem Artikel Trajectorie vorkommen, anwenden.

Zunächst betrachten wir die beiden imaginären Cycloiden, deren Gleichungen sind:

$$1)\qquad s=A\,(e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}),$$

$$s'=A\,(e^{\alpha l}-e^{-\alpha l}).$$

Seien A und α positiv. — Wenn l positiv oder negativ ist, bleibt s positiv, dagegen hat s' mit l gleiches Zeichen.

Für $l=0$ ist $s=a$, $s'=0$,

Für $l=\infty$ ist $s=s'=\infty$.

Die letzte Curve berührt die Axe der Y, die erste nicht. Ferner ist offenbar:

$$\frac{ds}{dl}=\alpha s',\quad \frac{ds'}{dl}=\alpha s.$$

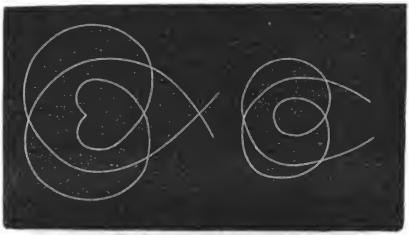
Es wird $\frac{ds'}{dl}$ nie verschwinden, dagegen $\frac{ds}{dl}$ für $l=0$. Es hat also die erste Curve eine Spitze. Ferner ist:

$$\frac{d^2s}{dl^2}=\alpha^2 s,\quad \frac{d^2s'}{dl^2}=\alpha^2 s'.$$

Bei positivem l haben daher $\frac{ds}{dl}$ und $\frac{d^2s}{dl^2}$ ebenso wie $\frac{ds'}{dl}$ und $\frac{d^2s'}{dl^2}$ und $\frac{d^2s'}{dl^2}$ bezüglich dasselbe Zeichen. Beide bilden also für positives l sich erweiternde Spiralen.

Für negatives l geben beide Curven Theile, die denen für positives l con-

Fig. 7.



gruent sind. Also beide Curven bilden je zwei mit entgegengesetzten Windungen durch einander gehende Spiralen, die bei der ersten Curve in eine Spitze zusammenlaufen, bei der zweiten aber nicht (Fig. 7).

Eine andere Curve, die ihrer Evolute, bezüglich Charakteristik ähnlich ist, hat zur Gleichung:

$$s = A l e^{\alpha l}.$$

Seien A und α positiv; dann haben l und s stets gleiche Zeichen. Für $l=0$ ist $s=0$, für $l=+\infty$: $s=+\infty$, für $l=-\infty$: $s=0$.

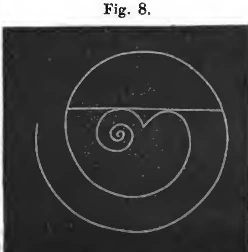
$$\frac{ds}{dl} = A(\alpha l + 1) e^{\alpha l}.$$

Für $l = -\frac{1}{\alpha}$ ist der Krümmungsradius gleich Null, also auf der Seite der negativen Krümmung findet sich eine Spitze. — Es ist:

$$\frac{d^2 s}{dl^2} = A\alpha(\alpha l + 2) e^{\alpha l},$$

ein Ausdruck, der negativ ist von

Fig. 8.



$l = -\frac{2}{\alpha}$ bis $l = -\infty$, sonst positiv. Zwischen $l = -\frac{1}{\alpha}$ bis $l = -\frac{2}{\alpha}$ haben also $\frac{ds}{dl}$ und $\frac{d^2 l}{dl^2}$ entgegengesetzte Zeichen. Ist α angemessen gross, so entsteht eine Schleife. Die Curve bildet eine sich erweiternde Spirale von $l = -\frac{1}{\alpha}$ bis $l = +\infty$; eine sich verengende von $l = -\frac{1}{\alpha}$ bis $l = -\infty$. Da $s = 0$ für $l = -\infty$, so windet sich der letztere Theil um einen festen Punkt. Das Stück vom Berührungspunkt mit der Axe der Y bis zur Spitze aber ist gleich der ganzen sich verengenden Spirale von der Spitze an (Fig. 8).

Schliesslich discutiren wir noch die Gleichung:

$$s = A e^{\alpha l} + kl.$$

Sind A, α und k positiv, so ist $s = \pm\infty$, wenn bezüglich $l = \pm\infty$ ist.

$$\frac{ds}{dl} = A\alpha e^{\alpha l} + k,$$

$$\frac{d^2 s}{dl^2} = A\alpha^2 e^{\alpha l}.$$

Beide Ausdrücke bleiben positiv. Die Curve bildet eine sich erweiternde Spirale. Der Bogen von l bis $-\infty$ bis $l=0$ ist aber unendlich gross, d. h. die Curve verdichtet sich, je enger die Windungen werden, immer mehr bis ins Unendliche.

Ist aber k negativ, also schreiben wir $-k$ dafür, während A und α positiv sind, so ist für $l = \pm\infty$ immer $s = +\infty$, $\frac{ds}{dl} = A\alpha e^{\alpha l} - k$. Es findet also für

Fig. 9.



$l = \frac{1}{\alpha} \lg \frac{k}{\alpha A}$ eine Spitze statt. $\frac{d^2 s}{d l^2}$ bleibt positiv. Von der Spitze bis zu $l = -\infty$ hat man eine sich erweiternde Spirale, und von der Spitze bis $l = +\infty$ eine ebensolche, jedoch entgegengesetzt gerichtete. Der positive Theil hat indess grössere Windungen als der negative (Fig. 9).

Was die Ausdehnung der Transformationscoordinaten auf Linien doppelter Krümmung betrifft, so enthält der Artikel: Schraubenlinie hierüber das Wesentlichste. Wir bemerken hier also nur, dass diese Coordinaten sind: 1) die Bogenlänge s von einem festen Punkt an, 2) das Integral $l = \int dl$, was die Summe der unendlich kleinen Winkel ausdrückt, welche je zwei nächste Tangenten von einem festen Punkt an machen, 3) das Integral $m = \int dm$, vorstellend die Summe der unendlich kleinen Winkel je zweier unendlich naher Krümmungsebenen. Der Uebergang zwischen rechtwinkligen und Transformationscoordinaten ist dann gegeben durch die bekannten Formeln:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

$$\left(\frac{dl}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{dm}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\left(A\frac{ds}{dl}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(B\frac{ds}{dl}\right)}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\left(C\frac{ds}{dl}\right)}{ds}\right)^2,$$

wo zu setzen ist:

$$A = \frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2},$$

$$B = \frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2},$$

$$C = \frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Transversale (Geometrie).

Eine Linie, welche ein System von andern Linien in der Ebene oder im Raum durchschneidet.

Die Theorie der Transversalen macht einen bedeutenden Theil der höheren Geometrie aus. Man vergleiche darüber die Artikel: Geometrie der Lage, und: Geometrie (neuere).

Transversalschwingungen (Wellenlehre).

Schwingungen, die auf der Richtung des Strahls (siehe den Artikel: Strahl) senkrecht stehen, im Gegensatze zu den Longitudinalschwingungen, welche dem Strahl parallel sind.

Trapez (Geometrie).

Ein Viereck mit zwei parallelen Seiten. Sind a und b die parallelen Seiten, h die Höhe, so ist der Flächeninhalt gleich $\frac{h(a+b)}{2}$.

In älteren Büchern heisst Trapez jedes Viereck, welches kein Parallelogramm ist; dies wird ab und zu wohl auch Trapezoid genannt.

Treibcylinder (Hydraulik).

Derjenige Raum einer Wassersäulenmaschine, von wo aus das Wasser zur Wirkung gelangt.

Treibetonne (Maschinenlehre).

Das Gefäss, in welchem mittels einer Göpelvorrichtung die Last aus einem Schachte emporgefördert wird.

Treibrad (Maschinenlehre).

Bei einem Räderwerke dasjenige Rad, an welchem die Kraft wirkt.

Treppenrost (Maschinenlehre).

Einrichtung zum rauchlosen Verbrennen bei Dampferzeugern. Statt der Roststäbe sind hier 8 Zoll breite Eisenplatten in Abständen von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll stufenförmig über einander gelagert.

Tretrad (Maschinenlehre).

Im Allgemeinen ein Rad, welches durch die Kraft eines aufsteigenden Menschen in Bewegung gesetzt wird. Man unterscheidet:

1) Das Tretrad im engeren Sinne, wo der Arbeiter auf der äussern Peripherie heraufsteigt. Es ist zu dem Ende mit Staffeln versehen, und der Arbeiter befindet sich immer weniger als 90° vom höchsten Punkte entfernt.

2) Das Laufrad, wo der Arbeiter auf der innern Peripherie aufsteigt. Dies geschieht auf Latten, mit denen das Rad beschlagen ist, und die Entfernung des Arbeiters ist weniger als 90° vom tiefsten Punkte.

3) Das Sprossenrad. Es hat statt der Staffeln durchgesteckte Bolzen, an die sich der Arbeiter anhält. Er befindet sich 90° vom höchsten Punkte, also in der verticalen Tangente.

Ist allgemein α der spitze oder rechte Winkel, um den der Arbeiter von der Spitze oder dem Boden des Rades entfernt ist, r der Radhalbmesser, G das Gewicht des Arbeiters, so kommt zur Geltung die auf dem Radhalbmesser senkrechte Componente $G \sin \alpha$, also das statische Moment $Gr \sin \alpha$, so dass also beim Sprossenrad die Wirkung am grössten ist.

Dagegen ist aber die Anstrengung zum Aufsteigen beim Sprossenrade gleich G, da dies vertical geschieht, beim Tret- oder Laufrad entspricht sie dem Aufsteigen auf eine durch die Tangente gelegte schiefe Ebene, und ist gleich $G \sin \alpha$, so dass im Grunde die Arbeit dieser Räder gleich ist, und dieselbe wie bei Winden und Haspeln. Indess kann erfahrungsmässig ein Mensch an den Treträdern mehr wie an letztern leisten. Man nimmt an, dass ein Mensch bei 8 Stunden Arbeit und 128 Pfund Gewicht, sowie 0,48 Fuss Geschwindigkeit am Sprossenrade, aber mit $25\frac{3}{5}$ Pfund Kraft und $2\frac{1}{2}$ Fuss Geschwindigkeit unter 24° vom höchsten oder tiefsten Punkte am Tret- und Laufrade arbeitet. Im ersten Falle ist die tägliche Leistung 1769000, im letztern 1663000 Fusspfunde.

Jedoch geht ein Theil der Arbeit durch Zapfenreibung verloren. Sind n Arbeiter thätig, G das Gewicht eines jeden, G_1 das der Maschine, Q die vertical wirkende Last, so ist der Zapfendruck $nG+G_1+Q$, also wenn ϱ der Zapfenhalbmesser, μ der Reibungscoefficient ist, die Zapfenreibung gleich:

$$\mu(nG+G_1+Q)\varrho,$$

also:

$$nGr\sin\alpha = Qb+\mu(nG+G_1+Q)\varrho,$$

wenn die Last am Arme b wirkt.

Tretscheibe (Maschinenlehre).

Eine schief stehende Scheibe, auf der ein Thier nahe der Peripherie fortschreitet, und ähnlich wie ein Mensch am Tretrade wirkt. Die Axe der Welle, um die sich das Rad dreht, macht einen Winkel von 20 bis 25 Grad mit der Richtung der Schwere. Die Scheibe ist mit radicalen Latten beschlagen; sie sitzt winkelrecht auf der Welle und macht daher einen Winkel von 20 bis 25° mit dem Horizont. Ist dieser Winkel gleich α, hat das Thier das Gewicht G und befindet es sich in der Entfernung r von der Wellenaxe, so hat man das Umdrehungsmoment $Gr\sin\alpha$. Die Last Q befinde sich am Arm b, sei G_1 das Gewicht der Maschine, ϱ der Zapfenhalbmesser, μ der Reibungscoefficient, so sind die statischen Momente der Reibung an der Basis und der Seitenreibung bezüglich:

$$\tfrac{2}{3}\mu(G+G_1)\cos\alpha\,\varrho,$$

$$\mu[(G+G_1)\sin\alpha+Q]\varrho.$$

(Vergleiche den Artikel: Reibung.) Man hat also:

$$Gr\sin\alpha = Q(b+\mu\varrho)+\mu(G+G_1)(\tfrac{2}{3}\cos\alpha + \sin\alpha)\varrho.$$

Das von der Componente $G\cos\alpha$ herrührende Kräftepaar ist hier vernachlässigt.

Triangel (Geometrie).

Siehe Dreieck.

Triangularzahl (Arithmetik).

Die Zahlen, welche entstehen, wenn man die Summe von 1, 2, 3 . . . Gliedern einer arithmetischen Reihe bildet. Gewöhnlich hat letztere die Differenz 1. Also ist die Reihe: 1, 2, 3, 4, 5 . . ., so sind die Triangularzahlen: 1, 3, 6, 10, 15 . . .

Triangulirung (Geodäsie).

Die Theilung einer zu messenden Fläche in Dreiecke, die je nach der Grösse der aufzunehmenden Fläche als eben, spärisch oder sphäroidisch zu betrachten sind. Die Ausmessung des Dreiecksnetzes kommt, wie leicht zu sehen, mit Ausnahme einer einzigen Standlinie nur auf Winkel zurück, jedoch muss der Controlle wegen, namentlich bei grösseren Triangulirungen, wenigstens noch eine Linie direct gemessen werden.

Triebaxe (Maschinenlehre).

Bei Dampfwagen diejenige Wagenaxe, welche durch die Trieb- oder Kurbelstange herumgedreht wird.

Triebstange, Kurbelstange (Maschinenlehre).

Bei Dampfwagen diejenige einfache oder gabelförmige Stange, welche die Dampfkraft vom Kolben auf die Triebaxe überträgt.

Triebröhre (Maschinenlehre).

Bei atmosphärischen Eisenbahnen die Röhre, in welcher die Luft zu verdünnen ist, um mittels des Luftdruckunterschiedes den Zug in Bewegung zu setzen.

Triebstock (Maschinenlehre).

Die cylindrisch oder conisch geformten Zähne eines Trilling (vergleiche den Artikel: Rad).

Trigonometrie.

1) Allgemeines.

Die Trigonometrie lehrt, aus drei Stücken eines Dreiecks, Seiten oder Winkel, deren Zahlenwerthe gegeben sind, die übrigen durch Rechnung zu finden.

In der Regel theilt man sie in ebene und sphärische Trigonometrie. Die erstere enthält die Berechnung der ebenen Dreiecke, die letztere diejenige der von grössten Kreisen auf der Kugel gebildeten.

Man verbindet hiermit zuweilen die sphäroidische Trigonometrie, welche die Berechnung der von kürzesten Linien auf dem zweiaxigen Ellipsoid gebildeten Dreiecke lehrt, und die für die höhere Geodäsie wichtig ist.

Die Möglichkeit, aus drei Stücken eines Dreiecks die übrigen berechnen zu können, lehrt die Congruenz der Dreiecke.

Die Ausführung lässt sich aber nicht durch algebraische Betrachtungen leisten, da die Winkel und Seiten eines Dreiecks in einer im Allgemeinen transcendenten Beziehung stehen.

Zweck der Trigonometrie im eigentlichen Sinne ist es nicht eigentlich, diese Beziehung zu ermitteln. Dies geschieht in der sogenannten analytischen Trigonometrie. Es kommt zunächst nur darauf an, die hier erforderlichen Transcendenten auf eine möglichst geringe Anzahl zurückzuführen, deren Kenntniss und namentlich deren Berechnung in Tafeln man voraussetzt. (Die Artikel: Reihen, sowie: Tafeln geben hierzu die nöthige Anleitung.)

Dazu sind nun folgende Betrachtungen nöthig. Alle gradlinigen Dreiecke lassen sich in rechtwinklige zerlegen. Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aber sind gegeben, wenn man die eines andern Dreiecks mit gleichen Winkeln kennt, und wo eine Seite beliebig, also z. B. gleich der Einheit ist. Da das gesuchte Dreieck dem letztern ähnlich ist, so lassen sich die Seiten des letztern, wenn eine gegeben ist, nämlich sogleich finden. Nehmen wir an, die Hypotenuse sei gleich der Einheit, so ist offenbar das Dreieck bestimmt, wenn man noch einen spitzen Winkel α kennt. Zwischen den Katheten a und b aber findet dann noch die Beziehung $a^2+b^2=1$ gemäss dem Pythagoräischen Satze statt. Also eine Seite des Dreiecks, z. B. die an α anliegende, ist gegeben, wenn man die andere kennt.

Die Transcendenten, welche in der ebenen Trigonometrie erforderlich sind, beschränken sich also auf die dem Winkel α gegenüberliegende Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse gleich Eins ist. Diese Seite nennt man den Sinus von α, geschrieben: $\sin\alpha$. — Es ist aber, um einfache Formeln für alle Dreiecke zu haben, nöthig, die Dreieckswinkel in allgemeinerem Sinne aufzufassen. Wenn man die eine Seite nämlich dreht, bis sie in die Richtung

der andern fällt, so hat man einen Dreieckswinkel, und in diesem Sinne kann er je nach der Drehung auch im rechtwinkligen Dreiecke stumpf oder spitz, auch erhaben und selbst grösser als 4 Rechte sein, da man die Drehung ja so viel mal, als man will, in die alte Lage zurückführen kann. Auch ist es nöthig, je nach dem Sinne der Drehung positive und negative Winkel zu betrachten. Es wird aber gezeigt, dass die Sinus aller Winkel gegeben sind, wenn man die der Winkel von 0 bis 90 Grad kennt. Die Sinus, sowie einige andere, mit ihnen aber in algebraischer Beziehung stehende Functionen, trigonometrische Functionen oder Linien genannt, enthalten die trigonometrischen Tafeln entweder selbst, oder besser die Logarithmen dieser Functionen. Dies bezieht sich zunächst auf die ebene Trigonometrie, die sphärische beruht aber, wie gezeigt wird, auf denselben Elementen. Die sphäroidische aber erfordert eigene Transcendenten, zu deren näherungsweiser Berechnung jedoch die trigonometrischen wesentliche Dienste leisten.

2) Theorie der ebenen rechtwinkligen Dreiecke.

Man bezeichnet, wie schon gesagt, im rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse gleich 1 ist, die dem Winkel α gegenüberliegende Cathete als Sinus von α ($\sin\alpha$). Ausserdem aber wird die anliegende Cathete Cosinus von α, geschrieben $\cos\alpha$, genannt, während man das Verhältniss des Sinus zum Cosinus die Tangente von α ($\operatorname{tg}\alpha$) nennt, und das umgekehrte Verhältniss als Cotangente ($\cot\alpha$) bezeichnet. Weniger gebraucht sind die Bezeichnungen Secante ($\sec\alpha$) und Cosecante ($\operatorname{cosec}\alpha$), worunter bezüglich die umgekehrten Werthe von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ verstanden werden. Wegen des Pythagoräischen Satzes hat man nun:

1) $$\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1,$$

ausserdem als Definition:

2) $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

3) $$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

4) $$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha},$$

5) $$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha},$$

und aus den Gleichungen 2) bis 5), verbunden mit 1, noch:

6) $$1+\operatorname{tg}\alpha^2=\sec\alpha^2,$$

7) $$1+\cot\alpha^2=\operatorname{cosec}\alpha^2.$$

Jedoch gibt es noch Beziehungen anderer Art zwischen den trigonometrischen Linien. Der andere spitze Winkel des rechtwinkligen Dreiecks ist nämlich gleich $\frac{\pi}{2}-\alpha$, und da die an α anliegende Seite die gegenüberliegende von $\frac{\pi}{2}-\alpha$ ist, so hat man:

8) $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,$$

ausserdem:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,$$

und da:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\cot\alpha$$

ist:

9) $$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha,$$

ferner direct:

10) $$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{cosec}\alpha.$$

Der Winkel $\frac{\pi}{2}-\alpha$ heisst das Complement von α, die Ausdrücke: Cosinus, Cotangens, Cosecans sind abgekürzt: Complementssinus, Complementstangens, Complemenssecans, was durch die Formeln 8 bis 10 begründet wird.

Seien jetzt α und β die schiefen Winkel eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks, a und b bezüglich die ihnen gegenüberliegenden Catheten, h die Hypotenuse, so ist, da dieses Dreieck dem mit Winkel α und Hypotenuse 1 ähnlich ist, offenbar:

11) $$a:b:c=\sin\alpha:\cos\alpha:1$$
$$=\operatorname{tg}\alpha:1:\operatorname{cosec}\alpha=1:\cot\alpha:\sec\alpha.$$

Diese Formeln reichen hin, um alle bei rechtwinkligen Dreiecken vorkommenden Fälle lösen zu können, vorausgesetzt, dass man die trigonometrischen Linien, oder besser ihre Logarithmen berechnet und in eine Tafel geordnet hat. Diese Tafel gibt für jeden Werth von 0 bis 90 Grad den $\lg\sin\alpha$, $\lg\cos\alpha$, $\lg\operatorname{tg}\alpha$, $\lg\cot\alpha$, also auch zu jedem dieser Logarithmen den dazu gehörigen Winkel. Ueber die Interpolation dieser

Tafeln siehe den Artikel: Tafel. Ihre sonstige Einrichtung ist leicht zu ersehen.

Offenbar sind alle Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks gegeben, wenn man zwei, worunter wenigstens eine Seite, kennt. Wir geben daher die aus der Formel 11) leicht zu findenden Ausdrücke in eine Tafel geordnet, und fügen zu jeder Aufgabe der Controlle wegen eine Probeformel hinzu.

	Gegeben	Gesucht	Probe
1)	a, b	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $c = \frac{a}{\sin\alpha}$	$c\cos\alpha = b$
2)	a, c	$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ $b = a\cot\alpha$	$c\cos\alpha = b$
3)	a, α	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$, $b = a\cot\alpha$ $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	$c\cos\alpha = b$
4)	b, α	$c = \frac{b}{\cos\alpha}$, $a = b\operatorname{tg}\alpha$ $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	$c\sin\alpha = a$
5)	c, α	$a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	$b\operatorname{tg}\alpha = a$

Wir fügen zu jeder dieser Aufgaben ein Rechnungsschema hinzu:

1)

$a = 36{,}42795$,	$b = 22{,}15498$
$\lg a = 1{,}5614347$	$\lg a = 1{,}5614347$
$\lg b = 1{,}3454714$	$\lg\sin\alpha = 9{,}9316570 - 10$
$\lg\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2159633$	$\lg c = 1{,}6297777$
$\alpha = 58^\circ\,41'\,33'',37$	$c = 42{,}63612$
$\beta = 31^\circ\,18'\,26'',63$	

Probe:

$$\lg c = 1{,}6297777$$
$$\lg\cos\alpha = 9{,}7156938 - 10$$
$$\lg b = 1{,}3454715$$

2)

$a = 36{,}42795$,	$c = 42{,}63612$
$\lg a = 1{,}5614347$	$\lg a = 1{,}5614347$
$\lg c = 1{,}6297777$	$\lg\cot\alpha = 9{,}7840366 - 10$
$\lg\sin\alpha = 9{,}9316570 - 10$	$\lg b = 1{,}3454713$
$\alpha = 58^\circ\,41'\,33'',37$	$b = 22{,}15498$
$\beta = 31^\circ\,18'\,26'',63$	

Probe wie oben.

3)

$a = 36{,}42795,$	$\alpha = 58^\circ\, 41'\, 33'', 37$
$\lg a = 1{,}5614347$	$\lg \alpha = 1{,}5614347$
$\lg \sin \alpha = 9{,}9316570 - 10$	$\lg \cot \alpha = 9{,}7840366 - 10$
$\lg c = 1{,}6297777$	$\lg b = 1{,}3454713$
$c = 42{,}63612$	$b = 22{,}15498$

Probe wie oben.

4)

$b = 22{,}15498$	$\alpha = 58^\circ\, 41'\, 33'', 37$
$\lg b = 1{,}3454713$	$\lg b = 1{,}3454713$
$\lg \cos \alpha = 9{,}7156938 - 10$	$\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}2159633$
$\lg c = 1{,}6297775$	$\lg a = 1{,}5614346$
$c = 42{,}63612$	$a = 36{,}42795$

Probe:
$$\begin{aligned} \lg c &= 1{,}6297775 \\ \lg \sin \alpha &= 9{,}9316570 - 10 \\ \hline \lg a &= 1{,}5614345 \end{aligned}$$

5)

$c = 42{,}63612$	$\alpha = 58^\circ\, 41'\, 33'', 37$
$\lg c = 1{,}6297777$	$\lg c = 1{,}6297777$
$\lg \sin \alpha = 9{,}9316570 - 10$	$\lg \cos \alpha = 9{,}7156938 - 10$
$\lg a = 1{,}5614347$	$\lg b = 1{,}3454715$
$a = 36{,}42795$	$b = 22{,}15498$

Probe:
$$\begin{aligned} \lg b &= 1{,}3454715 \\ \lg \operatorname{tg} \alpha &= 0{,}2159633 \\ \hline \lg a &= 1{,}5614348 \end{aligned}$$

3) Ueber die trigonometrischen Linien im Allgemeinen.

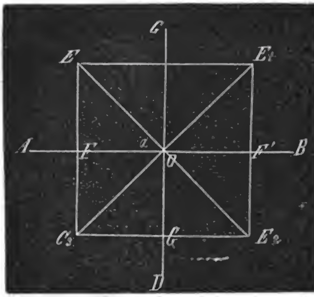
Um die Definition der trigonometrischen Linien auf Winkel von mehr als 90° und selbst auf negative Winkel auszudehnen, sind dieselben leicht zu modificiren.

Es seien (Fig. 10) zwei auf einander senkrecht sich in O schneidende Linien, $EOA = \alpha$ ein Winkel, dessen einen Schenkel AC wir uns als fest, den andern OE als beweglich denken, und zwar derart, dass er von AO aus durch Drehung um O nach und nach grösser wird. Macht man $OE = 1$, zieht EF senkrecht auf FO, so ist $FO = \cos \alpha$, und man sieht leicht, dass, wie sich auch α zwischen 0 und 90° ändert, der Cosinus von α in die Linie AO fallen wird, dass er für 0 Grad gleich $OE = 1$ ist, dann immer mehr abnimmt, und für $\alpha = 90^\circ$ verschwindet, da Punkt F in O fällt.

Betrage nun die Drehung der Linie OE mehr als 90°, falle sie also in die Lage OE_1, und ziehen E_1F_1 ebenfalls senkrecht auf AO, so wird von der Verlängerung von AO ein Stück OF_1 abgeschnitten, welches als Cosinus des Winkels AOE_1 zu betrachten ist, da es ganz in derselben Weise wie vorhin OF entsteht.

Eben aber weil OF_1 in die Verlängerung der ursprünglichen Lage fällt, ist es als negativ zu betrachten, aus den für die Berechnung von Raumgrössen allgemein geltenden Gründen. Beträgt die Drehung mehr als 180 Grad, fällt also OE in die Lage OE_2, so ist OF_1 der Cosinus des erhaltenen Winkels AOE_2, also dieser ebenfalls negativ. Im vierten Quadranten also für den erhaltenen Winkel AOE_3 ist der Cosinus E_3F wie im ersten, also positiv. Setzt man die Drehung um mehr als 360° fort, so wiederholt sich das Ganze, d. h.

Fig. 10.



der Winkel $360^\circ + \alpha$ hat denselben Cosinus als Winkel α. Denkt man den Winkel α negativ, so ist die Drehung von AO nach OE_3 hin zu machen, also der Cosinus verhält sich wie im vierten Quadranten, oder der Cosinus von $-\alpha$ ist derselbe als von $360^\circ - \alpha$.

Liegt jetzt wieder Winkel α im ersten Quadranten, so ist AE sein Sinus. Indess um denselben auf einer festen Linie zu haben, ziehen wir EG senkrecht auf EO, dann ist $GO = AF = \sin\alpha$. Offenbar sieht man, dass für $\alpha = 0$ $\sin\alpha$ verschwindet, und dann bis 90° wächst, wo $\sin\alpha = OE = 1$ ist. Im zweiten Quadranten, wo OE in die Lage OE_1 fällt, ändert der Sinus seine Richtung nicht, bleibt also positiv, im dritten dagegen und vierten gibt OD die Richtung desselben an, ist also negativ. Für Winkel über 360° und negative Winkel gilt das beim Cosinus Gesagte. Uebrigens sieht man, dass wenn $E_1OB = EOA$, also Winkel $AOE = 180^\circ - \alpha$ ist, Sinus und Cosinus dieselbe Grösse OC und $OF' = OF$, abgesehen vom Zeichen, haben, wie Sinus und Cosinus von α, auch findet dasselbe statt, wenn E_2OB und $EOA = \alpha$ sind, also für die Winkel $180^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha$. Für die Winkel, die grösser als 360° sind, wurde schon gezeigt, dass deren Sinus und Cosinus dem von α gleich ist. Es sind also Sinus und Cosinus aller Winkel dem Zeichen und dem absoluten Werth nach bestimmt, wenn man die entsprechenden derjenigen Winkel kennt, welche im ersten Quadranten liegen.

Was die übrigen Linien anbetrifft, so ist $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, und da im ersten Quadranten der Zähler wächst, der Nenner aber abnimmt, so wird die Tangente wachsen, und zwar da $\sin 0^\circ = 0$ ist, und $\cos 90^\circ = 0$ von Null bis Unendlich. Im zweiten Quadranten ist der Zähler positiv, der Nenner negativ, im dritten beide negativ, im vierten der Zähler negativ, der Nenner positiv. Die Tangente wird also im dritten, wie im ersten Quadranten positiv, im zweiten und vierten negativ sein. $\cot\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, also die Cotangente hat mit der Tangente gleiches Zeichen; ebenso verhält sich die Secante zum Cosinus und die Cosecante zum Sinus, deren umgekehrte Werthe sie bezüglich sind. Auch das Verhalten im ersten Quadranten ergibt sich hieraus. Es ist:

$$\cot 0 = \infty, \quad \cot 90^\circ = 0,$$
$$\sec 0 = 1, \quad \sec 90^\circ = \infty,$$
$$\operatorname{cosec} 0 = \infty, \quad \operatorname{cosec} 90^\circ = 1,$$

Es werden also die erste und dritte dieser Functionen abnehmen, die zweite zunehmen.

Wir wiederholen jetzt die eben gefundenen Regeln zur Bestimmung der trigonometrischen Linien in übersichtlicher Form, bedienen uns aber des Bogenmaasses für die Winkel, so dass $\pi = 180^\circ$ gesetzt wird.

Was zunächst das Verhalten im ersten Quadranten anbetrifft, so gilt dafür folgendes Täfelchen:

sin	cos	tg	cot	sec	cosec
w. 0−1	f. 1−0	w. 0−∞	f. ∞−0	w. 1−∞	f. ∞−1

w. und f. bezeichnen Wachsen und Fallen im ersten Quadranten. Die beigeschriebenen Zahlen drücken die Grenzwerthe bei Null nnd $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ ans. Es sind somit Sinus und Cosinus immer kleiner, Secans und Cosecans immer grösser als Eins, Tangens und Cotangens aber nehmen alle reellen Zahlenwerthe an. Die mit co anfangenden Linien nehmen immer im ersten Quadranten ab, die übrigen zu.

Bezeichnet jetzt f eine der 6 trigonometrischen Linien, so findet zwischen den numerischen Werthen die Relation statt:

$$f(\alpha) = \pm f(\pi - \alpha) = \pm f(\pi + \alpha)$$
$$= \pm f(2\pi - \alpha),$$

welche Ausdrücke die Werthe in allen vier Quadranten auf den ersten zurückführen.

Es ist also z. B.:

$$f(100^\circ) = f(180 - 80^\circ) = \pm f(80^\circ),$$
$$f(312^\circ) = f(360 - 48^\circ) = \pm f(48^\circ).$$

Die Zeichen aber gibt folgendes Täfelchen:

	I.	II.	III.	IV.
cosec sin	+	+	−	−
cos sec	+	−	−	+
tg cot	+	−	+	−

Die römischen Zahlen geben die Quadranten an. Für Winkel, die grösser als 360° oder 2π sind, aber gilt die Formel:

$$f(2s\pi + \alpha) = f(\alpha),$$

wo s eine beliebige ganze, auch negative Zahl ist. Die Function ist also mit dem Zeichen bestimmt.

Was die negativen Winkel anbetrifft, so ist:

$$f(-\alpha) = f(2\pi - \alpha),$$

oder auch, wenn nämlich α grösser als 360° ist:

$$f(-\alpha) = f(2s\pi - \alpha).$$

Es ist aber, wenn α ein beliebiger spitzer Winkel ist:

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\sec(2\pi - \alpha) = \sec\alpha,$$
$$\operatorname{cosec} 2\pi(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha,$$

also auch:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha,$$

aber:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$
$$\sec(-\alpha) = \sec\alpha.$$

Es sind hier die Winkel öfter anf Bogenmaasse bezogen. In der That kann man, und namentlich bei analytischen Betrachtungen geschieht dies immer, den Bogen, dessen Centriwinkel α und dessen Radius die Einheit ist, statt des Winkels betrachten.

Ist $FO = 1$, so wird EF die geometrische Tangente dieses Bogens sein. Offenbar ist dann anch:

$$\frac{EF}{FO} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,$$

und da $FO = 1$ ist:

$$\operatorname{tg}\alpha = EF,$$

woher der Name der trigonometrischen Tangente rührt.

4) Trigonometrische Formeln.

In die Trigonometrie im eigentlichen Sinne gehören nur die Formeln, welche für das Ausmessen der Dreiecke von Wichtigkeit sind. Diejenigen, welche sich namentlich auf die analytische Anwendung der trigonometrischen Functionen beziehen, sind an anderer Stelle zu geben. — Als Grundformel ist diejenige zu betrachten, welche den Sinus der Summe zweier Winkel durch die Functionen dieser Winkel ausdrücken lehrt.

Seien a, b, c (Fig. 11) die Seiten eines beliebigen Dreiecks, α, β, γ bezüglich ihre Gegenwinkel, h das von γ auf die Gegenseite gefällte Loth, welches die letztere in die Stücke K und l theilt, so entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke, in welchen man hat:

$$h = b\sin\alpha = a\sin\beta, \quad K = b\cos\alpha,$$
$$l = a\cos\beta,$$

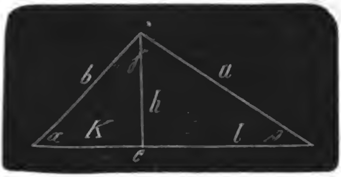
woraus sich die wichtige Formel ergibt:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

Offenbar könnte man das Loth anch von Winkel β aus ziehen, und erhielte dann:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

Fig. 11.



also:

1) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

d. h. die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der Gegenwinkel.

Ausserdem ist $c = K + l$, also:

2) $$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

Diese Formeln werden später direct benutzt werden. Jetzt verwenden wir sie zur Entwickelung der Grundformel. Setzen wir aus 1):

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}, \quad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

in 2) ein, so kommt:

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Es ist aber:

$$\gamma = \pi - (\alpha + \beta),$$

und:

$$\sin[\pi - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta),$$

also:

I) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Dies ist die verlangte Grundformel. Da sie aus der Betrachtung eines Dreiecks gewonnen ist, so möchte es scheinen, dass die Winkel α und β beide spitz sein müssen, oder höchstens einer stumpf sein könne, indess ist, wie schon oben angedeutet worden, der Begriff des Dreieckwinkels einer Erweiterung fähig, der für Winkel aller Quadranten gilt. Indess ziehen wir es hier vor, die allgemeine Gültigkeit der Formel 1) direct zu beweisen.

Zunächst gilt die Beweisführung jedenfalls, wenn α ein stumpfer Winkel ist. Es ist in diesem Falle $\pi - \alpha$ ein spitzer. Schreibt man nun in Formel 1) $\pi - \alpha$ für α, so kommt:

$$\sin[\pi - (\alpha - \beta)] = \sin(\pi - \alpha)\cos\beta + \cos(\pi - \alpha)\sin\beta,$$

d. h.:

II) $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

und die Formeln I) und II) gelten jedenfalls, wenn α und β positive spitze Winkel sind. Dies vorausgesetzt, mögen A und B beliebig sein, so ist jedenfalls:

$$A = n\pi \pm \alpha, \quad B = s\pi \pm \beta,$$

wo α und β die obigen beschränkten Werthe haben. A und B sind dann ganz beliebig, wenn n und s ganze (auch negative) Zahlen sind. Um jedoch das doppelte Vorzeichen zu vermeiden, schreiben wir lieber:

$$A = n\pi(-1)^p\alpha, \quad B = s\pi(-1)^q\beta,$$

wo p und q ebenfalls ganze Zahlen sind. Nun ist:

$$\sin(A + B) = \sin[(n + s)\pi(-1)^p\alpha(-1)^q\beta],$$

und nach den Betrachtungen des vorigen Abschnittes, wie leicht zu sehen:

$$\sin(A+B) = (-1)^{n+s+p} \sin[\alpha(-1)^{q-p}\beta].$$

Wendet man nun die Formel I) oder II) an, je nachdem $q-p$ grade oder ungrade ist, so hat man:

$$\sin[\alpha(-1)^{q-p}\beta) = \sin\alpha\cos\beta(-1)^{q-p}\cos\alpha\sin\beta,$$

also:

$$\sin(A+B) = (-1)^{n+s+p}\sin\alpha\cos\beta(-1)^{n+s+q}\cos\alpha\sin\beta.$$

Offenbar aber ist:

$$\sin A = (-1)^{n+p}\sin\alpha, \quad \sin B = (-1)^{s+q}\sin\beta,$$

$$\cos A = (-1)^{n}\cos\alpha, \quad \cos B = (-1)^{s}\cos\beta,$$

also:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$

womit die Formel I) für alle Winkel bewiesen ist. Die Allgemeingültigkeit der Formel II) folgt dann aus dieser, wenn man $-B$ für B schreibt. Es ist dann:

$$\sin(A-B) = \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B),$$

woraus sich ergibt:

$$(\sin A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B.$$

An die Formeln I) und II) reihen sich nun die folgenden Entwickelungen. Es werde in II) für α geschrieben $\frac{\pi}{2}-\alpha$, so ergibt sich:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,$$

d. h.:

III) $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

und wenn man in I) $\frac{\pi}{2}-\alpha$ für α schreibt:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta,$$

oder:

IV) $$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Aus den Formeln I) und III) aber ergibt sich:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\alpha\cos\beta$ dividirt:

V) $$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

und ebenso folgt aus II) und IV):

VI) $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Ist in der Formel I) $\beta=\alpha$, so kommt:

VII) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

und ebenso aus Formel III):

VIII) $$\cos 2\alpha = \cos\alpha^2 - \sin\alpha^2 = 1 - 2\sin\alpha^2 = 2\cos\alpha^2 - 1,$$

wo die beiden letzten Ausdrücke sich aus dem ersten mittels der Formel:

$$\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$$

ergeben. Vertauscht man in 8) 2α mit α, so kommt:

$$\cos\alpha=1-2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2-1.$$

Also wenn man $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ aus diesen Gleichungen entwickelt:

IX) $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

X) $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Setzt man in V) $\beta=\alpha$, so ist:

XI) $$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha^2}.$$

Durch Division von IX) und X) ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

oder wenn man Zähler und Nenner mit $\sqrt{(1-\cos\alpha)}$ oder mit $\sqrt{(1+\cos\alpha)}$ multiplicirt:

XII) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Addiren und subtrahiren wir jetzt die Formeln I) und II), sowie III) und IV), so kommt:

XIII) $$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$
XIV) $$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta,$$
XV) $$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
XVI) $$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Diese Formeln könnten dazu dienen, um Producte von Sinus und Cosinus in Summen zu verwandeln. Seit Einführung der Logarithmen ist es indess viel wichtiger, Summen durch Producte auszudrücken, damit die logarithmische Rechnung nicht unterbrochen werde. Wir geben den Formeln also einen dem entsprechenden Ausdruck und schreiben:

$$\alpha+\beta=a,\qquad \alpha-\beta=b,$$

somit:

$$\alpha=\frac{a+b}{2},\quad \beta=\frac{a-b}{2},$$

dann werden die Formeln XIII) bis XVI):

XVII) $$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

XVIII) $$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2},$$

XIX) $$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

XX) $$\cos b-\cos a=2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}.$$

5) Berechnung der schiefwinkligen Dreiecke.

Mit den Formeln 1) und 2) des vorigen Abschnitts verbinden wir noch zwei andere, die sich leicht aus derselben Figur ergeben. Zunächst ist offenbar:

$$a^2=h^2+l^2=h^2+(c-K)^2,$$

und wenn man die Werthe von h und K einsetzt:

$$a^2 = b^2 \sin\alpha^2 + (c - b\cos\alpha)^2,$$

d. h., da $\sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 = 1$ ist:

3) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$$

Ferner ist:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{c - K},$$

d. h.:

4) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks werde mit F bezeichnet. Es ist also:

$$F = \tfrac{1}{2}\,c\,h,$$

oder:

5) $$F = \tfrac{1}{2}\,bc\sin\alpha,$$

oder wegen: $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$:

5a) $$F = \tfrac{1}{2}\,\frac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Es ist wichtig, dass man in jeder das schiefwinklige Dreieck betreffenden Formel jede zwei Seiten a, b, c mit einander vertauschen kann, wenn man die entsprechenden Gegenwinkel auch vertauscht, da die Bezeichnung einer Seite so gut wie der andern zukommen kann.

Zur Berechnung der Dreiecke aus drei gegebenen Seiten reichen die Formeln 1), 3) und 4) hin. Es sind nämlich vier Fälle möglich.

Sind 1) gegeben eine Seite und zwei Winkel, so gibt der dritte Winkel die Beziehung $\alpha + \beta + \gamma = 2$ R, und die Formel 1) gibt die beiden andern Seiten, nämlich, wenn a die gegebene ist:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

Sind 2) gegeben zwei Seiten und der Gegenwinkel der einen, a, b und α, so gibt dieselbe Formel β, nämlich:

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a},$$

γ und c werden dann wie oben gefunden. Man sieht, dass diese Berechnung sich auf logarithmischem Wege sehr einfach macht.

Sind aber 3) alle drei Seiten gegeben, so lassen sich mittels der Formel 3) die Winkel finden; und sind 4) zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, b, c und α, so gibt Formel 3) die dritte Seite und 4) die übrigen Winkel. Man sieht aber, wie unbequem in beiden Fällen die Rechnung ist, falls sie mit Logarithmen ausgeführt werden soll, und es müssen daher die Formeln 3) und 4) durch bequemere ersetzt werden. Gehen wir von Formel 3) aus, aus der wir Winkel α finden, und sie demgemäss schreiben:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Wir addiren diese Formel zur Einheit, und ziehen sie auch von der Einheit ab:

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,bc},$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2\,bc}.$$

Wenn wir beide durch 2 dividiren, und die Wurzeln nehmen, so gibt IX) und X) des vorigen Abschnittes:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{bc}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)}{bc}},$$

Formeln, die sich beide zur logarithmischen Rechnung eignen, da sie keine Summen enthalten, wenn $a+b+c$, $a+b-c$ u. s. w. gleich berechnet werden. Noch bequemer aber schreibt man:

$$\frac{a+b+c}{2} = s,$$

dann ist:

6) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

7) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Eine noch bequemere Formel für den Fall, dass alle Winkel gesucht sind, erhält man durch Division von 7) durch 6):

8) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

denn die vier Grössen s, $s-b$, $s-c$ kommen in allen drei Winkeln allein vor, da sich die denselben entsprechenden Ausdrücke durch Vertauschen von $a\,b$, $\alpha\,\beta$, oder $a\,c$, $\alpha\,\gamma$ aus 8) ergeben. Auch kann man mit Vortheil gleich einen Ausdruck für den Flächeninhalt, wenn alle drei Seiten gegeben sind, anschliessen. Es ist nämlich:

$$F = \tfrac{1}{2}\,bc\sin\alpha = bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

(Vergleiche Formel VII) des vorigen

Abschnitts). Also wenn man 6) und 7) anwendet:

9) $$F=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Selbstverständlich kann man diese Formel auch ohne trigonometrische Betrachtungen finden. Ist F gefunden, so erleichtert sich auch das Auffinden der Winkel. Denn man hat offenbar:

9a) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{F}{s(s-a)}.$$

Sind also alle drei Seiten gegeben, so setzt man, wenn alle übrigen Stücke gefunden werden sollen, am bequemsten:

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=q.$$

Dann ist:

$$F=q\cdot s,\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{q}{s-a},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{q}{s-b},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{q}{s-c}.$$

Als Probe aber dient die Beziehung:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ.$$

Es bleibt noch der Fall übrig, wo zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind. Um bequeme Formeln zu haben, gehen wir von Formel 1) in folgender Gestalt aus:

$$a\sin\gamma=c\sin\alpha,\qquad b\sin\gamma=c\sin\beta.$$

Diese Formeln werden addirt und subtrahirt:

$$(a+b)\sin\gamma=c(\sin\alpha+\sin\beta),$$
$$(a-b)\sin\gamma=c(\sin\alpha-\sin\beta).$$

Da nun $\gamma=2\,\mathrm{R}-\alpha-\beta$, also $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ ist, so hat man, wenn man die Formeln XVII) und XVIII) anwendet, für $\sin(\alpha+\beta)$ nach Formel VII) schreibt: $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, und soviel als möglich hebt:

10) $$(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=c\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

11) $$(a-b)\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Ist nun a, b und γ, somit auch $\alpha+\beta=2\,\mathrm{R}-\gamma$ gegeben, so erhält man $c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ und $c\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$, also durch Division: $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$. Nimmt man den entsprechenden Winkel $\frac{\alpha-\beta}{2}$, zugleich dessen Cosinus und Sinus, so hat man c, etwa vermittelst der Formel 10), während 11) als Probe dient. Da nun $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ gegeben sind, so gibt Addition und Subtraction die Winkel α und β. Auch kann man gleich 11) durch 10) dividiren, und hat:

12) $$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Diese Formel in Verbindung mit 10) oder 11) gibt dann c.

Hiernach sind alle Aufgaben auf bequeme Weise zu lösen.

Wir geben die Auflösung der vier Fälle jetzt noch in Tafelform:

Gegeben	Gesucht	Probe
1) a, b, α	$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$, $\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$	$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$
2) a, α, β	$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta)$, $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $F = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha}$	$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$
3) a, b, c	$s = \frac{a+b+c}{2}$, $\varphi = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varphi}{s-a}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varphi}{s-b}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varphi}{s-c}$, $F = \varphi\cdot s$	$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$
4) a, b, γ	$u = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$, $A = (a+b)\cos u$, $B = (a-b)\sin u$, $\operatorname{tg} v = \frac{B}{A}$, $c = \frac{B}{\sin v}$, $\alpha = \frac{u+v}{2}$, $\beta = \frac{u-v}{2}$, $F = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$	$A = c\cos v$

Es ist hierbei zu bemerken, dass im ersten Falle, wenn $a<b$ ist, zwei Winkel β möglich sind. In der That gehört $\sin\beta$ auch zwei Winkeln, einem spitzen und einem stumpfen, an. Ist dagegen $a>b$, so ist β immer spitz zu nehmen. Die Probeformel in Fall 1) und 2) ist nicht ganz so bequem, wie in den andern Fällen. Im Falle 4) ist a immer als die grössere Seite zu nehmen.

Falls alle Stücke verlangt werden, kann man auch in Fall 2) statt des dort gegebenen Werthes von F den aus 1) nehmen.

Wir fügen jetzt zu jedem der Fälle ein Rechnungsschema hinzu.

1) $a = 36{,}49725$,
$b = 61{,}25894$,
$\alpha = 12^\circ\,34'\,17'',29$.

$\lg b = 1{,}7871694$
$\lg\sin\alpha = 9{,}3377730 - 10$
$1{,}1249424$
$\lg a = 1{,}5622602$
$\lg\sin\beta = 5{,}5626822 - 10$
$\beta = 21^\circ\,25'\,39'',83$

oder auch:

$\beta_1 = 158^\circ\,34'\,20'',17$

$\lg a = 1{,}5622602$
$\lg b = 1{,}7871694$
$\lg\cos\gamma = 0{,}6989700 - 1$
$\lg\sin\gamma = 9{,}7475527 - 10$
$\lg\sin\gamma_1 = 9{,}1873970 - 10$
$\lg F = 2{,}7959523$
$\lg F_1 = 2{,}2357966$
$F = 625{,}1041$
$F_1 = 172{,}1063$

$\alpha+\beta = 33^\circ\,59'\,57'',12$
oder $\alpha+\beta_1 = 171^\circ\,8'\,37'',46$
also $\gamma = 146^\circ\,0'\,2'',88$
oder $\gamma_1 = 8^\circ\,51'\,22'',54$

$\lg b = 1{,}7871694$
$\lg\sin\gamma = 9{,}7475527 - 10$
$\lg\sin\gamma_1 = 9{,}1873970 - 10$
$1{,}5347221$
$0{,}9745664$
$\lg\sin\beta = 9{,}5626822 - 10$
$\lg c = 1{,}9720399$
$\lg c_1 = 1{,}4118842$
$c = 93{,}76481$
$c_1 = 25{,}81572$

Probe.

$\lg b = 1,7871694$

$\lg\cos\alpha = 9,9894611 - 10$

1,7766305

num = 59,79026

$\lg a = 1,5622602$

$\lg\cos\beta = 9,9688930 - 10$

1,5311532

num = 33,97451;

wird statt β genommen β_1, so wird dieser Numerus negativ.

59,79026

33,97451

$c = 93,76477$

$c_1 = 25,81575$

2) $a = 36,49725,$

$\alpha = 12^\circ 34' 17'',29,$

$\beta = 21^\circ 25' 39'',83.$

$\alpha + \beta = 33^\circ 59' 57'',12$

$\gamma = 146^\circ 0' 2'',88$

$\lg a = 1,5622602$

$\lg\sin\gamma = 9,7475527 - 10$

1,3098129

$\lg\sin\alpha = 9.3377730 - 10$

$\lg c = 1,9720399$

$c = 93,76481$

$\lg a = 1,5622602$

$\lg\sin\beta = 9,5626822 - 10$

1,1249424

$\lg\sin\alpha = 9.3377730 - 10$

$\lg b = 1,7871694$

$b = 61,25894$

F wie oben.

Probe.

$\lg b = 1,7871694$

$\lg\cos\alpha = 9,9894611$

1,7766305

num = 59,79026

$\lg a = 1,5622602$

$\lg\cos\beta = 9,9688930$

1,5311532

num = 33.917451

$c = 93,76477$

3) $a = 36,49725$

$b = 61,25894$

$c = 93,76481$

$2s = 191,52100$

$s = 95,76050$

$s - a = 59,26325$

$s - b = 34,50156$

$s - c = 1,99569$

$\lg s - a = 1,7727855$

$\lg s - b = 1,5378387$

$\lg s - c = 0,3000931$

$\lg \varrho^2 \cdot s = 3,6107173$

$\lg s = 1,9811864$

$\lg \varrho^2 = 1,6295309$

$\lg \varrho = 0,8147654$

$\lg \varrho = 0,8147654$

$\lg s - a = 1,7727855$

$\lg s - b = 1,5378387$

$\lg s - c = 0,3000931$

$\lg s = 1,9811864$

$\lg\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 9,0419799 - 10$

$\lg\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = 9,2769267 - 10$

$\lg\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 0,5146723$

$\lg F = 2,7959518$

$F = 625,1033.$

$\frac{\alpha}{2} = 6^\circ 17' 8'',65$

$\frac{\beta}{2} = 10^\circ 42' 49'',48$

$\frac{\gamma}{2} = 73^\circ 0' 1'',50$

$\alpha = 12^\circ 34' 17'',30$

$\beta = 21^\circ 25' 38'',96$

$\gamma = 146^\circ 0' 3'',00$

Probe.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ 0' 0'',06$

4)

$$a = 61{,}25894$$
$$b = 36{,}49725$$
$$\gamma = 146^\circ\, 0'\, 2'',88$$

$$a+b = 97{,}75619$$
$$a-b = 24{,}76169$$

$$\frac{\gamma}{2} = 73^\circ\ 0'\ 1'',44$$

$$u = 16^\circ\, 59'\, 58'',56$$
$$v = 4^\circ\, 25'\, 41'',30$$

$$\alpha = 21^\circ\, 25'\, 39'',86$$
$$\beta = 12^\circ\, 34'\, 17'',26$$

$$\lg a+b = 1{,}9901439$$
$$\lg \cos u = 9{,}9805972 - 10$$

$$\lg A = 1{,}9707411$$
$$\lg a-b = 1{,}3937803$$
$$\lg \sin u = 9{,}4659254 - 10$$

$$\lg B = 0{,}8597057$$

$$\lg B = 0{,}8597057$$
$$\lg A = 1{,}9707411$$

$$\lg \operatorname{tg} v = 8{,}8889646 - 10$$
$$v = 4^\circ\, 25'\, 41''\, 30$$
$$\lg \sin v = 8{,}8876662 - 10$$

$$\lg c = 1{,}9720395$$
$$c = 93{,}76472$$

P r o b e.

$$\lg \cos v = 9{,}9987017 - 10$$
$$\lg c = 1{,}9729395$$

$$\lg A = 1{,}9707412$$

Ist die Rechnung richtig, so ist die Probeformel zugleich nützlich, um die Fehlergrenze zu finden. Dieselbe ist, namentlich in Fall 3), hier verhältnissmässig gross. Dies liegt an der Auswahl der Zahlen, wie genauere Untersuchung zeigen würde.

A n m. Da der Sinus die halbe Sehne des doppelten Bogens ist, die Sehnen vieler Bogen (d. h. die Seiten vieler regelmässigen Vielecke) sich aber algebraisch ausdrücken lassen, so ist dies auch mit den entsprechenden trigonometrischen Linien der Fall. Es gibt also auch Dreiecke, wo sich die Bestimmung der nicht gegebenen Stücke algebraisch ergibt.

6) **U e b e r d i e B e r e c h n u n g u n d I n t e r p o l a t i o n d e r t r i g o n o m e t r i s c h e n T a f e l n.**

Die Berechnung trigonometrischer Tafeln setzt zunächst analytische Ausdrücke für die trigonometrischen Linien voraus. Dies führt uns ins Gebiet der analytischen Trigonometrie, von der wir hier nur das Nöthigste geben. Es ist:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

wo unter i verstanden wird $\sqrt{-1}$. Also mit Berücksichtigung des Abschnitts 4):

1) $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta).$$

Setzen wir hierin $\beta = \alpha$, so kommt:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha,$$

und wenn man in 1) 2α für β setzt, dann 3α für β u. s. w., so ist für jedes positive und ganze n:

2) $$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha,$$

eine Formel, die sich leicht auf negatives und gebrochenes n erweitern lässt. Für unsern Zweck ist dies unnöthig.

Setzen wir $n\alpha = \vartheta$, so kommt:

$$\left(\cos\frac{\vartheta}{n} + i\sin\frac{\vartheta}{n}\right)^n = \cos\vartheta + i\sin\vartheta.$$

Mit wachsendem n nimmt der Ausdruck links eine sehr einfache Form an. Wenn wir ϑ im Bogenmaass voraussetzen, wie jetzt immer geschieht, so ist offenbar der Sinus von ϑ die halbe Sehne des Winkels 2ϑ, und da Bogen $\frac{\vartheta}{n}$ mit wachsendem n sich seiner Sehne immer mehr nähert, so kann man setzen:

$$\lim\left(\sin\frac{\vartheta}{n}\right) = \tfrac{1}{2}\,\frac{2\vartheta}{n} = \frac{\vartheta}{n},$$

aber:

$$\cos\frac{\vartheta}{n}=\sqrt{1-\sin\frac{\vartheta^2}{n}}=\lim\sqrt{1-\left(\frac{\vartheta}{n}\right)^2}=\lim\left[1-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\vartheta}{n}\right)^2\right],$$

und da $\left(\frac{\vartheta}{n}\right)^2$ gegen $\frac{\vartheta}{n}$ verschwindet:

$$\lim\left(\cos\frac{\vartheta}{n}\right)=1,$$

somit also:

$$\cos\vartheta+i\sin\vartheta=\lim\left(1+\frac{i\vartheta}{n}\right)^n.$$

Nach dem im Artikel: Quantität Enthaltenen ist nun:

$$\lim\left(1+\frac{i\vartheta}{n}\right)^n=e^{\vartheta i},$$

also:

3) $$e^{\vartheta i}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta,$$

und folglich auch:

$$e^{-\vartheta i}=\cos\vartheta-i\sin\vartheta,$$

Hiermit ist die Identität der in der Analysis gebrauchten Cosinus und Sinus mit den trigonometrischen gezeigt, und man hat wie dort (siehe den Artikel: Quantität):

5) $$\cos\vartheta=1-\frac{\vartheta^2}{1\cdot2}+\frac{\vartheta^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{\vartheta^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots,$$

6) $$\sin\vartheta=\vartheta-\frac{\vartheta^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{\vartheta^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\ldots,$$

Reihen, welche immer convergiren.

Es ist also die Möglichkeit der Berechnung der trigonometrischen Linien wie ihrer Logarithmen in Tafelform gezeigt. Weiteres über diese Berechnung übergehen wir, und bemerken nur, dass dafür die in dem Artikel: Tafel gezeigten allgemeinen Grundsätze gelten. Hier fügen wir nur Einiges über die Einrichtung und den G.brauch dieser Tafeln hinzu.

Zunächst ist klar, dass die Tafeln die trigonometrischen Linien nur von 0 bis 90° zu enthalten brauchen. Wegen der Formeln:

$$\sin\alpha=\cos(90^\circ-\alpha),\quad \operatorname{tg}\alpha=\cot(90^\circ-\alpha)$$

ist es aber auch nur nöthig, diese Berechnung bis zu 45° anzustellen. Es werden zu dem Ende die Tafeln mit doppelten Bezeichnungen versehen, denen zu Folge z. B. sin 60° zugleich als cos 30° gelesen werden kann.

Wir unterscheiden nun die Tafeln, welche die trigonometrischen Linien selbst enthalten, von denen, welche deren Logarithmen geben. Die letzteren werden weit häufiger gebraucht, und sind daher möglichst handlich und bequem einzurichten. Bei den meisten Rechnungen reichen, wie bei den natürlichen Zahlen, fünfziffrige Logarithmen aus, bei sehr genauen siebenzifferige. Auf diese beiden Arten von Tafeln werden wir uns hier beschränken. Noch bemerken wir, dass diese Tafeln nur die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten enthalten. Die der Secanten und Cosecanten sind nämlich selten von Vortheil. Da ferner die meisten dieser Logarithmen echte Brüche zu Numeren und somit negative Kennziffern haben würden, so ist dies vermieden, indem man jeden dieser Logarithmen um zehn Ganze vermehrt, welche am Besten beim Rechnen wieder abzuziehen sind.

Unbedingtes Erforderniss bei Tafeln, die, wie diese, sehr oft gebraucht werden, ist es, dass das Intervall eine eigentliche Interpolation, also mittels der ersten Differenzen möglich macht. Wir wollen dies Intervall hier bestimmen. Diese Interpolation beruht auf der Formel:

$$f(x+\varepsilon)=f(x)+\varepsilon\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu},$$

wo f die in der Tafel enthaltene Function ist, ν das Intervall, ε eine Grösse, die kleiner als dasselbe ist. Damit diese Formel richtig sei, muss man haben:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu} = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon},$$

d. h. der Werth des Gliedes links muss für die Grenzen der Genauigkeit, welche die Tafel möglich macht, von ν unabhängig werden. Nun ist:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu} = f'(x) + \frac{\nu}{2} f''(x) + \ldots,$$

und es darf also das letzte Glied $\frac{\nu}{2} f''(x)$, welches ν enthält, keinen Einfluss ausüben. Die obige Formel aber gibt:

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x) + \frac{\varepsilon\nu}{2} f''(x),$$

und es muss daher bei fünfstelligen Ziffern sein:

$$\frac{\varepsilon\nu}{2} f''(x) < 0{,}00001,$$

und bei siebenzifferigen:

$$\frac{\varepsilon\nu}{2} f''(x) < 0{,}0000001,$$

damit auf die letzte Null von diesem Gliede kein Einfluss ausgeübt werde. ε hat zur Grenze den Werth ν, indess kann man als Grenze selbst $\frac{\nu}{2}$ nehmen, wenn man immer, wenn ε grösser als $\frac{\nu}{2}$ ist, von dem nächst grössern Argument $x+\nu$ ausgeht, und die Differenz abzieht. Es muss also sein bezüglich:

$$\frac{\nu^2}{4} f''(x) < 0{,}00001,$$

oder:

$$\frac{\nu^2}{4} f''(x) < 0{,}0000001.$$

Wenden wir dies auf $\lg \sin x$ und $\lg \operatorname{tg} x$ an. Es ist:

$$\frac{d^2 \lg \sin x}{dx^2} = \frac{d \cot x}{dx} = -\frac{1}{\sin x^2},$$

$$\frac{d^2 \lg \operatorname{tg} x}{dx^2} = \frac{d \dfrac{1}{\sin x \cos x}}{dx} = -\frac{4 \cos 2x}{\sin 2x^2}.$$

Das Intervall ν für die Logarithmen der Sinus, bezüglich für fünf- und siebenzifferige Tafeln, ergibt sich also aus den Beziehungen:

$$\frac{\nu^2}{4 \sin x^2} < 0{,}00001 \quad \text{oder:} \quad < 0{,}0000001,$$

also durch Wurzelausziehung:

$$\frac{\nu}{2 \sin x} < 0{,}0032 \quad \text{oder} \quad < 0{,}00032,$$

$$\nu < 0{,}0064 \sin x \quad \text{oder:} \quad < 0{,}00064 \sin x.$$

ν ist hier durch Bogenmaass bestimmt. Sei ν aber in Minuten zu finden, so ist für diesen Ausdruck zu setzen:

$$\frac{\nu\pi}{180 \cdot 60} = \frac{\nu}{3438},$$

also:

$$\nu < 22 \sin x \quad \text{oder:} \quad < 2{,}2 \sin x.$$

Das Intervall ist also mit $\sin x$ proportional, und ist daher nicht in der ganzen Tafel gleichmässig.

Suchen wir jetzt, von welchem Werthe von x an das Intervall eine Minute betragen kann.

Es ist dann $\nu = 1$,

$$\sin x = \frac{1}{22} = 0{,}045$$

für fünfziffrige Logarithmen, und:

$$\sin x = \frac{1}{2{,}2} = 0{,}45$$

für siebenzifferige Logarithmen. Nun ist:

$$\arcsin 0{,}045 = 2^\circ\, 35',$$

$$\arcsin 0{,}45 = 26^\circ\, 48'.$$

Von da an also können die Tafeln, welche das Intervall von einer Minute haben, erst mit völliger Sicherheit interpolirt werden. Scheut man, wie dies gewöhnlich geschieht, einen Fehler von einigen, z. B. drei, Einheiten der letzten Stelle nicht, so ist $\frac{\nu^2}{4 \sin x} < 0{,}00003$ und $< 0{,}0000003$ zu nehmen, woraus sich ergibt: $\frac{\nu}{2 \sin x} < 0{,}0055$ und $< 0{,}00055$. Es können dann die gefundenen Werthe von $\sin x$, nämlich 0,045 und 0,45, mit $\frac{32}{55}$ multiplicirt werden. Man erhält so:

$$\sin x = 0{,}026 \quad \text{und} \quad = 0{,}26,$$

welche den Winkeln:

$$1^\circ\, 31' \quad \text{und} \quad 15^\circ\, 4'$$

entsprechen.

Suchen wir jetzt die Grenzen, in denen das Intervall $10'' = \frac{1}{6}$ Minute sein kann.

Es ist hier $\nu = \frac{1}{6}$,

$$1 = 132 \sin x \quad \text{und} \quad 1 = 13{,}2 \sin x,$$

$$\sin x = 0{,}0071, \quad \sin x = 0{,}071,$$

zu welchen die Winkel gehören:

$$0^\circ\, 25' \quad \text{und} \quad 4^\circ\, 5'.$$

Mit Sicherheit ist also eine siebenziffrige Tafel zu benutzen, wenn sie von etwa 4° das Intervall von 10 Secunden hat. — In den bessern Tafeln, z. B. der von Bremiker bearbeiteten Vega'schen Tafel, geht dies Intervall durch den ganzen Quadranten hindurch, da das von einer

Minute, selbst da, wo es anwendbar ist, eine unangenehme und namentlich nicht im Kopfe auszuführende Rechnung erfordert; die Hinzufügung von Interpolationstäfelchen in der gedachten Tafel macht dagegen eine Ausführung der ganzen Rechnung im Kopfe möglich.

Bei fünfziffrigen Tafeln, wo das Intervall von einer Minute ein sehr bequemes ist, ist es übrigens nicht nöthig, für Winkel unter 1—2° ein kleineres zu nehmen, da für solche eine einfachere Interpolation, oder directe Berechnung der Logarithmen eintritt, von welcher gleich die Rede sein soll.

Suchen wir noch den Anfangspunkt, wo für siebenzifferige Tafeln das Intervall 1″ sein kann.

Es ist hier $\nu = \frac{1}{60}$, also:

$$1 = 132 \sin x, \qquad \sin x = 0{,}0071,$$

$$x = 0^\circ\ 25'.$$

Die angeführten Tafeln haben bis zu 5° das Intervall von 1″. Für Winkel unter 20—30′ ein kleineres Intervall zu geben, ist aus den eben angeführten Gründen nicht nöthig. Führen wir die obige Rechnung auch für $\lg \operatorname{tg} x$ aus. Für:

$$\lg \cos x = \lg \sin (90^\circ - x),$$

und für:

$$\lg \cot (x) = -\lg \operatorname{tg} x$$

ist dann nichts hinzuzufügen. Man hat für die Tangente:

$$\frac{\nu^2 \cos 2x}{\sin 2x^2} < 0{,}00001 \quad \text{und} \quad < 0{,}0000001,$$

$$\nu < \frac{0{,}0032 \sin 2x}{\sqrt{(\cos 2x)}} \quad \text{und} \quad < \frac{0{,}00032 \sin 2x}{\sqrt{(\cos 2x)}},$$

also wenn man wieder ν in Minuten hat:

$$\nu < \frac{11 \sin 2x}{\sqrt{(\cos 2x)}} \quad \text{und} \quad < \frac{1{,}1 \sin 2x}{\sqrt{(\cos 2x)}}.$$

Für Winkel, die kleiner als 15 — 16° sind, ist $\cos 2x$ nahe gleich 1, und man kann daher setzen:

$$\nu < 11 \sin 2x, \qquad \nu < 1{,}1 \sin 2x,$$

daher kommt für $\sin 2x$ der doppelte Werth, den wir oben für $\sin x$ fanden, und da man annähernd für nicht sehr grosse Winkel setzen kann:

$$\sin 2x = 2 \sin x,$$

wenn man nämlich in der Formel:

$$2 \sin x \cos x$$

den Cosinus mit 1 vertauscht, so erhalten wir ungefähr dieselben Werthe wie beim Sinus.

Es handelt sich nun darum, wie die Sinus und Tangenten kleiner Winkel mit Genauigkeit bestimmt werden, da für sie ein noch kleineres Intervall als eine Secunde eintreten müsste, falls man die gewöhnliche Interpolationsmethode anwenden wollte. Bei diesen Betrachtungen gehen wir von der Formel aus:

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^3 + \tfrac{1}{5} \operatorname{tg} \alpha^5 - \ldots,$$

welche sich sehr leicht aus der Formel:

$$\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{\alpha i}$$

ergibt, und in dem Artikel: Quantität entwickelt ist. Für kleine Winkel lässt sich diese Formel ersetzen durch die folgende:

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha (\sec \alpha)^{-\frac{2}{3}}.$$

Sehen wir, bis zu welchem Werthe von α diese für fünf- und siebenzifferige Tafeln mit der genauen Formel übereinstimmt. Es ist:

$$\sec \alpha^{-\frac{2}{3}} = (1 + \operatorname{tg} \alpha^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^2 + \tfrac{2}{9} \operatorname{tg} \alpha^4 - \ldots,$$

also wenn man:

$$\operatorname{tg} \alpha \sec \alpha^{-\frac{2}{3}} = \alpha'$$

setzt:

$$\alpha' = \operatorname{tg} \alpha - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^3 + \tfrac{2}{9} \operatorname{tg} \alpha^5 - \ldots,$$

also:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^2 + \frac{2}{9} \operatorname{tg} \alpha^4 - \ldots}{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^2 + \frac{1}{5} \operatorname{tg} \alpha^4 - \ldots},$$

also:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = (1 - \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^2 + \tfrac{2}{9} \operatorname{tg} \alpha^4 - \ldots)(1 + \tfrac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha^2 - \tfrac{1}{5} \operatorname{tg} \alpha^4 + \tfrac{1}{9} \operatorname{tg} \alpha^6 - \ldots),$$

oder:

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = 1 + \tfrac{1}{45} \operatorname{tg} \alpha^4,$$

und es werden α und α' auf fünf, bezüglich sieben Decimalstellen übereinstimmen, wenn man hat:

$$\tfrac{1}{45} \operatorname{tg} \alpha^4 < 0{,}00001 \quad \text{oder} \quad < 0{,}0000001$$

d. h.:

$$\operatorname{tg} \alpha < \sqrt[4]{0{,}00045} \quad \text{oder} \quad < \sqrt[4]{0{,}0000045},$$

d. h. bis zur Grenze:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}15 \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0046,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha = 8^\circ\ 32', \quad \alpha = 2^\circ\ 38'.$$

Bis zu diesen Grenzen ist also die Formel als genau zu betrachten. Es folgt aus derselben sogleich:

$$\lg \alpha = \lg \operatorname{tg} \alpha + \tfrac{2}{3} \lg \cos \alpha,$$

und da $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ ist:

$$\alpha = \sin \alpha \cos \alpha^{-\frac{1}{3}},$$

$$\lg \alpha = \lg \sin \alpha - \tfrac{1}{3} \lg \cos \alpha.$$

Hier ist α in Bogenmaass gegeben. Setzen wir jetzt Secunden voraus, dann ist α zu vertauschen mit $\frac{\pi \alpha}{180 \cdot 60 \cdot 60}$, also da man hat:

$$\begin{array}{rr} \lg 180 = & 2,2552725 \\ \lg 60^2 = & 3,5563025 \\ \hline - & 5,8115750 \\ \lg \pi = & 0,4971499 \\ \hline & 5,3144251 = -4,6855749 + 10. \end{array}$$

Es ist also $\lg \alpha$ zu vertauschen mit:

$$\lg \alpha - 5,3144251,$$

so dass man hat:

1) $\lg \alpha = -4,6855749 + 10 + \lg \sin \alpha - \tfrac{1}{3} \lg \cos \alpha,$

2) $\lg \alpha = -4,6855749 + 10 + \lg \operatorname{tg} \alpha + \tfrac{2}{3} \lg \cos \alpha,$

3) $\lg \sin \alpha = \lg \alpha + 4,6855749 - 10 + \tfrac{1}{3} \lg \cos \alpha,$

4) $\lg \operatorname{tg} \alpha = \lg \alpha + 4,6855749 - 10 - \tfrac{2}{3} \lg \cos \alpha.$

Man kann diese Formeln direct anwenden.

Die beiden ersten geben für irgend einen gegebenen $\lg \sin \alpha$ und $\lg \operatorname{tg} \alpha$ den Logarithmus des zugehörigen Bogens in Secunden. Um den Bogen selbst zu haben, ist dann die Benutzung der gemeinen Logarithmen nöthig. Ist dagegen α gegeben, so kann man $\lg \alpha$ in dieser letztern Tafel aufschlagen, und indem man das letzte Glied der Formeln 3) und 4) ausser Acht lässt, zunächst einen angenäherten Werth von $\lg \operatorname{tg} \alpha$ und $\lg \sin \alpha$ berechnen, fügt man den aus diesen vermöge der trigonometrischen Tafeln sich ergebenden Werth von $\tfrac{1}{3} \lg \cos \alpha$, bezüglich $-\tfrac{2}{3} \lg \cos \alpha$ hinzu, so hat man den genauen Werth. Dies ist aber etwas umständlich, insofern jedesmal in zwei Tafeln eingegangen werden muss. Es ist daher folgende Methode angemessen.

Zunächst ist zu bemerken, dass der Cosinus von α, und mithin auch dessen Logarithmus für kleine Winkel sich nur sehr langsam ändert. Dies kann man folgendermaassen zeigen.

Es ist:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

$$\cos(\alpha + \nu) = 1 - \frac{(\alpha + \nu)^2}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \nu,$$

also abgesehen von Gliedern höherer Dimensionen:

$$\frac{\cos(\alpha + \nu)}{\cos \alpha} = \frac{1 - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \nu}{1 - \frac{\alpha^2}{2}} = 1 - \alpha \nu,$$

$$\lg \cos(\alpha + \nu) = \lg \cos \alpha - \alpha \nu,$$

und beide Logarithmen unterscheiden sich erst von einander, wenn:

$$\alpha \nu > 0,00001 \quad \text{oder} \quad > 0,0000001$$

ist. D. h. wenn man Winkelmaass und zwar Minuten einführt:

$$\alpha \nu > \frac{180^2 60^2}{\pi^2} \, 0,00001, \quad \text{oder} \quad > \frac{180^2 60^2}{\pi^2} \, 0,0000001,$$

woraus sich als Grenze ergibt:

$$\nu = \frac{86,9}{\alpha} \quad \text{oder} \quad = \frac{0,869}{\alpha}.$$

Die Anwendnng der Formeln 1) bis 4) findet nnn mit Vortheil für fünfzifferige Logarithmen für die ersten 2°, für siebenzifferige für die ersten $30'$ statt, und es ist für $\alpha = 120'$ und $\alpha = 30'$ bezüglich:

$$\nu = 0,72' \quad \text{nnd} \quad \nu = 0,029',$$

oder:

$$\nu = 43'' \quad \text{und} \quad \nu = 1'',7,$$

so dass selbst an der Grenze der Anwendnng sich für siebenzifferige Logarithmen der Werth von $\lg \cos \alpha$ nur etwa in 2 Secunden um eine Einheit ändert. Für kleinere Winkel findet diese Aenderung natürlich in noch grössern Intervallen statt. Es ist also sehr wohl thnnlich, für jedes α unter 30, bezüglich 120, den Ausdruck:

$$4,6855749 - 10 + \tfrac{1}{3} \lg \cos \alpha$$

in einer kleinen Tafel zu berechnen, die selbst für siebenzifferige Logarithmen nnr eine Seite einnimmt, für fünfzifferige kaum den zehnten Theil einer solchen. Auch können die Zahlen dieser Tafel mit Vortheil als Correction der Argumente auf die einzelnen Blätter einer gewöhnlichen Logarithmentafel vertheilt werden. Für jedes α gibt dann diese Tafel den $\lg \alpha$ und die abzuziehende Correction, und für jeden $\lg \sin \alpha$, nach Abzug der Correction (die Ziffern 4,68 . . ., die sich nicht ändern, müssen znerst abgezogen werden), erhält man den zugehörigen $\lg \alpha$, also mittels der Logarithmentafel α selbst, und ist in keine zweite Tafel hierbei einzugehen. Diese Rechnung gibt α auf sieben Decimalstellen.

Was die wirklichen Sinus u. s. w. anbetrifft, so werden diese namentlich bei Additionen und Subtractionen zu benützen sein; es wird daher nicht nöthig sein, dass sie sieben geltende Decimalstellen enthalten, sondern man kann sich mit sieben Bruchstellen begnügen, und bei solchen ist wenigstens für Sinus nnd Cosinus, selbst bei siebenzifferigen Tafeln, das Intervall von einer Minute, wie leicht zu zeigen ist, hinreichend klein. Die Tangenten allerdings, die ins Unendliche wachsen, würden, um sieben richtige Bruchstellen zu haben, eine ungemein langwierige Rechnung erfordern, wenn der Winkel nahe 90° ist. Jedoch sind solche Rechnungen in der Praxis kaum erforderlich.

7) Anwendungen der ebenen Trigonometrie.

Als Anwendnngen der trigonometrischen Formeln betrachten wir ans den Hauptfällen der Dreiecksberechnnng namentlich solche, wo in einem Dreiecke drei Stücke, die aber nicht grade Seiten oder Winkel sind, gegeben werden, ausserdem Aufgaben über Polygome von mehr als drei Seiten, und endlich einige practische Aufgaben. Zunächst aber wollen wir noch einige Formeln geben, die hierbei nützlich sind.

Führe eine Aufgabe auf die Formel:

$$A \cos \varphi \pm B \sin \varphi = c,$$

und sei hierans φ zu finden. Man verfährt am beqnemsten folgendermaassen. Man setzt:

$$\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \lambda,$$

der Winkel λ lässt sich dann sogleich finden, und die gegebene Gleichung hat dann die Gestalt:

$$B(\sin \lambda \cos \varphi \pm \cos \lambda \sin \varphi) = C \cos \lambda,$$

oder:

$$\sin(\lambda \pm \varphi) = \frac{C \cos \lambda}{B},$$

so dass $\lambda \pm \varphi$, also auch φ bekannt ist. Sei ferner die Formel gegeben:

$$A \operatorname{tg} \varphi + B \cot \varphi = C,$$

so nimmt diese die Gestalt an:

$$A \sin \varphi^2 + B \cos \varphi^2 = C \sin \varphi \cos \varphi,$$

oder:

$$A + (B - A) \cos \varphi^2 = C \sin \varphi \cos \varphi,$$

d. h.:

$$A + \frac{B - A}{2} (\cos 2\varphi + 1) = \frac{C}{2} \sin 2\varphi,$$

$$(B - A) \cos 2\varphi - C \sin 2\varphi = -(A + B).$$

Aus dieser Gleichnng ist nach der eben gegebenen Methode 2φ zu ermitteln.

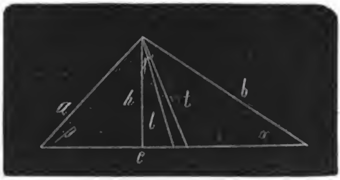
Wir wenden uns jetzt zn den Aufgaben. Bei den einfacheren lassen wir die Auflösung weg.

A) Dreieckaufgaben.

Der Abkürznng wegen gebranchen wir folgende Bezeichnungen.

Es sind a, b, c wieder die Seiten, α, β, γ die bezüglichen Gegenwinkel, h, h_1, h_2 die Höhen bezüglich auf c, b, a, m der Unterschied der Segmente, in welche h die Seite c theilt, t die Halbirungslinie der Seite c, von γ aus gezogen, l die Halbirungslinie des Winkels

Fig. 12.



γ bis zur Seite c, ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises (Fig. 12).

1) Gegeben: c, h, b.

$$\frac{h}{b} = \sin \alpha.$$

Alles Uebrige ist dann bekannt.

2) α, β, m.

Sind x, y die Segmente von c, so hat man:

$$x - y = m, \quad x + y = c, \quad x \operatorname{tg} \beta = y \operatorname{tg} \alpha,$$

also:

$$x \operatorname{tg} \beta = (x - m) \operatorname{tg} \alpha,$$

woraus sich x, somit auch y und c ergibt.

3) l, γ und $\frac{a}{b} = n$.

$$\sin \alpha = n \sin \beta,$$

d. h.:

$$\sin \alpha = n \sin (\alpha + \gamma).$$

Aus dieser Formel findet man γ, wobei die im Anfang dieses Abschnitts entwickelte Methode zur Anwendung kommt.

4) a, b, t.

Man ergänzt das Dreieck zum Parallelogramm, und hat dann ein zweites Dreieck, das a, b, $2t$ zu Seiten hat.

5) h, α, β.

$$c = h (\cot \beta + \cot \alpha) = h \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

6) h, α, c.

Die Lösung geschieht mittels der vorigen Formel.

7) h, α, a.

$$\frac{h}{a} = \sin \beta.$$

8) h, a, γ.

Theile die Höhe den Winkel γ in μ und ν, so ist:

$$\cos \nu = \frac{h}{a}, \quad b = \frac{h}{\sin (\gamma - \nu)}.$$

9) h, t, α.

Schneide t die Linie c unter Winkel ν, so ist:

$$t \sin \nu = h, \quad b \sin \alpha = h,$$

$$c = \frac{2t \sin (\alpha + \nu)}{\sin \alpha}.$$

10) h, t, a.

$$\frac{h}{a} = \sin \beta.$$

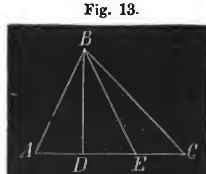
Das Uebrige ergibt sich wie in 4).

11) h, t, c.

$$t \sin \nu = h.$$

Man hat dann ein Dreieck, das t, $\frac{c}{2}$ zu Seiten und ν zum eingeschlossenen Winkel hat.

Fig. 13.



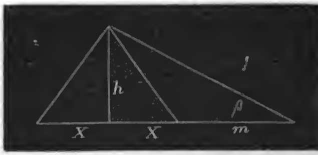
12) h, t, γ.

Sei (Fig. 13) $BD = h$, $BE = t$, $AE = x$, Winkel $ABE = \mu$, Winkel $DBE = \vartheta$, so ist:

$$\frac{h}{t} = \cos \vartheta, \quad \frac{x}{\sin \mu} = \frac{t}{\cos (\mu - \vartheta)},$$

$$\frac{x}{\sin (\gamma - \mu)} = \frac{t}{\cos (\gamma - \mu + \vartheta)},$$

Fig. 14.



also:

$$\sin(\gamma-\mu)\cos(\mu-\vartheta) = \sin\mu\cos(\gamma-\mu+\vartheta),$$

d. h.:

$$\sin(\gamma-\vartheta)+2\sin(\gamma+\vartheta-2\mu) = \cos(\gamma+\vartheta),$$

eine Gleichung, aus der sich μ, mithin auch $x=\frac{c}{2}$ ergibt.

13) h, l, γ.

Bilde l mit i den Winkel μ, so ist:

$$l\sin\mu = h,$$

und man hat ein Dreieck, worin Seite l und die Winkel μ und $\frac{\gamma}{2}$ gegeben sind.

14) h, l, α.

Der vorigen Aufgabe ähnlich.

15) h, l, a.

$$a\sin\beta = h.$$

β, a und l bilden dann ein Dreieck.

16) a, t, γ.

Aehnlich wie 4).

17) t, α, b.

t und c mögen den Winkel μ machen:

$$t\sin\mu = b\sin\alpha,\quad \frac{c}{2}\sin\mu = b\sin(\alpha+\mu).$$

18) t, α, c.

19) l, α, β.

20) l, a, b.

21) l, α, γ.

Diese Aufgaben sind leicht.

22) m, a, b.

Die Höhe theile c in x und $x+m$ (Fig. 14). Man hat dann ein Dreieck, welches m, a, b zu Seiten hat, aus dem sich β ergibt.

23) m, a, α.

24) m, a, β.

25) m, a, $\alpha-\beta$.

26) a, b, $\alpha-\beta$.

27) h_1, h_2, γ.

$$a\sin\gamma = h_1,\quad b\sin\gamma = h_2.$$

28) h_1, h_2, c.

$$c\sin\alpha = h_1,\quad c\sin\beta = h_2.$$

29) h_1, c, t.

$$c\sin\alpha = h_1.$$

t, α und c bilden dann ein Dreieck.

30) h_1, β, t.

31) h_1, γ, l.

$$a\sin\gamma = h_1.$$

a, l, $\frac{\gamma}{2}$ bilden ein Dreieck.

32) $a+b+c=s$, α, β.

Man hat:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

also:

$$s\sin\alpha = a(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma),$$

woraus sich a ergibt. Indess geben wir diesem Ausdruck eine für die logarithmische Rechnung bequemere Form:

$$\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma) = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\sin\beta+\sin\gamma = 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

also:

$$s\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = a\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right),$$

aber:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

ausserdem:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2},$$

also:

$$a = \frac{s \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Für b und c erhält man symmetrische Ausdrücke.

33) $c,\ \gamma,\ a+b=e$.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

$$e = \frac{c(\sin\alpha+\sin\beta)}{\sin\gamma} = \frac{c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

34) $c,\ \gamma,\ a-b=d$.

Aehnlich wie 33).

35) $c,\ \gamma,\ \frac{a}{b}=n$.

$$\frac{a}{b} = n = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta} = \cos\gamma + \cot\beta\sin\gamma.$$

36) $m,\ a+b=e,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

Die Figur in 22) enthält ein Dreieck mit Seiten, $m,\ a,\ b$, und Winkel $\alpha-\beta$. Die Aufgabe ist also nach 33) zu lösen.

37) $m,\ a-b,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

Wie 34).

38) $m,\ \frac{a}{b}=n,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

39) $c,\ a+b=e,\ \alpha$.

$$c[\sin\alpha+\sin(\alpha+\gamma)] = e\sin\gamma.$$

40) $c,\ a-b,\ \alpha$.

41) $m,\ \alpha,\ a+b$.

Die Betrachtungen in 22) und 36) sind hier wieder anzustellen.

42) $m,\ \alpha,\ a-b$.

Ebenso.

43) $c,\ a+b=e,\ \alpha-\beta$.

$$c\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

44) $a,\ a-b,\ \alpha-\beta$.

Aehnlich wie 43).

45) $m,\ a+b,\ \gamma$.

(Hülfsdreieck in 22).

46) $m,\ a-b,\ \gamma$.

Ebenso.

47) $c,\ h,\ \gamma$.

$$ch = ab\sin\gamma,\quad h = a\sin(\alpha+\gamma) = b\sin\alpha,$$

also:

$$c\sin(\alpha+\gamma)\sin\alpha = h\sin\gamma,$$

oder:

$$\frac{c}{2}(1-\cos2\alpha)\cos\gamma + \frac{c}{2}\sin2\alpha\sin\gamma = h\sin\gamma,$$

woraus sich 2α ergibt.

48) $c,\ h,\ h_1$.

49) $\gamma,\ h,\ h_1$.

50) $h_1,\ h_2,\ a+b=e$.

$$a\sin\gamma = h_1,\quad b\sin\gamma = h_2,$$
$$e\sin\gamma = h_1+h_2.$$

51) $h,\ a+b+c=s,\ \alpha$.

$$b = \frac{h}{\sin\alpha},\quad a = \frac{h}{\sin\beta},\quad c = \frac{h\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta},$$

also:

$$s\cdot\sin\alpha\sin\beta = h[\sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)],$$

woraus sich β ergibt.

52) $c,\ h,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

$$ch = ab\sin(\alpha+\beta),\quad h = a\sin\beta = b\sin\alpha,$$
$$c = \frac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

also:

$$c[\cos2\vartheta - \cos(\alpha+\beta)] = 2h\sin(\alpha+\beta),$$

woraus sich $\alpha+\beta$, also α und β ergibt.

53) $m,\ h,\ \alpha-\beta$.

(22.)

54) $m,\ h,\ \gamma$.

(52.)

55) $x,\ y,\ \gamma$.

$x,\ y$ sind hier die Theile, in welche das Loth h die Seite c theilt. Man hat:

$$\frac{x+y}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha},\quad a\cos(\alpha+\gamma) = x,$$

also:

$$(x+y)\sin\alpha\cos(\alpha+\gamma) = x\sin\gamma,$$

woraus sich 2α ergibt.

56) $x,\ y,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

$$(x+y)\sin(\beta+2\vartheta)\cos\beta = x\sin(\alpha+\beta).$$

57) $h,\ a+b+c=s,\ \alpha-\beta=2\vartheta$.

Verlängert man die Seite c um a nach einer Seite, um b nach der andern, und zieht von der Spitze nach den Endpunkten, so hat man ein Dreieck, wo Grundlinie s und Höhe h gegeben sind, und

$\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$ die anliegenden Winkel sind. Also wie 52).

58) h, h_1, h_2.

$$a \sin\beta = b \sin\alpha = h,$$
$$b \sin\gamma = c \sin\beta = h_2,$$
$$c \sin\alpha = a \sin\gamma = h_1,$$
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{h}{h_2}, \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{h_1}{h_2},$$

also:

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \frac{1}{h_2} : \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h}.$$

Es ergeben sich hiernach für α, β, γ ähnliche Ausdrücke, wie für die Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten, wenn man darin schreibt für a, b, c bezüglich: $\frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_1}, \frac{1}{h}$.

59) ϱ, c, γ.

(Es entsteht ein Dreieck, dessen Grundlinie c, Höhe ϱ, Winkel an der Spitze $R+\frac{\gamma}{2}$ ist. Also wie 47.)

60) $\varrho, c, \alpha-\beta$.

(52.)

61) $\varrho, \gamma, a-b$.

(54.)

62) $\varrho, a-b, \alpha-\beta$.

(53.)

63) c, t, γ.

Sei φ der Winkel zwischen t und a. Man hat:

$$\frac{t}{\sin a} = \frac{c}{2\sin\varphi}, \quad \frac{t}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{c}{2\sin(\gamma-\varphi)},$$
$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4t^2 \sin\varphi^2}{c^2}},$$

also:

$$(3\cos\gamma \sin\varphi - 2\sin\gamma\cos\varphi)^2 = \sin\gamma^2 (c^2 - 4t^2 \sin\varphi^2),$$

woraus sich 2φ ergibt.

64) $c, \gamma, a^2+b^2=g^2$.

$$g^2 - 2ab\cos\gamma = c^2,$$

also ab bekannt, folglich a und b.

65) $c, \gamma, a^2-b^2=h^2$.

$$c^2 + 4\,ab \sin\frac{\gamma^2}{2} = (a+b)^2,$$

$$h^4 = \left(c^2 + 4\,ab \sin\frac{\gamma^2}{2}\right)\left(c^2 - 4ab\cos\frac{\gamma^2}{2}\right),$$

also ab bekannt.

66) $c, \gamma, ab=p$.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2p\cos\gamma.$$

B) Vierecksaufgaben.

Von den 8 Stücken eines Vierecks, 4 Seiten und 4 Umfangswinkeln, müssen zu dessen Bestimmung 5, worunter wenigstens 2 Seiten, gegeben sein. Wir bezeichnen die Seiten nach der Reihe mit a, b, c, d, die Winkel bezüglich mit (ab), (bc), (cd), (da). Es sind nun sieben Fälle möglich.

1) Gegeben: a, b, c, (bc), (da).

Ziehe Diagonale AC, das Dreieck ABC ist dann vollständig bestimmt. Nach dessen Berechnung aber ist im Dreieck DAC Seite a, AC und Winkel (da) gegeben, also auch dies bestimmt.

2) a, b, c, (bc), (cd).

Wie oben. Das Dreieck ACD ist dann bestimmt durch a, AC und Winkel ACD.

3) a, b, c, (ab), (bc).

Wie oben. Dreieck ACD ist gegeben durch a, Winkel CDA und ACD.

4) a, b, c, d, (bc).

Ebenso. Im zweiten Dreieck sind alle Seiten gegeben.

5) b, c, (bc), (cd), (da).

Es ist also auch (ab) bekannt. Die Lösung wie oben.

6) a, b, c, (cd), (da).

Verlängere b um x (Fig. 15), d um y, bis sie sich schneiden; mögen x und y den Winkel φ machen, dann ist:

$$\frac{x}{\sin(da)} = \frac{a}{\sin\varphi}, \quad \frac{x+b}{\sin(cd)} = \frac{c}{\sin\varphi}.$$

Diese beiden Gleichungen geben x und φ, es sind somit auch die Winkel (ab) und (bc), y und $y+d$, also auch d bekannt.

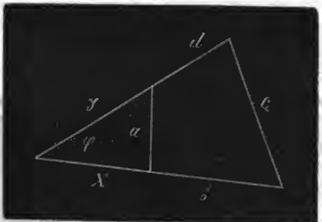
7) b, d, (ab), (bc), (cd).

Also auch (da) ist bekannt. Man hat:

$$\frac{x}{\sin(da)} = \frac{y}{\sin(db)}, \quad \frac{x+b}{\sin(cd)} = \frac{y+d}{\sin(bc)}.$$

Mithin ist x und y bekannt; also aus dem Dreiecke, welches x und y zu Sei-

Fig. 15.



ten hat, ergibt sich dann a, aus dem, welches $x+b$, $y+d$ zu Seiten hat, c.

Hiermit sind die Fälle, wo Seiten und Winkel eines Vierecks gegeben sind, erschöpft. Wir fügen noch einige andere Vierecksaufgaben hinzu.

8) Gegeben: a, b, (ab), (cd) und Diagonale AC.

Fig. 16.



Man lege durch D, B, C einen Kreis, dessen Mittelpunkt M sei. BD ist aus Dreieck ADB zu finden, sowie Winkel ADB und DBA, auch Winkel $BMD=2(cd)$ ist bekannt. Aus dem gleichschenkligen Dreieck DMB sind also die Winkel MBD, MDB und Seite BM zu finden. In Dreieck AMB kennt man zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ABM, also auch AM, Winkel BAM und AMB. Es ist daher auch Winkel AMD bekannt. In Dreieck AMC aber kennt man alle Seiten, also auch Winkel AMC. Im gleichschenkligen Dreieck ist also jetzt auch Winkel CMB nebst den einschliessenden Seiten bekannt, also auch c. In Dreieck DMC kennt man jetzt auch Winkel DMC und somit auch d.

9) Gegeben a, b, (ab), und die Winkel μ, ν, welche Diagonale AC bezüglich mit c und d macht (Fig. 16).

Sei Diagonale $BD=f$, so ist:

$$\frac{a}{\sin\mu}=\frac{f}{\sin(da)},$$

$$\frac{b}{\sin\nu}=\frac{f}{\sin[(ab)+(da)+\mu+\nu-2\mathrm{R}]},$$

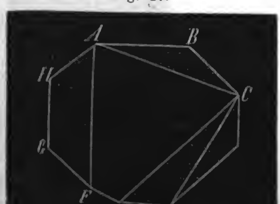
also f und (da) bekannt, woraus sich d und c ergeben.

C) Aufgaben über Polygone.

Ein n-Eck ist bestimmt, wenn $2n-3$ Stücke, Seiten oder Winkel, bekannt sind, worunter wenigstens $n-2$ Seiten. Es sind also drei Stücke zu bestimmen, und somit stellen sich folgende Fälle heraus (Fig. 17).

1) Gegeben alle Seiten bis auf eine, und alle Winkel bis auf zwei.

Fig. 17.



Seien A und C die Winkel, FE die Seite, welche nicht gegeben sind.

Man verbinde die vier Punkte *A*, *C*, *E*, *F*. Es entsteht ein Viereck, und ausserdem zerfällt die Figur in Polygone, welche sich durch Theilung in Dreiecke, z. B. *AHG*, *HGF* berechnen lassen. Es sind also auch die Seiten *AF*, *AC*, *CE* des Vierecks und die Winkel desselben bei *A* und *C* bekannt, woraus sich das Uebrige ergibt. — Liegen *A* und *C* an einer nicht gesuchten Seite, so ist diese *AC* direct gezogen. Liegen aber die gesuchten Winkel an der gesuchten Seite *FE*, so ziehe man *FD*, und in Dreieck *FED* sind *FD*, *ED* und der eingeschlossene Winkel bekannt.

2) Gegeben alle Seiten bis auf zwei, alle Winkel bis auf einen.

Der letzte Winkel, welcher die übrigen zu $2n-4$ Rechte ergänzt, kann bestimmt werden. Seien *AB* und *FE* die Seiten, so ziehe man *AF* und *BE*. Es entsteht ein Viereck *AFBE*, die Seiten *AF*, *BE* kann man aus den umgebenden Polygonen berechnen, ebenso wie die Viereckswinkel, so dass Alles bekannt ist.

3) Gegeben alle Seiten und alle Winkel bis auf drei.

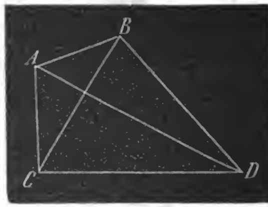
Seien *A*, *C*, *E* die Winkel. Man sondert das Dreieck *ACE* ab, dessen Seiten sich durch die umgebenden Polygone finden lassen.

D) Einige practische Aufgaben.

1) Die Grösse einer Linie zu finden, deren beide Endpunkte unzugänglich sind (Fig. 18).

Sei *AB* die Linie. Man messe die beliebige Standlinie *CD*, und durch Vi-

Fig. 18.

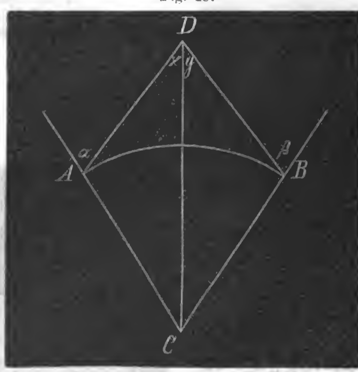


siren von *C* nach *A* und *B*, und von *D* nach *A* und *B* findet man die Winkel *ADC*, *BDC*, *ACD*, *BCD*. Jetzt entnimmt man:

1) aus Dreieck *ADC* Seite *AD*,
2) aus Dreieck *CDB* Seite *DB*,
3) aus Dreieck *ADB* Seite *AB*.

2) Die Höhe eines Punktes (Wolke oder Gestirn) über der Erde zu finden (Fig. 19).

Fig. 19.



Sei $AC=r$ der Erdradius, *D* der Punkt über der Erde. Winkel α und β werden durch Visiren von zwei Punkten *A* und *B* nach *D* gefunden. Es sind dies die Winkel der Zenithe dieser Orte mit den Gesichtslinien von *D*. Winkel

ACB ist ebenfalls gegeben. Liegen z. B. A und B auf einem Meridian, so ist ACB der Längenunterschied von AB. Sei Winkel $ADC = x$, Winkel $CDB = y$, Winkel $ADB = \delta$, so ist δ bekannt, $DC = a$ gesucht. Man hat:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin x}, \quad \frac{a}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin y},$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin x}{\sin y},$$

oder:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y},$$

d. h.:

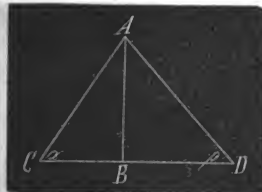
$$\cot\frac{\alpha+\beta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \cot\frac{\delta}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{x-y}{2}.$$

Es ist also $x-y$ bekannt, was wegen $x+y=\delta$ die Winkel x und y gibt, und:

$$a = \frac{r\sin\alpha}{\sin x}.$$

3) Die Höhe eines Punktes A über der Horizontalen BD zu finden (Fig. 20). Man misst das beliebige Stück CD

Fig. 20.



der Horizontalen. Durch Visiren findet man die Winkel α und β; dann ist:

$$\text{Höhe } AB = CA \sin\alpha = CD\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

4) Es ist ein Punkt D zu finden, wenn man von ihm aus nach drei bekannten A, B, C visiren, nicht aber messen kann.

Dies ist die sogenannte Potenot'sche Aufgabe. Man kennt die drei Seiten a, b, c des Dreiecks ABC und folglich auch dessen übrige Stücke, ausserdem die Visirwinkel λ, μ, ν. Gesucht sind die Linien $DA = x$, $DB = y$, $DC = z$.

Sei Winkel $CAD = \vartheta$. Man hat:

$$\frac{b}{\sin\mu} = \frac{z}{\sin\vartheta}, \quad \frac{a}{\sin\lambda} = \frac{z}{\sin(\nu-\gamma-\vartheta)},$$

also:

$$\frac{b\sin\lambda}{a\sin\mu} = \frac{\sin(\nu-\gamma-\vartheta)}{\sin\vartheta} = \sin(\nu-\gamma)\cos\vartheta - \cos(\nu-\gamma).$$

Hieraus ergibt sich ϑ, und man hat:

$$z = \frac{b\sin\vartheta}{\sin\mu}, \quad x = \frac{b}{\sin\mu}\sin(\mu+\vartheta), \quad y = \frac{a}{\sin\lambda}\sin(\gamma+\mu+\vartheta-2\,\mathrm{R}).$$

8) Sphärische Trigonometrie.

Die sphärische Trigonometrie lehrt, drei von den Stücken eines sphärischen Dreiecks, worunter auch, im Gegensatz zur ebenen Trigonometrie, die drei Winkel sein können, die übrigen durch Rechnung zu finden.

Wir bezeichnen, wie in der ebenen Trigonometrie, die Seiten mit a, b, c, ihre Gegenwinkel bezüglich mit α, β, γ. Sei (Fig. 21) C eine körperliche Ecke, ABC das zugehörige sphärische Dreieck. Ziehe von C aus Tangente CF und CE bezüglich an die Bogen CB und CA, so ist Winkel $FCA = \gamma$, $CE = \mathrm{tg}\,b$, $CF = \mathrm{tg}\,a$, also im ebenen Dreieck ECF:

$$EF^2 = \mathrm{tg}\,a^2 + \mathrm{tg}\,b^2 - 2\,\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\cos\gamma.$$

Im ebenen Dreieck EOF aber ist:

$$EO = \sec b, \quad FO = \sec a, \quad \text{Winkel } EOF = C,$$

also:

$$\sec a^2 + \sec b^2 - 2\sec a\sec b\cos c = EF^2,$$

also:

$$\sec a^2 + \sec b^2 - 2\sec a\sec b\cos c = \mathrm{tg}\,a^2 + \mathrm{tg}\,b^2 - 2\,\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b\cos\gamma,$$

und da:

Fig. 21.



$$1+\mathrm{tg}\, a^2=\sec a^2$$

ist:

$$1-\sec a \sec b \cos c=-\mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b \cos \gamma,$$

und weil:

$$\sec \vartheta=\frac{1}{\cos \mu}, \quad \mathrm{tg}\, \vartheta=\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta}$$

ist:

1) $$\cos a \cos b+\sin a \sin b \cos \gamma=\cos c.$$

Dies ist die Grundformel, aus der sich alle andern analytisch entwickeln lassen. Man hat demnach:

$$\cos \gamma=\frac{\cos c-\cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

$$\cos \gamma^2=\frac{\cos c^2+\cos a^2 \cos b^2-2 \cos a \cos b \cos c}{\sin a^2 \sin b^2},$$

$$1-\cos \gamma^2=\sin \gamma^2=\frac{\sin a^2 \sin b^2-\cos a^2 \cos b^2-\cos c^2+2 \cos a \cos b \cos c}{\sin a^2 \sin b^2}$$

$$=\frac{1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2 \cos a \cos b \cos c}{\sin a^2 \sin b^2},$$

also:

A) $$\frac{\sin \gamma}{\sin c}=\frac{\sqrt{(1-\cos a^2-\cos b^2-\cos c^2+2 \cos a \cos b}}{\sin a \sin b \sin c}.$$

Diese Formel zeigt, dass sich der Ausdruck $\frac{\sin \gamma}{\sin c}$ nicht ändert, wenn man c mit a oder b, also γ mit α oder β vertauscht. Es ist somit:

2) $$\frac{\sin \alpha}{\sin a}=\frac{\sin \beta}{\sin b}=\frac{\sin \gamma}{\sin c}.$$

Verbinden wir jetzt mit der Formel 1) die folgende, die daraus durch Vertauschung von b mit c, und von β mit γ entsteht:

$$\cos a \cos c+\sin a \sin c \cos \beta=\cos b,$$

multipliciren die Formel 1) mit $\cos a$, und zählen die letzte Formel hinzu, so kommt:

$$\cos a^2 \cos b+\cos a \sin a \sin b \cos \gamma+\sin a \sin c \cos \beta=\cos b,$$

oder:

$$\cos b \sin a^2 = \cos a \sin a \sin b \cos \gamma + \sin a \sin c \cos \beta.$$

Hebt man $\sin a$ weg:

B) $$\cos b \sin a = \cos a \sin b \cos \gamma + \sin c \cos \beta,\ \sin c = \frac{\sin b \sin \gamma}{\sin \beta},$$

so kommt:

$$\cos b \sin a \sin \beta = \cos a \sin \beta \cos \gamma \sin b + \cos \beta \sin \gamma \sin b,$$

also wenn man mit $\sin b \sin \beta$ dividirt:

3) $$\cot b \sin a \sin \gamma \cot \beta + \cos a \cos \gamma.$$

Setzen wir jetzt in *B*):

$$\sin a = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin \beta},$$

so kommt:

$$\cos b \sin b \sin \alpha = \cos a \sin \beta \cos \gamma \sin b + \cos \beta \sin \gamma \sin b,$$

also:

C) $$\cos b \sin \alpha = \cos a \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma,$$

und hieraus, wenn man a mit b, α mit β vertauscht:

$$\cos a \sin \beta = \cos b \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma,$$

also wenn die vorletzte Formel mit $\cos \gamma$ multiplicirt, und zur letzten addirt wird:

$$\cos a \sin \beta = \cos a \sin \beta \cos \gamma^2 + \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma,$$

oder:

$$\cos a \sin \beta \sin \gamma^2 = \cos \beta \sin \gamma \cos \gamma^2 + \cos \alpha \sin \gamma,$$

also wenn man $\sin \gamma$ weghebt:

4) $$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a.$$

Die Formeln 1) bis 4) reichen hin, um jede Aufgabe der sphärischen Trigonometrie zu lösen.

Es sind nämlich sechs Fälle möglich:

1) Gegeben alle drei Seiten: a, b, c.

Formel 1) gibt einen beliebigen Winkel.

2) Gegeben zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel: a, b, γ.

Formel 1) gibt die dritte Seite c, Formel 3) Winkel β, also auch α, wenn man a mit b, α mit β vertauscht.

3) Gegeben zwei Seiten und ein Gegenwinkel: a, b, α.

Formel 2) gibt β, Formel 3) γ, Formel 1), wenn man a mit c, α mit γ vertauscht, c.

4) Gegeben zwei Winkel und die eingeschlossene Seite: β, γ, a.

Formel 4) gibt α, Formel 3) b und dieselbe Formel c, wenn man β mit γ, b mit c vertauscht.

5) Gegeben zwei Winkel und eine Gegenseite: β, γ, b.

Formel 2) gibt c, Formel 3) a, Formel 4) α, wenn man a mit b, α mit β vertauscht.

6) Gegeben alle Winkel: α, β, γ.

Formel 4) gibt eine beliebige Seite.

Es ist bei diesen Auflösungen öfter auf die im vorigen Abschnitte gegebene Auflösung der Gleichung:

$$A \cos \varphi \pm B \sin \varphi = C$$

zurückzukommen.

Wir geben jetzt diese Auflösungen in Form einer Tafel:

Gegeben	Gesucht
1) $a,\ b,\ c$	$\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$, $\cos\beta=\frac{\cos b-\cos a\cos c}{\sin a\sin c}$, $\cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$
2) $a,\ b,\ \alpha$	$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$, $(\cot\varphi=\operatorname{tg} b\cos\alpha)$, $\sin(c+\varphi)=\frac{\cos a\sin\varphi}{\cos b}$, $(\operatorname{tg}\psi=\cos b\operatorname{tg}\alpha)$, $\sin(\gamma+\psi)=\cot a\operatorname{tg} b\cos\psi$
3) $a,\ b,\ \gamma$	$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$, $\cot\alpha=\frac{\cot a\sin b-\cos\gamma\cos b}{\sin\gamma}$, $\cot\beta=\frac{\cot b\sin a-\cos\gamma\cos a}{\sin\gamma}$,
4) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$	$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\cos b=\frac{\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$, $\cos c=\frac{\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$
5) $a,\ \alpha,\ \beta$	$\sin b=\frac{\sin a\sin\beta}{\sin\alpha}$, $(\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\beta\cos a)$, $\cos(\varphi+\gamma)=-\frac{\cos\alpha\cos\varphi}{\cos\beta}$, $(\cot\psi=\operatorname{tg} a\cos\beta)$, $\cos(\psi+c)=-\operatorname{tg}\beta\cot\alpha\cos\varphi$
6) $\alpha,\ \beta,\ c$	$\cot b=\frac{\sin\alpha\cot\beta+\cos c\cos\alpha}{\sin c}$, $\cot a=\frac{\sin\beta\cot\alpha+\cos c\cos\beta}{\sin c}$, $\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$

In diesen Auflösungen bleibt aber nur in wenigen Fällen die logarithmische Rechnung ununterbrochen. Dennoch sind sie sehr wohl zur Berechnung geeignet, wenn nur eins der nicht gegebenen Stücke gesucht wird. Sind aber alle gesucht, so thut man besser, sich bequemere Formeln abzuleiten. Die Formel 1):

$$\cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$

kann man zu 1 zuzählen, und davon abziehen. Man erhält:

$$1+\cos\gamma=\frac{\cos c-\cos(a+b)}{\sin a\sin b}=\frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin a\sin b},$$

$$1-\cos\gamma=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\sin a\sin b}=\frac{2\sin\frac{a+c-b}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin a\sin b}.$$

Also da:

$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}},\quad \sin\gamma=\sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}$$

und wenn man:

$$\frac{a+b+c}{2}=s$$

setzt, so ist:

I) $$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}},$$

II) $$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},$$

und durch Division:

III) $$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}.$$

Sind alle drei Winkel gesucht, so kann man, analog der Formel in der ebenen Trigonometrie setzen:

D) $$\varphi=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

wo sich dann ergibt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-a)},\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-b)},\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-c)}.$$

Aehnlich verfährt man mit der Formel 4):

$$\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$1+\cos a=\frac{\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$1-\cos a=-\frac{\cos\alpha-\cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}=-\frac{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}}{\sin\beta\sin\gamma},$$

also wenn man setzt:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sigma:$$

IV) $$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

V) $$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

VI) $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}},$$

also wenn man setzt:

E) $$\psi=\sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}},$$

6) $$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\psi\cos(\sigma-\alpha),\quad \operatorname{tg}\frac{b}{2}=\psi\cos(\sigma-\beta),\quad \operatorname{tg}\frac{c}{2}=\psi\cos(\sigma-\gamma).$$

Die Formeln 5) und 6) lösen die Aufgaben 1) und 4) der obigen Tafel sehr bequem auf. Entwickeln wir jetzt nach I) und II) noch $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, so kommt:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}},$$

also:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2},$$

und ebenso:

$$\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Durch Addition und Subtraction dieser Formeln ergibt sich:

$$\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin c}[\sin(s-b)\pm\sin(s-a)],$$

und da man hat:

$$\sin(s-b)+\sin(s-a)=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2},$$

$$\sin(s-b)-\sin(s-a)=2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a-b}{2},$$

$$\sin c=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2},$$

ergibt sich:

7) $$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

8) $$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Ferner hat man:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin s}{\sin v}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2},$$

woraus folgt:

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin c}[\sin s\mp\sin(s-c)],$$

$$\sin s+\sin(s-c)=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2},$$

$$\sin s-\sin(s-c)=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2},$$

also:

9) $$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

10) $$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Die Formeln 7) bis 10), deren Wichtigkeit Gauss gezeigt hat, werden gewöhnlich die Gauss'schen genannt.

Durch Division von 7) durch 9), 8) durch 10), und 7) durch 8), 9) durch 10), folgt aus ihnen:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}},$$

13) $$\cot\frac{a-b}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

14) $$\cot\frac{a+b}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{c}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Sie werden die Nepper'schen Analogien genannt. — Sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, a, b, γ, so gibt 7) und 9):

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2},\qquad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2},$$

also durch Division $\alpha+\beta$ und dann c; ferner gibt 8 und 10):

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2},\qquad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}.$$

also durch Division $\alpha-\beta$. Es ist also α und β, sowie c bekannt. Aus einer der letzten Formeln ist dann auch leicht eine Probe herzuleiten. Aehnliches ergibt sich aus den Formeln 11) bis 14). Aus diesen, oder 7) bis 10), ist auch ganz analog der Fall zu behandeln, wo zwei Winkel und die eingeschlossene Seite, also α, β und c gegeben sind. Diesen Formeln entnehmen wir eine zweite Tafel für die sphärischen Dreiecke.

Gegeben	Gesucht	Probe
1) a, b, c	$\varphi=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$, $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-a)}$, $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-b)}$, $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varphi}{\sin(s-c)}$,	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$
2) a, b, α	$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{a}$, $A=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $B=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$, $\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\frac{B}{A}$, $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{c}{2}}{A}$	$\sin\frac{c}{2}=B\sin\frac{\gamma}{2}$
3) a, b, γ	$A=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, $B=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, $C=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$, $D=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$. $\mathrm{tg}\,u=\frac{B}{A}$, $\mathrm{tg}\,v=\frac{D}{C}$, $\alpha=u+v$, $\beta=u-v$, $\cos\frac{c}{2}=\frac{B}{\sin u}$, oder $\sin\frac{c}{2}=\frac{D}{\sin v}$,	$A=\cos\frac{c}{2}\cos u$, oder: $C=\sin\frac{c}{2}\cos v$,
4) α, β, γ	$\psi=\sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$, $\mathrm{tg}\frac{a}{2}=\psi\cos(\sigma-\alpha)$, $\mathrm{tg}\frac{b}{2}=\psi\cos(\nu-\beta)$, $\mathrm{tg}\frac{c}{2}=\psi\cos(\sigma-\gamma)$	$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$

Gegeben	Gesucht	Probe
5) a, α, β	$\sin b = \frac{\sin a \sin \beta}{\sin \alpha}$, $A = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}$, $B = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$,	$\sin \frac{c}{2} = B \sin \frac{\gamma}{2}$
	$\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{B}{A}$, $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \frac{c}{2}}{A}$	
6) α, β, c	$A = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{c}{2}$, $B = \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{c}{2}$, $C = \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{c}{2}$, $D = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \sin \frac{c}{2}$, $\operatorname{tg} u = \frac{B}{A}$, $\operatorname{tg} v = \frac{D}{C}$, $a = u+v$, $b = u-v$, $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{B}{\sin u}$, oder: $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{D}{\sin v}$	$A = \sin \frac{\gamma}{2} \cos u$, oder: $C = \cos \frac{\gamma}{2} \cos v$

Jeder Winkel und jede Seite eines sphärischen Dreiecks wird so genommen, dass sie kleiner als π ist. Die Formeln, welche die trigonometrischen Linien der halben Seiten und Winkel geben, haben also Argumente, die im ersten Quadranten liegen, und ist daher keine Zweideutigkeit vorhanden.

Der Ausdruck u in 3) und 6), welcher gleich $\frac{\alpha+\beta}{2}$ oder $\frac{a+b}{2}$ ist, enthält ein Argument, das kleiner als π ist, und da die Tangente im ersten Quadranten ein anderes Vorzeichen hat, als im zweiten, so ist auch hier keine Zweideutigkeit. Eine solche ist also nur vorhanden in den Formeln in 2) und 4), die β aus a, b, α, und b aus α, β, a geben, wo in der That im Allgemeinen zwei Dreiecke möglich sind. Jedoch sind diese Fälle noch etwas zu determiniren.

Die Formel 8) zeigt, dass $a-b$ und $\alpha-\beta$ immer gleiches Zeichen haben, die Formel 9), dass $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{\alpha+\beta}{2}$ gleichzeitig spitze oder stumpfe Winkel sind. Ist also:

I) $$a+b=180^\circ,$$

so ist auch:

$$\alpha+\beta=180^\circ,$$

also wenn $\alpha<90^\circ$, $\beta>90^\circ$, und umgekehrt:

II) $$a+b<180^\circ,$$

so ist für $\alpha=90^\circ$: $\beta<90^\circ$; für $\alpha<90^\circ$ ist β unbestimmt, jedoch darf β nicht gleich oder grösser als $180^\circ-\alpha$ sein, für $\alpha>90^\circ$ ist $\beta<90^\circ$.

III) $$a+b>180^\circ,$$

für $\alpha=90^\circ$ ist $\beta>90^\circ$, für $\alpha<90$, $\beta>90$, für $\alpha>90^\circ$ ist β unbestimmt, kann jedoch nicht gleich oder kleiner als $180^\circ-\alpha$ sein.

Hiermit sind die Fälle, wo zwei Dreiecke möglich sind, genau angegeben.

Für den Fall, dass α, β, a gegeben sind, braucht man in dieser Determination nur α mit a, β mit b zu vertauschen.

Sehr einfach werden die Formeln 1) und 4), wenn ein Winkel ein rechter oder eine Seite ein Quadrant ist. Sei im ersten Falle $c=h$ die Hypotenuse, also γ der rechte Winkel. Es werden dann Formeln 1) bis 4):

1a) $\cos a \cos b = \cos h$,

2a) $\sin a = \sin h \sin \alpha$,

3a) $\sin a = \operatorname{tg} b \cot \beta$,

3b) $\cos \beta = \operatorname{tg} a \cot h$,

4a) $\cos \alpha = \sin \beta \cos a$,

4b) $\cos h = \cot \alpha \cot \beta$.

Die Formel 3b) entsteht aus 3), indem man b mit c, β mit γ vertauscht, 4b) aus 4), indem man a mit c, α mit γ vertauscht. 1a), 2a), 3a), 4a) entsprechen genau den Formeln 1), 2), 3), 4).

Für diese sechs Formeln, in welchen die Theorie der rechtwinkligen Dreiecke enthalten ist, gibt Nepper, der Erfinder

der Logarithmen, eine sinnreiche Gedächtnissregel. Diese Formeln kann man nämlich schreiben:

$$\cos h = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \cot\alpha\cot\beta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin h \sin\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot\beta,$$

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right)\cot h.$$

Das rechtwinklige Dreieck besteht nun, mit Hinweglassung des rechten Winkels, aus fünf Stücken, deren Reihenfolge ist: a, b, α, h, β.

Zu jedem Stücke gehören zwei anliegende und zwei getrennte, z. B. zu a die anliegenden b, β, die getrennten α, h. Sonach ergibt sich durch Vergleich der Formeln die Regel:

„Wird der rechte Winkel nicht berücksichtigt, und die Catheten a und b durch ihre Complemente ersetzt, so ist der Cosinus jedes Stückes gleich dem Producte der Sinus der anliegenden, und der Cotangenten der getrennten Stücke."

Wir geben jetzt noch die Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke in Form einer Tafel.

Gegeben	Gesucht	Probe
1) h, a	$\cos b = \frac{\cos h}{\cos a}$, $\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin h}$, $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} h}$	$\cos\beta = \sin\alpha\cos b$
2) a, b	$\cos h = \cos a\cos b$, $\cot\alpha = \sin b\cot a$, $\cot\beta = \sin a\cot b$	$\cos h = \cot\alpha\cot\beta$
3) h, α	$\sin a = \sin h\sin\alpha$, $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} h\cos\alpha$, $\cot\beta = \cos h\operatorname{tg}\alpha$	$\sin a = \operatorname{tg} b\cot\beta$
4) a, α	$\sin h = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$, $\sin b = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\sin\beta = \frac{\cos\alpha}{\cos a}$	$\sin b = \sin h\sin\beta$
5) a, β	$\cot h = \cot a\cos\beta$, $\cot b = \frac{\cot\beta}{\sin a}$, $\cos\alpha = \sin\beta\cos a$	$\cot h = \cos\alpha\cot b$
6) α, β	$\cos h = \cot\beta\cot\alpha$, $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, $\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$	$\cos h = \cos a\cos b$

Zweideutigkeiten lässt diese Tafel nur da, wo der gesuchte Winkel durch einen Sinus ausgedrückt ist. Dies ist in 1) der Winkel α. Wegen der Formel: $\sin b = \operatorname{tg} a\cot\alpha$ haben nun $\operatorname{tg} a$ und $\operatorname{tg}\alpha$ immer gleiches Zeichen, sind also gleichzeitig spitz und stumpf, womit α völlig determinirt ist. — Ferner sind unbestimmt: In 3) a, da aber α gegeben ist, so findet nach dem eben Gesagten auch hier völlige Determination statt.

In 4) bleiben h, b und β unbestimmt. Was zunächst h anbetrifft, so ist die Determination ein besonderer Fall der beim schiefwinkligen Dreieck durchgeführten, und entspricht dem Falle, wo einer der Winkel 90° beträgt.

Da nämlich $\alpha+\gamma$ oder $\alpha+90$ und $a+h$ gleichzeitig kleiner und grösser als zwei Rechte sind, so ist $a+h$ grösser oder kleiner als zwei Rechte, je nachdem α grösser oder kleiner als ein Rechter ist. Ist aber α gleich einem Rechten, so sind a und h auch gleich $\frac{\pi}{2}$. Ist dagegen $\alpha < 90°$, so ist auch $a < 90°$, also h unbestimmt. Es kann aber h nicht gleich oder grösser als $180 - a$ sein. Ist $\alpha > 90°$, so ist $a > 90°$, und h auch unbestimmt, nur kann nicht h gleich oder kleiner als $180 - a$ sein.

Wegen der Formel: $\operatorname{tg} b\cot h = \cos\alpha$ ist nun b mit h gleichzeitig stumpf oder spitz, wenn α spitz ist, dagegen ist b nicht wie h beschaffen, d. h. stumpf, wenn h spitz ist, und umgekehrt, falls α stumpf ist. Nach der Bestimmung von h ist also auch b bestimmt. Der Quadrant von β aber ist nach dem Obigen der von b.

Es soll jetzt zu jedem der Fälle ein Rechnungsschema gegeben werden, wo-

bei wir fünfzifferige Logarithmen anwenden, die nur in seltenen Fällen nicht ausreichen.

Rechtwinklige Dreiecke.

1) $h = 62^\circ\, 17'\, 31''$
$a = 44^\circ\, 19'\, 4''$

$\lg\cot h = 9{,}72033 - 10$
$\lg\cot a = 0{,}01034$
$\lg\cos\beta = 9{,}70998 - 10$

$\lg\cos h = 9{,}66743 - 10$
$\lg\cos a = 9{,}85459 - 10$
$\lg\cos b = 9{,}81284 - 10$

$\lg\sin a = 9{,}84425 - 10$
$\lg\sin h = 9{,}94711 - 10$
$\lg\sin\alpha = 9{,}89714 - 10$

$\beta = 59^\circ\, 8'\, 50''$,
$b = 49^\circ\, 28'\, 0''$,
$\alpha = 52^\circ\, 6'\, 12''$.

Probe.

$\lg\sin\alpha = 9{,}89714 - 10$
$\lg\cos b = 9{,}81284 - 10$
$\lg\cos\beta = 9{,}70998 - 10$

2) $a = 44^\circ\, 19'\, 4''$,
$b = 49^\circ\, 28'\, 0''$.

$\lg\sin a = 9{,}84425 - 10$
$\lg\cot b = 9{,}93201 - 10$
$\lg\cot\beta = 9{,}77626 - 10$

$\lg\cos a = 9{,}85459 - 10$
$\lg\cos b = 9{,}81284 - 10$
$\lg\cos h = 9{,}66743 - 10$

$\lg\sin b = 9{,}88083 - 10$
$\lg\cot a = 0{,}01034$
$\lg\cot\alpha = 9{,}89117 - 10$

$\beta = 59^\circ\, 8'\, 46''$,
$h = 62^\circ\, 17'\, 31''$,
$\alpha = 52^\circ\, 6'\, 19''$.

Probe.

$\lg\cot\alpha = 9{,}89117 - 10$
$\lg\cot\beta = 9{,}77626 - 10$
$\lg\cos h = 9{,}66743 - 10$

3) $h = 62^\circ\, 17'\, 31''$,
$\alpha = 52^\circ\, 6'\, 10''$.

$\lg\cos h = 9{,}66743 - 10$
$\lg\operatorname{tg}\alpha = 0{,}10883$
$\lg\cot\beta = 9{,}77626 - 10$

$\lg\sin h = 9{,}94711 - 10$
$\lg\sin\alpha = 9{,}89714 - 10$
$\lg\sin a = 9{,}84425 - 10$

$\lg\operatorname{tg} h = 0{,}27968$
$\lg\cos\alpha = 9{,}78834 - 10$
$\lg\operatorname{tg} b = 0{,}06802$

$\beta = 59^\circ\, 8'\, 50''$,
$a = 44^\circ\, 19'\, 4''$,
$b = 49^\circ\, 28'\, 0''$.

Probe.

$\lg\operatorname{tg} b = 0{,}06802$
$\lg\cot\beta = 9{,}77626 - 10$
$\lg\sin a = 9{,}84428 - 10$

4) $a = 44^\circ\, 19'\, 4''$,
$\alpha = 52^\circ\, 6'\, 12''$.

$\lg\cos\alpha = 9{,}78834 - 10$
$\lg\cos a = 9{,}85459 - 10$
$\lg\sin\beta = 9{,}93375 - 10$

$\lg\sin a = 9{,}84425 - 10$
$\lg\sin\alpha = 9{,}89714 - 10$
$\lg\sin h = 9{,}94711 - 10$

$\lg\operatorname{tg} a = 9{,}98966 - 10$
$\lg\operatorname{tg}\alpha = 0{,}10883$
$\lg\sin b = 9{,}88083 - 10$

$\beta = 59^\circ\, 9'\, 0''$,
$h = 62^\circ\, 17'\, 31''$,
$b = 49^\circ\, 28'\, 0''$.

Probe.

$\lg\sin h = 9{,}94711 - 10$
$\lg\sin\beta = 9{,}93375 - 10$
$\lg\sin b = 9{,}88086 - 10$

5) $a = 44^\circ\, 19'\, 4''$,
$\beta = 59^\circ\, 8'\, 50''$.

$\lg \sin \beta = 9{,}93375 - 10$
$\lg \cos a = 9{,}85459 - 10$
$\lg \cos \alpha = 9{,}78834 - 10$

$\lg \cot a = 0{,}01034$
$\lg \cos \beta = 9{,}70998 - 10$
$\lg \cot h = 9{,}72032 - 10$

$\lg \cot \beta = 9{,}77626 - 10$
$\lg \sin a = 9{,}84425 - 10$
$\lg \cot b = 9{,}93201 - 10$

$\alpha = 59^\circ\, 9' 0''$,
$h = 62^\circ\, 17' 31''$,
$b = 49^\circ\, 28' 0''$.

Probe.

$\lg \cos \alpha = 9{,}93201 - 10$
$\lg \cot b = 9{,}78834 - 10$
$\lg \cot h = 9{,}72035 - 10$

6) $a = 52^\circ\, 6' 12''$,
$\beta = 59^\circ\, 8' 50''$.

$\lg \cos \beta = 9{,}70998 - 10$
$\lg \sin a = 9{,}89714 - 10$
$\lg \cos b = 9{,}81284 - 10$

$\lg \cot \beta = 9{,}77626 - 10$
$\lg \cot \alpha = 9{,}89117 - 10$
$\lg \cos h = 9{,}66743 - 10$

$\lg \cos \alpha = 9{,}78834 - 10$
$\lg \sin \beta = 9{,}93375 - 10$
$\lg \cos a = 9{,}85459 - 10$

$b = 49^\circ\, 28' 0''$,
$h = 62^\circ\, 17' 31''$,
$a = 44^\circ\, 19' 4''$.

Probe.

$\lg \cos a = 9{,}85459 - 10$
$\lg \cos b = 9{,}81284 - 10$
$\lg \cos h = 9{,}66743 - 10$

Schiefwinklige Dreiecke.

1) $a = 72^\circ\, 12'\, 14''$
$b = 89^\circ\, 13'\, 7''$
$c = 44^\circ\, 15'\, 9''$
$2s = 205^\circ\, 40'\, 30''$

$s = 102^\circ\, 50'\, 15''$
$s - a = 30^\circ\, 38'\, 1''$
$s - b = 13^\circ\, 37'\, 8''$
$s - c = 88^\circ\, 55'\, 6''$

$\lg \sin s = 9{,}98900 - 10$
$\lg \sin (s - a) = 9{,}70718 - 10$
$\lg \sin (s - b) = 9{,}37192 - 10$
$\lg \sin (s - c) = 9{,}93116 - 10$
$\lg \varphi^2 \sin s = 9{,}01026 - 10$
$\lg \varphi^2 = 9{,}02126 - 10$
$\lg \varphi = 9{,}51063 - 10$

$\lg \varphi = 9{,}51063 - 10$
$\lg \sin (s - a) = 9{,}70718 - 10$
$\lg \sin (s - b) = 9{,}37192 - 10$
$\lg \sin (s - c) = 9{,}93116 - 10$

$\lg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 9{,}80345 - 10$

$\lg \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = 0{,}13871$

$\lg \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 9{,}57947 - 10$

$\frac{\alpha}{2} = 32^\circ\, 27' 21'', 2$

$\frac{\beta}{2} = 53^\circ\, 59' 53'', 2$

$\frac{\gamma}{2} = 20^\circ\, 47' 34'', 9$

$\alpha = 64^\circ\, 54' 42''$
$\beta = 107^\circ\, 59' 46''$
$\gamma = 41^\circ\, 35' 10''$

Probe.

$\lg \sin a = 9{,}97870 - 10$
$\lg \sin \beta = 9.97822 - 10$
$9{,}95692 - 10$

$\lg \sin b = 9{,}99996 - 10$
$\lg \sin \alpha = 9{,}95696 - 10$
$9{,}95692 - 10$

2) $a = 72^\circ\, 12' 14''$
$b = 43^\circ\, 15'\, 9''$
$\alpha = 84^\circ\, 15'\, 3''$

$$\frac{a+b}{2}=57^\circ\,43'\,41'',5$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=64^\circ\,59'\,21'',5$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}=19^\circ\,15'\,41'',5$$

$$\lg\sin b=9{,}83583-10$$
$$\lg\sin s=9{,}99781-10$$
$$9{,}83364-10$$

$$\lg\sin \alpha=9{,}97871-10$$
$$\lg\sin\beta=9{,}85493-10$$
$$\beta=45^\circ\,43'\,40''$$

$$\lg\cos\frac{a+b}{2}=9{,}72750-10$$

$$\lg\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=9{,}62613-10$$

$$\lg A=0{,}10147$$

$$\lg\cos\frac{c}{2}=9{,}91155-10$$

$$\lg\sin\frac{\gamma}{2}=9{,}81008-10$$

$$\frac{\gamma}{2}=40^\circ\,13'\,24''$$

$$\gamma=80^\circ\,26'\,48''$$

$$\lg\sin\frac{a+b}{2}=9{,}92712-10$$

$$\lg\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=9{,}97498-10$$

$$\lg B=9{,}95214-10$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{c}{2}=9{,}85060-10$$

$$\frac{c}{2}=35^\circ\,20'\,22''$$

$$c=70^\circ\,40'\,44''$$

Probe.

$$\lg B=9{,}95214-10$$

$$\lg\sin\frac{\gamma}{2}=9{,}81008$$

$$\lg\sin\frac{c}{2}=9{,}76222-10$$

direct kommt:

$$\lg\sin\frac{c}{2}=9{,}76225-10$$

3)

$$a=54^\circ\,12'\,17''$$
$$b=41^\circ\,13'\,\;9''$$
$$\gamma=62^\circ\;\;7'\;\;4''$$

$$\frac{a+b}{2}=47^\circ\,42'\,43''$$

$$\frac{a-b}{2}=\;6^\circ\,29'\,34''$$

$$\frac{\gamma}{2}=31^\circ\;\;3'\,32''$$

$$\lg\cos\frac{a+b}{2}=9{,}82792-10$$

$$\lg\sin\frac{\gamma}{2}=9{,}71258-10$$

$$\lg A=9{,}54050-10$$
$$\lg\operatorname{tg} u=0{,}38950$$
$$u=67^\circ\,48'\,43''$$
$$\alpha=82^\circ\;\;3'\,11''$$

$$\lg\cos\frac{a-b}{2}=9{,}99720-10$$

$$\lg\cos\frac{\gamma}{2}=9{,}93280-10$$

$$\lg B=9{,}93000-10$$
$$\lg\operatorname{tg} v=9{,}40450-10$$
$$v=14^\circ\,14'\,28''$$
$$\beta=53^\circ\,34'\,15''$$

$$\lg\sin\frac{a+b}{2}=9{,}86910-10$$

$$\lg\sin\frac{\gamma}{2}=9{,}71258-10$$

$$\lg C=9{,}58168-10$$

$$\lg\sin\frac{a-b}{2}=9{,}05338-10$$

$$\lg\cos\frac{\gamma}{2}=9{,}93280-10$$

$$\lg D=8{,}98618-10$$
$$\lg\sin v=9{,}39095-10$$

$$\lg\sin\frac{c}{2}=9{,}59523-10$$

$$\frac{c}{2}=23^\circ\,11'\,18''$$

$$c=46^\circ\,22'\,36''$$

Probe.

$$\lg\cos v=9{,}98645-10$$
$$\lg C=9{,}58168-10$$

4)

$$\alpha = 96^\circ 47' 52''$$
$$\beta = 64^\circ 43' 19''$$
$$\gamma = 102^\circ 12' 33''$$
$$2\sigma = 263^\circ 43' 44''$$
$$\sigma = 131^\circ 51' 52''$$
$$\sigma - \alpha = 35^\circ \ 4' \ 0''$$
$$\sigma - \beta = 67^\circ \ 8' 33''$$
$$\sigma - \gamma = 29^\circ 39' 19''$$

$$\lg \cos \sigma = 9{,}82437 - 10 \ (n)$$
$$\lg \cos \sigma - \alpha = 9{,}91301 - 10$$
$$\lg \cos \sigma - \beta = 9{,}58933 - 10$$
$$\lg \cos \sigma - \gamma = 9{,}93903 - 10$$
$$\lg \cos \psi^2 = 9{,}44137 - 10 \ (n)$$
$$\lg \psi^2 = 9{,}38300 - 10$$
$$\lg \psi = 9{,}69150 - 10$$

$$\lg \psi = 9{,}69150 - 10$$
$$\lg \cos \sigma - a = 9{,}91301 - 10$$
$$\lg \cos \sigma - b = 9{,}58933 - 10$$
$$\lg \cos \sigma - c = 9{,}93903 - 10$$

$$\lg \operatorname{tg} \frac{a}{2} = 0{,}10451$$
$$\lg \operatorname{tg} \frac{b}{2} = 9{,}78083 - 10$$
$$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 10{,}3053$$

$$\frac{a}{2} = 51^\circ 49' 41'', 9$$
$$\frac{b}{2} = 31^\circ \ 7' 16'', 5$$
$$\frac{c}{2} = 53^\circ 29' \ 0''$$

$$a = 103^\circ 39' 24''$$
$$b = 62^\circ 14' 33''$$
$$c = 106^\circ 58' \ 0''$$

Probe.

$$\lg \sin \alpha = 9\,98755 - 10$$
$$\lg \sin \beta = 9{,}95629 - 10$$
$$9{,}94384 - 10$$

$$\lg \sin b = 9{,}94691 - 10$$
$$\lg \sin \alpha = 9{,}99693 - 10$$
$$9{,}94394 - 10$$

5)

$$a = 52^\circ 17' \ 4''$$
$$\alpha = 49^\circ 22' 31''$$
$$\beta = 24^\circ 17' 12''$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 36^\circ 49' 51'', 5$$
$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 12^\circ 32' 39'', 5$$
$$\frac{a+b}{2} = 50^\circ 49' 49''$$

$$\lg \sin a = 9{,}89821 - 10$$
$$\lg \sin \beta = 9{,}61416 - 10$$
$$9{,}51237 - 10$$
$$\lg \sin \alpha = 9{,}63213 - 10$$
$$\lg \sin b = 9{,}88024 - 10$$
$$b = 49^\circ 22' 33''$$

$$\lg \cos \frac{a+b}{2} = 9{,}80046 - 10$$
$$\lg \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = 9{,}90330 - 10$$
$$\lg A = 9{,}89716 - 10$$
$$\lg \cos \frac{c}{2} = 9{,}84808 - 10$$

$$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9{,}95092 - 10$$
$$\frac{\gamma}{2} = 64^\circ 41' 0''$$
$$\gamma = 129^\circ 22' 0''$$

$$\lg \sin \frac{a+b}{2} = 9{,}88946 - 10$$
$$\lg \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}98951 - 10$$
$$\lg B = 9{,}89995 - 10$$
$$\lg \operatorname{tg} \frac{c}{2} = 0{,}00279$$
$$\frac{c}{2} = 45^\circ 11' 2''$$
$$c = 90^\circ 22' 4''$$

Probe.

$$\lg B = 9{,}89995 - 10$$
$$\lg \sin \frac{\gamma}{2} = 9{,}95092 - 10$$
$$\lg \sin \frac{c}{2} = 9{,}85087 - 10$$

direct kommt:

$$\lg \sin \frac{c}{2} = 9{,}85087-10$$

---

6)
$$c = 134^\circ\ 17'\ 2''$$
$$\alpha = 54^\circ\ 12'\ 9''$$
$$\beta = 42^\circ\ 15'\ 23''$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 48^\circ\ 14'\ 46''$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 5^\circ\ 57'\ 23''$$

$$\frac{c}{2} = 67^\circ\ 8'\ 31''$$

$$\lg \cos \frac{\alpha+\beta}{2} = 9{,}82343-10$$

$$\lg \cos \frac{c}{2} = 9{,}58933-10$$

$$\lg A = 9{,}41276-10$$

$$\lg \operatorname{tg} u = 0{,}54937$$
$$u = 74^\circ\ 14'\ 17''$$
$$a = 92^\circ\ 22'\ 58''$$

$$\lg \cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}99765-10$$

$$\lg \sin \frac{c}{2} = 9{,}96448-10$$

$$\lg B = 9{,}96213-10$$

$$\lg \operatorname{tg} v = 9{,}51549-10$$
$$v = 18^\circ\ 8'\ 41''$$
$$b = 56^\circ\ 5'\ 36''$$

$$\lg \sin \frac{\alpha+\beta}{2} = 9{,}87274-10$$

$$\lg \cos \frac{c}{2} = 9{,}58933-10$$

$$\lg C = 9{,}46207-10$$

$$\frac{\gamma}{2} = 72^\circ\ 7'\ 6''$$
$$\gamma = 144^\circ\ 14'\ 12''$$

Probe.

$$\lg \sin \frac{\alpha-\beta}{2} = 9{,}01608-10$$

$$\lg \sin \frac{c}{2} = 9{,}96448-10$$

$$\lg D = 8{,}98056-10$$
$$\lg \sin v = 9{,}49335-10$$

$$\lg \cos \frac{\gamma}{2} = 9{,}48721-10$$

$$\lg \cos v = 9{,}97785-10$$

$$\lg C = 9{,}46506-10$$

9) **Von dem sphärischen Excess und der Berechnung des Inhalts eines sphärischen Dreiecks.**

Ist r der Radius der Kugel, ε der sphärische Excess, d. h. der Ueberschuss der drei Dreieckswinkel über zwei Rechte, so hat man für den Flächeninhalt F des Dreiecks $F = \frac{\pi r^2 \varepsilon}{180}$, wenn ε in Graden gegeben ist, oder wenn ε in Bogenmaass gegeben ist: $F = r^2 \varepsilon$. (Vergleiche den Artikel: Raumlehre.) Es kommt also nur darauf an, den Excess durch drei gegebene Stücke des Dreiecks auszudrücken.

Fall I. Sei gegeben: a, b, γ.

Es ist:

$$\cot \varepsilon = \cot\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},$$

aber:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\dfrac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}^2 \cos\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{a-b}{2}\right)},$$

da aber:

$$\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{a-b}{2} = -2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}$$

ist, so hat man:

1) $$\cot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}.$$

Es lassen sich noch leicht mehrere Formeln für diesen Fall herleiten, die wir hier übergehen.

Fall II. Sei gegeben: a, b, c.

Es ist:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},\quad \cos\frac{\varepsilon}{2}=-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Nun ist:

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}=-\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}},\quad \cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-c)}{\sin a\sin b}},$$

also:

$$\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=-\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a\sin b\cos\frac{c}{2}},$$

also:

2) $$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Ferner ist:

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma^2}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma^2}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{\gamma^2}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)+\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{\gamma^2}{2}+\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\frac{\sin s\sin(s-c)}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}+\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}},$$

und hieraus folgt:

3) $$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin s\sin(s-c)+2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Aus 2) und 3) ergibt sich aber eine noch elegantere Formel. — Es ist:

6

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\varepsilon}{2}}{1+\cos\frac{\varepsilon}{2}}}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{1+\cos\frac{\varepsilon}{2}},$$

aber:

$$1+\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left[\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}+\sin s\sin(s-c)\right]}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}+4\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$=\frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}\right)}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Ferner ist:

$$\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right),$$

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right),$$

also:

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\right)=\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2},$$

d. h.:

$$1+\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

Dies mit Formel 2) in Verbindung, gibt:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{4\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}},$$

also da $\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ ist:

4) $$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}.$$

Sind andere drei Stücke gegeben, so thut man am besten, die Aufgabe auf einen der drei hier behandelten Fälle zurückzuführen.

In der Geodäsie kommt oft der Fall vor, dass Dreiecke auf der Erde zu messen sind, die man zwar als sphärisch betrachten muss, deren Seiten aber gegen den Erdradius nur klein sind. Die Betrachtung solcher Dreiecke führt Legendre auf die ebene Trigonometrie zurück durch folgenden Satz:

„Sphärische Dreiecke mit kleinen Seiten können wie eben betrachtet werden, wenn man jeden Winkel um den dritten Theil des spärischen Excesses vermindert."

Wir beweisen diesen Satz nach Gauss.

Die Formeln für $\sin\frac{a}{2}$ und $\cos\frac{a}{2}$ im vorigen Abschnitte geben leicht, wenn man:

$$\sigma=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\varepsilon+\pi}{2}$$

setzt:

$$\left(\sin\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma},$$

$$\left(\cos\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

Sei jetzt:

$$\varepsilon=3\omega,\quad \alpha=A+\omega,\quad \beta=B+\omega,\quad \gamma=C+\omega,$$

so ist:

$$\left(\sin\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sin\frac{3\omega}{2}\sin\left(A-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$

$$\left(\cos\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\sin\left(B-\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\omega}{2}\right)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}.$$

Wenn man die erste Gleichung zur dritten Potenz erhebt und durch die zweite dividirt, so ergibt sich:

$$\frac{\left(\sin\frac{a}{2}\right)^6}{\left(\cos\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\left(\sin\frac{3\omega}{2}\right)^3\sin\left(A-\frac{\omega}{2}\right)^3}{\sin(B+\omega)^2\sin(C+\omega)^2\sin\left(B-\frac{\omega}{2}\right)\sin\left(C-\frac{\omega}{2}\right)}.$$

Ebenso entwickelt man $\frac{\left(\sin\frac{b}{2}\right)^6}{\left(\cos\frac{b}{2}\right)^2}$, dividirt die letzte Formel durch die soentstehende und zieht die Wurzel aus. Dies gibt:

$$\frac{\left(\sin\frac{a}{2}\right)^3\cos\frac{b}{2}}{\left(\sin\frac{b}{2}\right)^3\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sin\left(A-\frac{\omega}{2}\right)^2\sin(A+\omega)}{\sin\left(B-\frac{\omega}{2}\right)^2\sin(B+\omega)}.$$

Setzen wir nun:

$$\frac{a\sin B}{b\sin A}=\sqrt[3]{D},$$

so ist identisch:

$$D=\frac{a^3\cos\frac{a}{2}}{\left(8\sin\frac{a}{2}\right)^3}\cdot\frac{\left(8\sin\frac{b}{2}\right)^3}{b^3\cos\frac{b}{2}}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\sin\left(A-\frac{\omega}{2}\right)^2}{(\sin A^3)}$$

$$\cdot\frac{(\sin B)^3}{\sin(B+\omega)\sin\left(B-\frac{\omega}{2}\right)^2}.$$

Sind a, b, c nun unendlich kleine Grössen erster Ordnung, so ist der sphärische Excess ebenfalls unendlich klein, und zwar ist sein Sinus und

mithin er selbst von der zweiten Ordnung, wie der hier gegebene Werth von $\left(\sin\frac{a}{2}\right)^2$ zeigt. Jeder der vier Factoren von D weicht also um eine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit ab. Es ist nämlich der erste Factor gleich $1-\frac{a^2}{\gamma}$, der zweite: $1+\frac{b^2}{\gamma}$, der dritte: $1-2\cot A\cdot\frac{\omega}{2}$, der vierte endlich: $1+2\cot B\cdot\frac{\omega}{2}$, abgesehen von Grössen höherer Ordnung. Es wird also D und $\sqrt[3]{D}$ auch nur um eine Grösse zweiter Ordnung von Eins abweichen, und es ist somit:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}+\mu,$$

wo μ eine Grösse zweiter Ordnung ist. Vernachlässigt man diese, so ist nach den Formeln der ebenen Trigonometrie klar, dass a und b als Seiten eines ebenen Dreiecks gedacht werden können, dessen Winkel A und B sind. Dasselbe gilt natürlich von c und C.

10) Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

A) Dreiecksaufgaben.

1) Gegeben: a, b, $\alpha+\beta=h$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{a-b}{2}:\cos\frac{a+b}{2}.$$

Diese Gleichung gibt γ.

2) Gegeben: a, b, $\alpha-\beta=d$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{a-b}{2}:\sin\frac{a+b}{2}.$$

3) Gegeben: c, γ, $a+b=h$.

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

Diese Gleichungen geben α und β.

4) Gegeben: c, γ, $a-b=d$.

Durch die beiden andern Gauss'schen Formeln zu lösen.

Ganz ähnlich löst man die Aufgaben:

5) α, β, $a+b$.
6) α, β, $a-b$.
7) c, γ, $\alpha+\beta$.
8) c, γ, $\alpha-\beta$.

9) α, β, $a+b+c=2s$.

$$\operatorname{tg}s=\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}+\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}},$$

also:

$$\cot s = \frac{1 - \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2} + \operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cot\frac{a+b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{c}{2}\cot\frac{a+b}{2}} = \frac{\cot\frac{a+b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(\cot\frac{a+b}{2} - \operatorname{tg}\frac{c}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{c}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

woraus sich sogleich ergibt:

$$\cot s = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cot\frac{c}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Nach dem in Abschnitt 4) gegebenen Verfahren wird hieraus c gefunden.

10) Gegeben: α, b, $\alpha+\beta+\gamma=2s$.

Die Auflösung ergibt sich analog der vorigen.

Uebrigens kann man jede Formel der sphärischen Trigonometrie in eine andere verwandeln, worin die entsprechenden Seiten durch die entsprechenden Winkel ersetzt sind, und umgekehrt, indem man bezüglich vertauscht: a mit $2R-\alpha$, α mit $2R-a$ u. s. w. Dies folgt aus dem Vorhandensein des Supplementar-Dreiecks (vergleiche den Artikel: Raumlehre).

B) Stereometrische Aufgaben.

1) Bestimmung der Stücke eines regelmässigen Polyeders.

Sei r der Radius der umschriebenen Kugel, ϱ der der eingeschriebenen, s die Kante, ϑ der Neigungswinkel zweier Ebenen, τ der Winkel zweier zusammenstossenden Kanten, λ der Winkel zweier nach den Endpunkten einer Kante gezogenen Radien, σ der Neigungswinkel von r zur anstossenden Seitenfläche, μ der Neigungswinkel zweier durch den Mittelpunkt und aneinander stossende Kanten gelegte Ebenen, ν der Winkel des Radius r und der anstossenden Kante, F der Flächeninhalt und K der körperliche Inhalt des Polyeders, f der Flächeninhalt einer beliebigen Polyederfläche, k der der Pyramide, welche diese zur Grundfläche und den Mittelpunkt zur Spitze hat. Wir nehmen überall r als gegeben an.

Sei ferner p die Anzahl der Flächen, m die Kantenanzahl einer solchen, n die Anzahl der Kanten, welche in einer Ecke zusammenstossen.

Denkt man sich vom Mittelpunkte aus nach allen Ecken Linien gezogen, und durch je zwei zusammenstossende eine Ebene gelegt, so werden sich je zwei dieser Ebenen in dem Winkel μ schneiden, und da n solcher Winkel μ sich zu 2π ergänzen, so hat man:

1) $$\mu = \frac{2\pi}{n},$$

direct hat man:

2) $$\tau = \frac{\pi(m-2)}{m}.$$

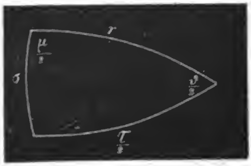
Betrachten wir jetzt die körperliche Ecke, welche von zwei aneinanderstossenden Kanten und dem durch ihren gemeinschaftlichen Eckpunkt gehenden Radius r gebildet wird. Bei r liegt der Ebenenwinkel μ, und ihm gegenüber der Kantenwinkel τ. Diese Ecke ist gleichschenklig. Halbirt man den Winkel τ, so entsteht also eine rechtwinklige Ecke, wo dem Kantenwinkel $\frac{\tau}{2}$ der Ebenenwinkel $\frac{\mu}{2}$ gegenüber liegt. An $\frac{\tau}{2}$ liegt der Ebenenwinkel $\frac{\vartheta}{2}$ an, und an diesem der Kantenwinkel ν; der dritte Kantenwinkel ist σ. Man hat also in dem entsprechenden sphärischen Dreieck (Fig. 22):

$$\sin\sigma = \cot\frac{\mu}{2}\operatorname{tg}\frac{\tau}{2},$$

$$\sin\frac{\tau}{2} = \sin\frac{\mu}{2}\sin\nu,$$

$$\cos\frac{\mu}{2} = \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\tau}{2},$$

Fig. 22.



oder:

3) $$\sin\sigma = \cot\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\pi(m-2)}{2m} = \cot\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{m},$$

4) $$\sin\nu = \frac{\sin\frac{\pi(m-2)}{2m}}{\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

5) $$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi(m-2)}{2m}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{m}}.$$

Uebrigens ergänzen sich die Winkel ν und $\frac{\lambda}{2}$ offenbar zu $\frac{\pi}{2}$ und es ist daher:

6) $$\cos\frac{\lambda}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Ferner ist:

7) $$s = 2r\sin\frac{\lambda}{2}.$$

Auch hat man: $\varrho = r\sin\sigma$, also:

8) $$\varrho = r\cot\frac{\pi}{n}\cot\frac{\pi}{m}.$$

Direct hat man:

9) $$f = \frac{ms^2}{4}\cot\frac{\pi}{m} = r^2\sin\frac{\lambda^2}{2}\cot\frac{\pi}{m}.$$

10) $$F = pf.$$

11) $$k = \frac{f\varrho}{3}.$$

12) $$K = \frac{pf\varrho}{3}.$$

Um diese Formeln auf die einzelnen Polyeder anzuwenden, hat man:

a) fürs Tetraeder:

$p=4,\quad n=3,\quad m=3,$

b) fürs Hexaeder:

$p=6,\quad n=3,\quad m=4,$

c) fürs Octaeder:

$p=8,\quad n=4,\quad m=3,$

d) fürs Dodecaeder:

$p=12,\quad n=3,\quad m=5,$

e) fürs Isocaeder:

$p=20,\quad n=5,\quad m=3,$

Die Winkel sind für alle so beschaffen, dass man algebraische Ausdrücke erhält, wie denn diese Aufgabe sich auch ohne sphärische Trigonometrie lösen lässt.

2) A, B, C sind drei Punkte, von denen man drei Lothe Aa, Bb, Cc auf eine andere Ebene fällt. Es sind gegeben: Winkel BAC und die Neigungswinkel von AB und AC mit Aa. Man sucht den Winkel bac.

Legt man durch A eine Kugelfläche, so entsteht ein sphärisches Dreieck, dessen drei Seiten die gegebenen Grössen sind, und wo der gesuchte bac derjenige Winkel ist, welche der BAC gleichen Seite gegenüberliegt.

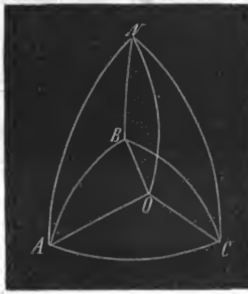
C) Aufgaben aus der mathematischen Geographie.

1) Gegeben die Länge und Breite zweier Orte auf der (als Kugel gedachten) Erde. Man sucht ihre kürzeste Entfernung.

Dieselbe ist die dritte Seite eines sphärischen Dreiecks, von welchem gegeben sind zwei Seiten, nämlich die Complemente der Breiten beider Orte, und ihr eingeschlossener Winkel, nämlich der Längenunterschied dieser Orte.

2) Gegeben die Länge und Breite dreier Orte. Man sucht die Länge und Breite des Punktes auf der Erde, welcher von allen dreien gleich weit entfernt ist.

Fig. 23.



Sei (Fig. 23) N der Nordpol, A, B, C die Orte, O der gesuchte Punkt. Seien Länge und Breite von A, B, C, O bezüglich l_1, l_2, l_3, l, b_1, b_2, b_3, b, so hat man:

$$AO = \sin b \sin b_1 + \cos b \cos b_1 \cos(l - l_1),$$

und entsprechende Ausdrücke für BO und CO, diese drei aber sind unter einander gleich, also:

$$\sin b \sin b_1 + \cos b \cos b_1 \cos(l-l_1) = \sin b \sin b_2 + \cos b \cos b_2 \cos(l-l_2),$$
$$\sin b \sin b_1 + \cos b \cos b_1 \cos(l-l_1) = \sin b \sin b_3 + \cos b \cos b_3 \cos(l-l_3),$$

oder:

1) $$\sin b_1 - \sin b_2 = \cot b\,[\cos b_2 \cos(l-l_2) - \cos b_1 \cos(l-l_1)],$$
$$\sin b_1 - \sin b_3 = \cot b\,[\cos b_3 \cos(l-l_3) - \cos b_1 \cos(l-l_1)],$$

also durch Division:

$$(\sin b_1 - \sin b_2)[\cos b_3 \cos(l-l_3) - \cos b_1 \cos(l-l_1)]$$
$$= (\sin b_1 - \sin b_3)\,[\cos b_2 \cos(l-l_2) - \cos b_1 \cos(l-l_1)].$$

Wir setzen hierin:

$$l - l_1 = \lambda, \quad l_2 - l_1 = \lambda_1, \quad l_3 - l_1 = \lambda_2,$$

also:

$$\cos b_1 \cos\lambda(\sin b_3 - \sin b_2) = \cos b_2 \cos(\lambda - \lambda_1)(\sin b_1 - \sin b_3)$$
$$- \cos b_3 (\sin b_1 - \sin b_2)\cos(\lambda - \lambda_2),$$

also:

2) $$\cot\lambda\,[\cos b_1 (\sin b_2 - \sin b_3) + \cos b_2 \cos\lambda_1 (\sin b_3 - \sin b_1)$$
$$+ \cos b_3 \cos\lambda_2 (\sin b_1 - \sin b_2)] = -\cos b_2 \sin\lambda_1 (\sin b_3 - \sin b_1)$$
$$- \cos b_3 \sin\lambda_2 (\sin b_1 - \sin b_2).$$

Diese Gleichung gibt λ, also auch l, eine der Gleichungen 1) gibt dann b.

Namentlich die sphärische Astronomie gibt viele Anwendungen der sphärischen Trigonometrie.

Was endlich die sphäroidische Trigonometrie anbetrifft, so verweisen wir auf den Artikel: Geodäsie.

11) Historisches.

Die Anfänge der Trigonometrie gehen auf Hipparch (160 — 125 v. Chr.) zurück. Er, wie nach ihm Menelaus, führten die Dreiecke auf Betrachtung der Bogensehnen zurück. Von Ptolemäus (125 — 141 n. Chr.) besitzen wir noch eine Sehnentafel (Almagest), für das Intervall von $\frac{1}{2}$ Grad berechnet.

Die Araber vereinfachten die Betrachtung, indem sie die Sehne durch den Sinus ersetzten. Der erste, welcher diese Betrachtungen anwandte, soll Mahomed

al Batani (880) gewesen sein. Sie wurden vervollständigt durch Gebir ben Aphla (1090).

Nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften in Europa wurde auch die Trigonometrie vervollständigt. So schrieb 1533 J. Regiomontanus sein Werk: *De triangulis omnimodis libri V*, in welchem sich die Tangenten schon finden, und das überhaupt der jetzigen Trigonometrie schon sehr nahe kommt. Zur Vollendung aber gelangte die trigonometrische Rechnung durch Neper's Erfindung der Logarithmen (1614).

Die analytische Behandlung der Trigonometrie, die Entdeckung der hohen Bedeutung, welche die trigonometrischen Linien für die Analysis haben, gehört dem 18. Jahrhundert an, und namentlich hat auch hierin Euler unsterbliches Verdienst.

Trilimarcoordinaten (Geometrie).

Diejenigen Coordinaten, welche einen Punkt in der Ebene durch seine senkrechte Entfernung von den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks bestimmen. Da schon zwei dieser Entfernungen zur Bestimmung des Punktes hinreichen, so enthalten die Trilimarcoordinaten also ein überflüssiges Element. Sei O der Punkt, x, y, z die Entfernungen von den Seiten a, b, c des Dreiecks, dessen Flächeninhalt f sei, so kann man letzteres in drei theilen, deren jedes eine der Entfernungen zur Höhe und eine der Seiten zur Grundlinie hat. Es ist also immer:

$$1)\qquad ax+by+cz=2f,$$

und diese Relation lehrt, eine der Coordinaten durch die andere zu bestimmen.

Bezieht man ein gewöhnliches schiefwinkliges Coordinatensystem auf zwei Seiten a und b des Dreiecks als Axen, und sind ξ, η diese Coordinaten für Punkt O, und γ der Winkel zwischen A und B, so ist offenbar:

$$x=\xi\sin\gamma,\quad y=\eta\sin\gamma,$$

also da diese Beziehung eine lineare ist, so ist die Gleichung einer Curve in Trilimarcoordinaten immer von derselben Ordnung, als die in gewöhnlichen Coordinaten. Der Vortheil der letztern aber ist folgender.

Wenn eine Gleichung von beliebigem Grade zwischen x und y gegeben ist, und p ist die höchste Dimension, so kann man jedes Glied von niederer Dimension $p-q$ auf diese bringen, indem man nach 1) mit $\left(\frac{ax+by+cz}{2f}\right)^q=1$ dasselbe multiplicirt. — Man hat also bei Anwendung der Trilimarcoordinaten lediglich mit homogenen Gleichungen zu thun, was die Rechnung oft wesentlich erleichtert. Für den Raum ersetzt man in solchen Fällen die Trilimarcoordinaten durch die vier Entfernungen eines Punktes von den Seitenflächen eines Tetraeders. Sind a, b, c, d diese Seitenflächen, x, y, z, u die Coordinaten, T der körperliche Inhalt des Tetraeders, so hat man die 1) entsprechende Beziehung:

$$2)\qquad ax+by+cz+du=3\,T.$$

Anwendungen dieser Coordinaten gibt z. B. Salmon in seinem Werke: *Higher plane curves*.

Trinitatis (fest) (Chronologie).

Der erste Sonntag nach Pfingsten.

Trinomium (Algebra).

Eine Summe von drei Gliedern.

Triphammer (Maschinenlehre).

Siehe Hammer.

Trilling (Maschinenlehre).

Ein Rad, dessen Zähne sich zwischen zwei parallelen Kränzen befinden (siehe den Artikel: Rad).

Trisection (des Winkels) (Geometrie).

Die Theilung des Winkels in drei Theile, eine Aufgabe, die sich durch Rechnung sehr leicht durch den Werth von $\sin\frac{\alpha}{3}$ und $\cos\frac{\alpha}{3}$ ergibt, wobei geometrische Construction im engern Sinne aber nicht möglich ist, da nicht der Kreis und die Grade hierbei ausreichen, sondern Kegelschnitte nöthig sind (vergleiche den Artikel: Dreitheilung).

Trochoidalis (Geometrie).

Die Linie, welche ein Punkt einer Curve beschreibt, wenn sich letztere auf einer Graden oder einem Kreise wälzt. Die Cycloiden sind also besondere Fälle dieser Curve.

Trochois (Geometrie).

Gleichbedeutend mit Cycloide.

Trockener Wechsel (kaufmännische Arithmetik).

Ein Wechsel, der auf den Aussteller selbst lautet.

Trockenpochwerk (Maschinenlehre).

Siehe Pochwerk.

Trockenregulator (Maschinenlehre).

Siehe Regulator.

Trommel (Maschinenlehre).

Ein cylindrisches oder conisches Rad mit breiter Oberfläche.

Bei Uhren heisst so der cylindrische Kasten, welcher die Triebfeder einschliesst.

Trommelrad (Maschinenlehre).

Ein bei den alten Römern gebräuchliches hohles Rad zum Heben von Wasser. Radiale Scheidewände theilen es in Sectoren, deren jeder eine Mündung am Umfange zur Aufnahme des Wassers beim Drehen des Rades besitzt; durch eine andere Oeffnung geht das Wasser in die hohle Welle, und aus dieser in ein Reservoir.

Tropen (mathematische Geographie).

Die Gegenden der Erdoberfläche zwischen den Wendekreisen.

Tropische Umlaufszeit (Astronomie).

Die Zeit, in der der Planet zweimal durch seinen aufsteigenden Knoten geht, d. h. durch den Punkt, wo sein Aequator die Ekliptik schneidet, und sich der Planet über den ersteren erhebt.

Tropisches Jahr (Astronomie und Chronologie).

Die tropische Umlaufszeit der Erde. Das tropische Jahr ist gleich dem bürgerlichen (vergleiche den Artikel: siderisches Jahr).

Troygewicht (Messkunst).

Man versteht darunter ein altes holländisches Gewicht.

1 Troypfund = 2 Mark = 16 Unzen = 320 Engelsen = 10240 As.

1 Engelsen = 4 Vierlinge = 8 Troisken = 16 Deusken = 32 As.

19 Troymark sind gleich 20 Cöllner Mark.

1 Troypfund = 492,16772 Gramm, während das alte holländische Handelspfund 494,09042 Gramme enthält.

Ferner versteht man unter Troygewicht das englische Münz- und Apothekergewicht. Man hat für ersteres:

Troy pound	Ounces	Pennyweights	Grains
1	12	240	5760
	1	20	480
		1	24

aber beim Medicinalgewicht:

Troy pound	Ounces	Drames	Scruples	Grains
1	12	96	288	5760
	1	8	24	480
		1	3	60
			1	20

Das Troy pound enthält 373,247 Gramm, uud wird auch in 24 Carats zu 4 Grains zu 4 Quarts beim Golde, 12 Ounces zu 20 Pennyweights beim Silber getheilt. 1 Pfund Handelsgewicht enthält 7000 Troy grains oder 453,5976 Gramme.

Turbine (Maschinenlehre).

Horizontales Wasserrad (siehe Wasserrad).

Turbinengebläse (Maschinenlehre).

Siehe Gebläse.

Turbinengöpel (Maschinenlehre).

Siehe Göpel, Wassergöpel.

Turbinenpochwerk (Maschinenlehre).

Siehe Pochwerk.

U.

Ueberfall (Hydraulik).

Ein Wandeinschnitt in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäss.

Ueberfallschützen (Hydraulik).

Schützen, wodurch das Wasser auf ein mittelschlächtiges Wasserrad geführt wird. Dasselbe fliesst über den Kopf des Schützbrettes entweder auf eine (parabolisch) gekrümmte Leitschaufel, oder über den abgerundeten Schützenkopf.

Ueberfallwehr (Hydraulik).

Wehr oder Damm zum Aufstauen des Wassers. Sie unterscheidet sich von der Schleusenwehr dadurch, dass bei ersterer das Wasser nicht über die Wehrklappe aufgestauet wird, sondern durch einen Durchlass frei zu dem Canale gelangt, wo sich die Umtriebsmaschine befindet.

Ueberflüssige (überschüssige) Zahl (numerus abundans) (Arithmetik).

Eine Zahl, welche grösser ist, als die Summe ihrer Factoren. Z. B. 9 hat die Factoren 1 und 3, deren Summe 4 beträgt.

Uebergewicht (Statik).

Das Mehrgewicht der Kraft gegen die Last, oder umgekehrt.

Ueberhitzer (Wärmelehre).

So heisst bei gewissen Dampfmaschinen ein besonderes Gefäss, worin die Dämpfe, ehe sie in den Cylinder treten, überhitzt, d. h. so weiter erwärmt werden, dass sie nicht mehr im Maximum der Spannkraft sind.

Bei calorischen Maschinen wird so der Kessel genannt, in welchem die Luft erwärmt wird.

Uebermässiges Intervall (Akustik).

Ein Tonintervall, Terz, Quart u. s. w., welches etwas grösser ist, als das gewöhnlich diesen Namen führende (vergleiche den Artikel: Akustik).

Ueberschüssige Zahl.

Siehe überflüssige Zahl.

Uhr (Chronologie).

Siehe Chronometer.

Umbilicus (Geometrie).

Gleichbedeutend mit Brennpunkt.

Umdrehung (Mechanik).

Siehe Rotation.

Umdrehungsebene (Mechanik).

So wird zuweilen eine auf der Rotationsaxe senkrechte Ebene genannt.

Umfang (Geometrie).

Die Summe der Seiten eines Polygons, allgemeiner die ganze Begrenzung eines Flächenstückes.

Umfangswinkel (Geometrie).

Der von zwei zusammenstossenden Seiten eines Polygons gebildete Winkel. Beim Kreise wird dieser Ausdruck auch für Peripheriewinkel gebraucht.

Umformung (Analysis).

Gleichbedeutend mit Transformation.

Umhüllungscurve, Enveloppe (Geometrie).

So wird eine Curve genannt, welche jede von einer gegebenen Schaar von Curven berührt.

Sei:

1) $$f(x, y, \alpha) = 0$$

die Gleichung einer beliebigen Curve aus der Schaar, also α der veränderliche Parameter, so ist die Gleichung der nächsten:

$$f(x, y, \alpha + d\alpha) = 0,$$

d. h.:

$$f + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot d\alpha = 0,$$

und durch Vereinigung beider Gleichungen kommt:

2) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Die Gleichungen 1) und 2) geben die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden unendlich nahen Curven. Eliminirt man nun aus 1) und 2) α, so hat man die Gleichung einer Curve, welche durch die Dnrchschnittspunkte je zweier nächsten aus der Schaar geht, und dies ist die Umhüllungscurve. Dass sie die ganze Schaar berührt, folgt daraus, dass je zwei nächste Schnittpunkte der Curven auf einer einen unendlich kleinen Bogen abschneiden, welchen diese Curve und die Umhüllnngscurve gemeinschaftlich haben.

Beispiel.

Die Gleichung:

1) $$f = \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{k^2 - \alpha^2} - 1 = 0$$

stellt eine Schaar von Ellipsen vor, wenn man α verändert. Es ist:

2) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = -\frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2}{(k-\alpha)^3} = 0.$$

Aus 1) und 2) ergibt sich:

$$\alpha = \frac{kx^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}},$$

und wenn man dies in 1) einsetzt:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

als Gleichung der Umhüllungscurve.

Umhüllungsfläche (Geometrie).

Diejenige Fläche, welche eine gegebene Schaar berührt. Es kann diese Berührung jedoch in einer Linie oder in einem Punkte stattfinden. Sei α ein beliebiger Parameter, und:

1) $$f(x, y, z, \alpha) = 0$$

die Gleichung einer Fläche aus der Schaar. Die der nächsten ist:

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha) = 0,$$

woraus sich in Verbindung mit 1) ergibt:

2) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

1) und 2) sind die Gleichungen der Schnittlinie dieser Curven, oder wenn man α eliminirt, die derjenigen Fläche, welche alle diese Schnittlinien umfasst, d. h. der Umhüllungsfläche, die also jede der Schaar in einer Linie berührt. — Sind dagegen α und β beliebige Parameter, und die Gleichung einer Fläche aus der Schaar:

3) $$f(x, y, z, \alpha, \beta) = 0,$$

so ist für eine nächste:

$$f(x, y, z, \alpha + d\alpha, \beta + d\beta) = 0,$$

wo zwischen den Aenderungen von α und β eine gewisse Beziehung stattfindet, damit die Fläche völlig bestimmt sei. Für eine andere nächste ist dann:

$$f(x, y, z, \alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) = 0,$$

wo $\delta\alpha$ und $\delta\beta$ eine andere Art des Wachsens andeuten. Die Gleichung 3) in Vereinigung mit den beiden letzten, gibt für den Schnittpunkt dieser drei Flächen:

4) $$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0,$$

und die Gleichungen 3) und 4) bestimmen eine Umhüllungsfläche, welche jede der Schaar, aber nur in einem Punkte, berührt.

Beispiel.

Die Gleichung einer Schaar von Ebenen mit einem Parameter ist:

$$z = x f(\alpha) + y \varphi(\alpha) + \psi(\alpha).$$

Für die Einhüllungsfläche ist:

$$x f'(\alpha) + y \varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha) = 0.$$

Beide Gleichungen geben dieselbe. Es ist eine abwickelbare Fläche. Die Umhüllungsfläche einer Schaar von Kreisen mit constantem Halbmesser heisst Canalfläche.

Umkehrung eines Satzes.

Heisst die Voraussetzung zur Behauptung, und die Behauptung zur Voraussetzung machen. Z. B. aus dem Satze: „Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Gegen-

winkel gleich," entsteht durch Umkehrung der Satz: „Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind auch ihre Gegenseiten gleich."

Sätze lassen sich offenbar nur dann umkehren, wenn die Voraussetzung für die Behauptung nicht allein nothwendig, sondern auch ausreichend ist.

Umkehrung der Functionen und Reihen (Analysis).

So kann man allgemein die Aufgabe bezeichnen, aus der Gleichung $y=f(x)$, wo $f(x)$ in Form einer Reihe oder sonst irgend wie gegeben ist, den Ausdruck $x=\varphi(y)$ in Form einer Potenzreihe abzuleiten. Für zwei Variablen gestaltet sich das Umkehrungsproblem so: Aus den Gleichungen:

$$y=f(x, x_1), \quad y_1=f_1(x, x_1),$$

x und x_1 abzuleiten.

Für Functionen einer Variable gibt der Satz des Lagrange die vollständige Lösung des Problems. Es ist dieser Satz in dem Artikel: Reihen enthalten. An dieser Stelle geben wir einige Ergänzungen und die von La Place herrührende Ausdehnung dieses Satzes auf Functionen zweier Variablen.

Der Lagrange'sche Satz ist gegeben durch die Formel:

$$1)\qquad f(z)=f(a)+x\varphi(a)f'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d}{da}[\varphi(a)^2 f'(a)]$$
$$+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2}{da^2}[\varphi(a)^3 f'(a)]+\ldots,$$

wo z und x verbunden sind durch die Gleichung:

$$2)\qquad z=a+x\varphi(z).$$

Um daraus die Auflösung der Gleichung $x=\psi(z)$ herzuleiten, hat man nur zu setzen:

$$a=0,\quad \varphi(z)=\frac{z}{\psi(z)},$$

und $f(z)=z$ zu nehmen. Die Umkehrungsformel der Potenzreihen ergibt sich hieraus noch, wenn man unter $\psi(z)$ eine beliebige Potenzreihe versteht. — Indess wollen wir noch eine andere von Jakobi herrührende Umkehrungsmethode der Reihen geben, welche nach ganzen Potenzen fortschreiten. Es sei:

$$f(x)=\ldots+a_{-3}x^{-3}+a_{-2}x^{-2}+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$$

Bezeichnen wir mit Res $[\varphi(x)]$ den Coefficienten von x^{-1} in der Entwickelung von $\varphi(x)$, so ist offenbar:

$$\text{Res}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)=0.$$

Wir vertauschen jetzt $f(x)$ mit $\frac{1}{m+1}\varphi(x)^{m+1}$ und erhalten:

$$\text{Res}\left(\varphi(x)^m\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)=0.$$

Ausgenommen ist jedoch der Fall, wo $m=-1$ ist. Suchen wir also direct den Ausdruck:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\frac{d\varphi(x)}{dx}\right)=\text{Res}\left(\frac{d\lg\varphi(x)}{dx}\right).$$

(Genaueres hierüber enthält der Artikel: Quantität — imaginäre).

Zu dem Ende entwickeln wir $\varphi(x)$ nach zunehmenden Potenzen von x, und erhalten:

$$\varphi(x)=a_\mu x^\mu(1+U),$$

wo x^μ die niedrigste Potenz, U eine Reihe ist, die nur positive Potenzen von x enthält. Somit ist:

$$\frac{d\lg\varphi(x)}{dx}=\frac{\mu}{x}+\frac{d\lg(1+U)}{dx}.$$

$\lg(1+U) = U - \frac{U^2}{2} + \ldots$ lässt sich nach ganzen Potenzen von x entwickeln, und also ist:

$$\text{Res}\,\frac{d\lg(1+U)}{dx} = 0,$$

somit:

$$\text{Res}\left(\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)\,dx}\right) = \mu.$$

Sei nun:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

und wir suchen die Entwickelung von x nach Potenzen von y, nämlich:

$$x = b_1 y + b_2 y^2 + b_3 y^3 + \ldots,$$

so lässt sich leicht der Werth von b_n finden. Differenziiren wir nämlich die letzte Gleichung und dividiren durch y^n, so kommt:

$$\frac{1}{y^n} = \frac{dy}{dx}\left(\frac{b_1}{y^n} + \frac{2b_2}{y^{n-1}} + \ldots + \frac{nb_n}{y} + (n+1)b_{n+1} + \ldots\right).$$

Wird jede Potenz von y nach Potenzen von x entwickelt, so ist nach dem Obigen:

$$\text{Res}\left(\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

und nur $\text{Res}\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right) = 1$, da hier $\mu = 1$ ist. Da sich nun aus der Summe dieser Werthe der von $\text{Res}\left(\frac{1}{y^n}\right)$ zusammensetzt, so hat man:

$$b_n = \frac{1}{n}\,\text{Res}\left(\frac{1}{y^n}\right),$$

wo sich die Werthe von $\text{Res}\left(\frac{1}{y^n}\right)$ ergeben, wenn man die negativen Potenzen von y nach zunehmenden Potenzreihen von x entwickelt, und nur die Coefficienten von $\frac{1}{x}$ nimmt.

Beispiel.

Sei gegeben:

$$y = x + a x^2.$$

Man hat:

$$\frac{1}{y^n} = \frac{1}{x^n(1+ax)^n} = \frac{(1+ax)^{-n}}{x^n}.$$

Das mit x^{n-1} multiplicirte Glied des Zählers ist:

$$(-1)^{n-1}\,\frac{n(n+1)\ldots(2n-2)}{1\cdot 2\ldots n-1}\,a^{n-1},$$

also:

$$\frac{1}{n}\,\text{Res}\left(\frac{1}{y^n}\right) = (-1)^{n-1}\,\frac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-2)}{2\cdot 3\ldots(n-1)}\,a^{n-1},$$

und:

$$x = y - a y^2 + \frac{4}{2} a^2 y^3 - \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 3} a^3 y^4 + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 y^5 - \ldots$$

Jakobi hat, auf diese Betrachtungen gestützt, auch einen Beweis des Lagrange'schen Satzes gegeben, den wir hier übergehen.

Aus dem Lagrange'schen Satz folgt leicht die Entwickelung einer Function von z, $f(z)$ nach Potenzen einer andern Function $F(z)$ von derselben Variablen. Setzt man nämlich in die Gleichung 2):

$$\frac{z-a}{\varphi(z)} = F(z), \qquad \text{also:} \qquad \varphi(z) = \frac{z-a}{F(z)},$$

so ist $x = F(z)$ und daher $f(z)$ nach Potenzen dieser Grösse entwickelt.

Wir gehen jetzt zu der La Place'schen Erweiterung des Satzes von La Grange über. — Es sind gegeben die Gleichungen:

3) $$u = a + x\,\varphi(u, v), \quad v = b + y\,\psi(u, v),$$

und es soll eine beliebige Function von u und v nach Potenzen von x und y entwickelt werden. Sei:

$$z = f(u, v)$$

diese Function, so handelt es sich nach dem Maclaurin'schen Satze nur darum, die Differenzialquotienten von z nach x und y zu bestimmen, für den Fall, dass x und y verschwinden.

Durch Differenziiren der Gleichungen 3) erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 1 + x\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial a} = y\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial a}\right),$$

woraus sich sogleich die Relationen ergeben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi\frac{\partial u}{\partial a}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \psi\frac{\partial v}{\partial a},$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi\frac{\partial z}{\partial a},$$

und auf ganz dieselbe Weise ergibt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi\frac{\partial z}{\partial b}.$$

Es war $z = f(u, v)$, setzt man aber $x = y = 0$, so wird $u = a$, $v = b$, also:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = \varphi(a, b)\frac{\partial f(a, b)}{\partial a},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 = \psi(a, b)\frac{\partial f(a, b)}{\partial b}.$$

Hiermit verbinden wir die identischen Relationen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\chi\frac{\partial u}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\chi\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\chi\frac{\partial u}{\partial b}\right) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\chi\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

die sich augenblicklich verificiren lassen, welche Function von u und v auch χ sei. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial z}{\partial a}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial a}\left(\varphi^2\frac{\partial z}{\partial a}\right),$$

und indem man so fortfährt, allgemein:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi^n \frac{\partial z}{\partial a}\right).$$

In gleicher Weise beweist man die Relation:

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}}\left(\psi^n \frac{\partial z}{\partial b}\right),$$

also auch:

4)
$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}}\left(\varphi(a, b)^n \frac{\partial f(a, b)}{\partial a}\right),$$

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}}\left(\psi(a, b)^n \frac{\partial f(a, b)}{\partial b}\right).$$

Es ist aber noch die Berechnung des Ausdruckes $\frac{\partial^n z}{\partial^{n-p}\partial y^p}$ nöthig.

Man hat zunächst:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi \frac{\partial z}{\partial a}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial a} + \varphi \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial y} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} + \varphi \frac{\partial}{\partial a}\left(\psi \frac{\partial z}{\partial b}\right),$$

also:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} + \varphi \frac{\partial \psi}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \varphi \cdot \psi \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial b}.$$

Um hieraus $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0$ zu erhalten, kann man vor dem Differenziiren bezüglich u und v mit a und b vertauschen. Um $\frac{\partial^n \partial z}{\partial x^{n-p}\partial y^p}$ zu finden, ist nun:

$$\frac{\partial^{n-p} z}{\partial x^{n-p}} = \frac{\partial^{n-p-1}}{\partial a^{n-p-1}}\left(\varphi^{n-p}\frac{\partial z}{\partial a}\right)$$

p mal nach y zu differenziiren, Sei jetzt:

$$u_1 = a + x[\varphi(u_1, v_1)^{n-p}], \quad v_1 = b + y\,\psi(u_1, v_1), \quad z_1 = f(u_1, v_1),$$

so ist auch:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} = \varphi(u_1, v_1)^{n-p}\frac{\partial z_1}{\partial a}.$$

Für $x=0$ aber werden, was auch y sei, die Werthe von u_1 und v_1 bezüglich mit denen von u und v identisch, daher:

$$\left(\frac{\partial^{n-p} z}{\partial x^{n-p}}\right)_0 = \frac{\partial^{n-p-1}}{\partial a^{n-p-1}}\left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_0\right],$$

und da x und y unabhängig von einander sind, also vor oder nach dem Differenziiren nach y: $x=0$ gemacht werden kann, und umgekehrt:

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-p}\partial y^p}\right)_0 = \frac{\partial^{n-p-1}}{\partial a^{n-p-1}}\frac{\partial^p}{\partial y^p}\left[\left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)_0\right].$$

Man kann auch links die Ordnung des Differenziirens umkehren, jedoch darf dann $x=y=0$ erst nach Vollendung der Rechnung gesetzt werden, also:

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-p}\partial y^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-p-1}}{\partial a^{n-p-1}}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^p z_1}{\partial y^p}\right),$$

wo zum Schlusse $x=y=0$ ist. Nun ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial^p z_1}{\partial y^p} = \frac{\partial^{p-1} z_1}{\partial b^{p-1}}\left(\psi(u_1, v_1)^p \frac{\partial z_1}{\partial b}\right).$$

Statt nach x zu differenziiren, und dann $x=y=0$ zu setzen, kann man vor dem Differenziiren auch $y=0$ setzen. Setzt man aber:

$$u_2 = a + x\,\varphi(u_2, v_2)^{n-p}, \quad v_2 = b + y\,\psi(u_2, v_2)^p, \quad z_2 = f(u_2, v_2),$$

so werden u_2 und v_2 für $y=0$ bezüglich mit u_1 und v_1 identisch, und man kann dann: $\psi(u_1, v_1)^p \frac{\partial z_1}{\partial b}$ ersetzen durch $\frac{\partial z_2}{\partial y}$, so dass man hat:

$$5)\quad \left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-p}\partial y^p}\right)_0 = \frac{\partial^{n-p-1}}{\partial a^{n-p-1}}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{p-1}}{\partial b^{p-1}}\left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial a^{n-p-1}\partial b^{p-1}}\left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y}\right)_0.$$

$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y}$ kann aus dem Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ abgeleitet werden, wenn man φ und ψ bezüglich mit φ^{n-p}, ψ^p vertauscht, also:

$$6)\quad \left(\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y}\right)_0 = \psi^p \frac{\partial \varphi^{n-p}}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} + \varphi^{n-p}\frac{\partial \psi^p}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} + \varphi \cdot \psi \frac{\partial^2 z}{\partial a \partial b},$$

wo in φ, ψ und $z=f$ die Argumente a und b zu nehmen sind.

Die Gleichungen 4), 5) und 6) bestimmen die Coefficienten der Maclaurinschen Reihe völlig, und man hat:

$$z = z_0 + x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0 + \frac{x^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{2xy}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_0 + \frac{y^2}{1\cdot 2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0 + \dots$$

Umlauf (Dynamik).

Die Bewegung eines Körpers um einen andern, z. B. der Erde um die Sonne.

Umläufe (Hydraulik).

Beim Schleusenbau werden so diejenigen Kanäle genannt, welche sich in den Mauern der Schleuse um die Thore herumziehen, die zum Füllen oder Leeren der Schleuse dienen und daher mit Schützen versehen sind.

Umschrieben (Geometrie).

Eine Figur A ist einer andern gradlinigen B umschrieben, wenn jede Ecke von B sich in dem Umfange von A befindet, A kann hier gradlinig oder krummlinig sein. Eine gradlinige Figur A ist aber einer krummlinigen B umschrieben, wenn jede Seite von A den Umfang von B berührt.

Dasselbe gilt von begrenzten Körpern, wenn man statt des Umfanges die Oberfläche, statt der Seiten die ebenen Grenzflächen nimmt.

Umriss (Feldmesskunst).

Begrenzung einer Figur.

Umtriebsmaschine (Maschinenlehre).

Die Maschine, welche unmittelbar von der Kraft in Bewegung gesetzt wird, z. B. ein Wasserrad oder eine Dampfmaschine, im Gegensatz zur Zwischenmaschine, welche die Bewegung auf den Körper, welcher bearbeitet oder fortgeschafft werden soll, überträgt.

Umsetzungsverhältniss (Maschinenlehre).

Die Zahl, welche das Verhältniss der gleichzeitigen Umdrehungen zweier in einander greifenden Räder ausdrückt.

Unabhängige Variable (Analysis).

Diejenige veränderliche Grösse, der man einen beliebigen Zuwachs gibt und dadurch den Zuwachs der andern von ihr abhängigen Grössen bestimmt. — Ist z. B. x unabhängige Variable, dx der unendlich kleine Zuwachs, so ist

$dy = \cos x\, dx$ der Zuwachs der abhängigen Variablen $y = \sin x$. Ist dagegen y unabhängige Variable, dy der Zuwachs, so ist $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$ der von x.

Unbekannte Grössen (Algebra).

Diejenigen Grössen, welche in einer oder mehreren Gleichungen aus denselben zu bestimmen sind.

Unbenannte Zahlen (Arithmetik).

Zahlen, deren Einheit beliebig ist.

Unbestimmte Analysis (Arithmetik).

So wird zuweilen die Theorie der unbestimmten Aufgaben (siehe diese) genannt.

Unbestimmte (auch diophantische) Aufgaben (Arithmetik).

Führt eine Aufgabe zu einer Gleichung mit mehr als einer Unbekannten, oder zu einer Anzahl von Gleichungen, die kleiner als die der Unbekannten ist, so heisst die Aufgabe unbestimmt. — Eine solche hat im Allgemeinen unendlich viel Auflösungen. Dieselben werden zum Theil determinirt, wenn man über die Art dieser Auflösungen gewisse Voraussetzungen macht, z. B. dass sie alle ganzzahlig, oder alle rational seien. Auf diese Weise kann zuweilen die Aufgabe zu einer einzigen Lösung, zuweilen zu einer begrenzten Anzahl, zuweilen aber noch immer zu unendlich vielen führen.

Wir geben hier zunächst die Auflösung der unbestimmten Gleichungen ersten Grades. Die Auflösung derjenigen zweiten Grades in rationalen und in ganzen Zahlen enthält der Artikel: Quadratische Gleichungen (unbestimmte). Einige einfachere Fälle dieser Aufgabe wollen wir dann hier anknüpfen.

Sei gegeben die Gleichung:

1) $$ax - by = c.$$

a, b, c können als ganze (positive oder negative) Zahlen angenommen werden, da sie leicht in solche verwandelt werden können, wenn sie Brüche sein sollten.

a, b, c sind so einzurichten, dass sie keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Nehmen wir zunächst an, dass eine Auflösung bekannt sei, nämlich:

$$x = x_1,\ y = y_1,$$

so ergeben sich alle möglichen Lösungen aus den Formeln:

2) $$x = x_1 + bz,\ y = y_1 + az,$$

wo z eine beliebige ganze Zahl ist, die positiv und negativ sein kann.

Dass diese Ausdrücke Lösungen sind, ergibt sich durch Einsetzen, dass keine andern vorhanden sind, aus folgenden Betrachtungen.

Zunächst dürfen, damit überhaupt eine Lösung möglich sei, a und b keinen gemeinschaftlichen Factor haben, denn sonst müsste offenbar auch c denselben haben, was der Voraussetzung widerspricht.

Sei nun eine nicht in 2) enthaltene Auflösung möglich, so hat dieselbe jedenfalls die Form:

$$x = x_1 + bz + \varepsilon,$$

wo ε dem absoluten Werthe nach kleiner als b ist, weil man sonst durch Vermehren von z ε um b verkleinern kann. Nun ist nach Gleichung 1): $ax - c = by$, also $ax - c$ durch b theilbar. Dies gilt für beide bekannte Werthe von x, also sowohl: $ax_1 - c$, als: $a(x_1 + bz + \varepsilon) - c$ sind durch b theilbar, also auch ihre Differenz $abz + a\varepsilon$, also auch $a\varepsilon$ selbst, was nicht möglich ist, da a keinen Theiler mit b gemeinschaftlich hat, ε aber nicht durch b theilbar ist.

Die Gleichung 1) verwandelt man nun durch die Substitution:

3) $$x = cu,\ y = cv$$

in die einfachere:

4) $$ax - by = 1.$$

Eine Lösung derselben wird folgendermaassen gewonnnn.

Man kann annehmen, a und b seien positiv, da man dies immer bewirken kann, wenn man nöthigen Falles y mit $-y$ vertauscht. Sei ferner a grösser als b, so kann man die gewöhnliche Methode anwenden (siehe die Artikel: Quotient und Rest), durch welche man zwischen a und b den grössten gemeinschaftlichen Theiler erhält, und dieser ist 1, da a und b relativ einfach sind. Man hat somit:

5) $$a = b\beta + c,\ b = c\gamma + d\ \ldots\ k = l\lambda + m,$$
$$l = m\mu + n,\ m = n\nu + 1.$$

Die Grössen $\beta, c, \gamma, d \ldots$ sind offenbar Quotienten und Reste der Theildivisionen. Eliminirt man nun nach einander $n, m, l \ldots$, so erhält man:

$$l\nu - m(\nu\mu + 1) = -1,$$
$$k(\nu\mu + 1) - l[\lambda(\nu\mu + 1) + \nu] = 1\ \ldots,$$

mit andern Worten, man erhält ein Vielfaches von l weniger einem Vielfachen

von m, ein Vielfaches von k weniger einem von l u. s. w., welche Differenzen alle entweder gleich $+1$ oder -1 sind; schliesslich kommt man also auch zu einer Gleichung:

$$ar - bs = \pm 1,$$

und dann ist:

$$u = \pm r, \quad v = \pm s$$

offenbar die gesuchte Auflösung. Um r und s zu bestimmen, sind aus den Gleichungen 5) die Eliminationen von $u, m, l \dots c$ zu machen. Dies geschieht mittels des folgenden Algorithmus, den man leicht finden kann, wenn man die oben für l und k gemachte Rechnung weiter fortsetzt.

Man multiplicirt den letzt entstandenen Factor, also ν in der ersten Rechnung, $\nu\mu+1$ in der zweiten, mit dem vorhergehenden Gliede der Reihe: $\beta, \gamma \dots \lambda, \mu, \nu$ also bezüglich mit μ und λ, und addirt den vorletzt entstandenen Factor bezüglich $1, \nu, \nu\mu+1$ u. s. w. Der Algorithmus ist sonach:

$$\text{A)} \quad b[\nu, \mu \dots \delta] - c[\nu, \mu \dots \gamma] = \pm 1,$$
$$a[\nu, \mu \dots \gamma] - b[\nu, \mu \dots \beta] = \mp 1,$$

wo die in Klammer eingeschlossenen Grössen die Coefficienten sind, und man hat:

$$6) \quad [\nu] = \nu, \ [\nu, \mu] = \mu[\nu] + 1,$$
$$[\nu, \mu, \lambda] = \lambda[\nu, \mu] + [\nu]$$

. . .

$$[\nu, \mu \dots \beta] = \beta[\nu, \mu \dots \gamma] + [\nu, \mu \dots \delta].$$

Wir beweisen dies Gesetz durch vollkommene Induction. Ist die erste der Gleichungen A richtig, so gibt der Ausdruck $a = b\beta + c$ offenbar:

$$a[\nu, \mu \dots \gamma] = b\beta[\nu, \mu \dots \gamma]$$
$$+ c[\nu, \mu \dots \gamma] = b(\beta[\nu, \mu \dots \gamma]$$
$$+ [\nu, \mu \dots \delta]) \mp 1 = b[\nu, \mu \dots \delta] \mp 1,$$

was mit der zweiten Gleichung 1) übereinstimmt.

Anm. Die gewöhnliche Auflösung mittels der Kettenbrüche ist die, dass man $\frac{a}{b}$ in einen Kettenbruch verwandelt. Ist $\frac{p}{q}$ der letzte Näherungsbruch, so ist (vergleiche den Artikel: Kettenbruch):

$$aq - bp = \pm 1, \quad \text{also:} \quad x = \pm q, \ y = \pm p$$

eine Auflösung. Der Algorithmus, zu dem dies Verfahren führt, stimmt aber genau mit dem hier gegebenen überein.

Beispiele.

I. Es soll die Zahl 900 in zwei Theile getheilt werden, deren einer durch 11 dividirt den Rest 5, der andere durch 17 dividirt den Rest 7 lässt.

Die Theile haben also bezüglich die Form:

$$11x + 5, \quad 17y + 7,$$

also:

$$11x + 17y + 5 + 7 = 900,$$

d. h.:

$$17y + 11x = 888.$$

Setzt man:

$$y = 888u, \quad x = -888v,$$

so kommt:

$$17u - 11v = 1.$$

Man bildet nun:

$$17 = 11 \cdot 1 + 6, \ 11 = 6 \cdot 1 + 5, \ 6 = 5 \cdot 1 + 1.$$

Die Zahlen ν, μ, λ sind also hier 1, 1, 1, und man hat:

$$[1] = 1, \ [1, 1] = 2, \ [1, 1, 1] = 1 \cdot 2 + 1 = 3,$$

also:

$$u = 2, \quad v = 3,$$

und somit:

$$y_1 = 2 \cdot 888 = 1776, \quad x_1 = -2664.$$

Die allgemeine Auflösung ist dann:

$$y = 1776 - 11z, \quad x = -2664 + 17z.$$

Unserer Aufgabe gemäss, darf keine der Zahlen 100 übersteigen, und beide sind positiv. Wegen y darf also z nicht grösser als $\frac{1776}{11}$ oder 161 sein, wegen x muss z grösser als $\frac{2664}{17}$, also wenigstens gleich 157 sein.

Also nur die Werthe 157, 158, 159, 160, 161 lösen die Aufgabe.

Man hat:

$$\text{für } z = 157, \quad y = 49, \quad x = 5.$$

Setzt man noch $z = z_1 + 157$, so kommt:

$$y = 49 - 11z_1, \quad x = 5 + 17z_1,$$

also: für $z_1 = 0$, $y = 49$, $x = 5$,
für $z_1 = 1$, $y = 38$, $x = 22$,
für $z_1 = 2$, $y = 27$, $x = 39$,
für $z_1 = 3$, $y = 16$, $x = 56$,
für $z_1 = 4$, $y = 5$, $x = 73$.

Weitere Auflösungen sind nicht möglich. Die Theile sind bezüglich:

$$11x+5, \quad 17y+7,$$

also für $x=5$, $y=49$ sind dieselben z. B.:

$$60 \text{ und } 840.$$

Die Aufgabe hat also im Ganzen fünf Lösungen.

II. Eine Gleichung von der Form:

$$ax-by=c,$$

wo a, b, c ganze positive Zahlen sind, hat dagegen unendlich viel Lösungen in positiven ganzen Zahlen.

Z. B.: Es sollen drei Zahlen gefunden werden, so beschaffen, dass wenn man die erste mit 7, die zweite mit 9, die dritte mit 11 multiplicirt, das erste Product um 1 kleiner als das zweite, das zweite um 2 grösser als das dritte ist.

Sind x, y, z die Zahlen, so hat man:

$$7x+1=9y, \quad 7x=11z+2.$$

Die erste Gleichung gibt:

$$9y-7x=1,$$

$$9=1\cdot 7+2, \quad 7=3\cdot 2+1,$$

$$[3]=3, \quad [3, 1]=1\cdot 3+1=4,$$

also:

$$y_1=-3, \quad x_1=-4.$$

(Das Zeichen bestimmt man am bequemsten durch Einsetzen.) Allgemein:

$$y=x-3+7w, \quad x=-4+9w,$$

oder wenn man $w=1+w'$ setzt:

$$y=4+7w', \quad x=5+9w'.$$

Diese Werthe setzt man in die zweite gegebene Gleichung ein, und erhält:

$$35+63w'=11z+2,$$

$$11z-63w'=33.$$

Sei:

$$z=-33u, \quad w'=-33v,$$

so kommt:

$$63v-11u=1,$$

$$63=5\cdot 11+8, \; 11=1\cdot 8+3, \; 8=2\cdot 3+2, \; 3=1\cdot 2+1.$$

Aus den Zahlen 1, 2, 1, 5 ergibt sich:

$$[1]=1, \quad [1, 2]=2\cdot 1+1=3,$$

$$[1, 2, 1]=1\cdot 3+1=4,$$

$$[1, 2, 1, 5]=5\cdot 4+3=23,$$

$$v=-4, \quad u=-23,$$

$$z_1=759, \quad w'=132,$$

also allgemein:

$$z=759+63s, \quad w'=132+11s.$$

Hierzu kommt nun durch Einsetzen:

$$y=928+77s, \quad x=1193+99s.$$

Um diese Zahlen möglichst zu verkleinern, setzen wir:

$$s=-12+t,$$

und erhalten:

$$z=3+63t, \quad y=4+77t, \quad x=5+99t,$$

was für $t=0, 1, 2 \ldots$ unendlich viel Auflösungen gibt.

Dies Beispiel zeigt auch, wie zu verfahren ist, wenn $n-1$ Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind. Man bildet eine Gleichung mit zwei Unbekannten, und die daraus gefundenen Werthe setzt man successive in die andern Gleichungen ein.

III. Wir wollen noch eine Aufgabe nehmen, die nur eine Auflösung hat.

Der Bruch $\frac{37}{48}$, dessen Nenner die Primzahlen 16 und 3 zu Factoren hat, soll in zwei andere zerlegt werden, welche diese Zahlen zu Nennern haben. Man hat also:

$$\frac{37}{48}=\frac{x}{16}+\frac{y}{3},$$

oder:

$$3x+16y=37,$$

$$x=37u, \quad y=37v,$$

$$3u+16v=1,$$

$$16=5\cdot 3+1.$$

Die Auflösungen sind:

$$u=-5, \quad v=1,$$

$$x_1=-185, \quad y_1=37,$$

allgemein:

$$x=-185+16w, \quad y=37-3w.$$

Hier repräsentiren alle Auflösungen indessen nur eine. Denn setzt man ein, so kommt:

$$\frac{37}{48}=-\frac{185}{16}+w+\frac{37}{2}-w,$$

also der Zusatz $16w$ und $-3w$ zeigt nur an, dass zu dem einen Bruch eine beliebige ganze Zahl zugezählt, von dem andern abgezogen werden kann, was sich von selbst versteht. Wir benutzen also die Grösse w nur zur Vereinfachung der Zähler.

Ist $w=12$, so hat man:

$$x=7, \quad y=1,$$

also:

$$\frac{37}{48}=\frac{7}{16}+\frac{1}{3}.$$

Uebertrifft die Anzahl der Unbekannten die der Gleichungen um mehr als 1, so ist eine entsprechende Anzahl der Unbekannten willkürlich, auch kann möglicher Weise sich aus der Aufgabe selbst eine neue Bedingung ergeben.

Wir wollen dies an einem Beispiel erläutern.

IV. Der Bruch $\frac{29}{30}$ soll in drei andere zerlegt werden, deren Nenner die Primfactoren von 30, also 2, 3, 5 sind. Man hat:

$$\frac{29}{30}=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5},$$

d. h.:

$$15x+10y+6z=29,$$
$$15x+10y=29-6z.$$

Diese Gleichung ist nur möglich, wenn $29-6z$ durch 5 theilbar ist. Die Gleichung zerfällt also in zwei:

$$29-6z=5u,\quad 3x+2y=u.$$

Die erste Gleichung heisst auch:

$$5u+6z=29.$$

Die Auflösung der Gleichung:

$$5u'+6z'=1$$

ist:

$$u'=-1,\quad z'=+1,$$

also die der gegebenen Gleichung:

$$u=-29+6w,\quad z=29-5w,$$

oder in kleineren Zahlen:

$$u=1+6w,\quad z=4-5w,$$

und die zweite gegebene Gleichung wird:

$$3x+2y=1+6w.$$

Die Auflösung von:

$$3x'+2y'=1$$

ist:

$$x'=1,\quad y'=-1,$$

also die unserer Gleichung:

$$x=1+6w-2s,\quad y=-1-6w+3s.$$

Setzt man aber diese Werthe und den von z in die ursprüngliche Gleichung, so kommt:

$$\frac{29}{30}=\frac{1}{2}+3w-s-\frac{1}{3}-2w+s+\frac{4}{5}-w,$$

also die Grössen w und s geben nur ganze Zahlen, die sich wegheben. Es ist also nur eine Auflösung möglich. Wir benutzen jedoch die Grössen t und w zur Vereinfachung von z, indem wir setzen:

$$s=w=0.$$

Es wird dann:

$$x=1,\quad y=-1,\quad z=4,$$
$$\frac{29}{30}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{4}{5}.$$

Es folgt hieraus leicht, dass jeder Bruch sich immer und nur auf eine Art in Theilbrüche zerlegen lässt, deren Nenner die Primzahlpotenzen sind, welche der Nenner des gegebenen Bruchs zu Factoren hat.

Wir knüpfen hieran ein paar Beispiele der Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen.

I. Die Gleichung:

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots}{b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\ldots}$$

ist in ganzen Zahlen aufzulösen.

Sei p der Zähler, q der Nenner dieses Bruches. Eliminirt man aus den Gleichungen:

$$p=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots,$$
$$q=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$$

die Grösse x, so kommt eine Gleichung:

$$0=c_0+c_1p+c_2q+e_1p^2+e_2pq$$
$$+e_3q^2+\ldots$$

Setzen wir hierin $p=qy$, so kommt:

$$0=c_0+c_1qy+c_2q+e_1q^2y^2+e_2q^2y$$
$$+e_3q^2+\ldots,$$

worin alle Glieder, mit Ausnahme des ersten, q enthalten. Es muss c_0 ein Vielfaches von q sein. Man sucht also alle Theiler von c_0, und setzt diese für q in die Gleichung:

$$q=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots$$

Die ganzen rationalen Werthe von x, die sich aus diesen Gleichungen ergeben, sind nach und nach in die gegebene Gleichung einzusetzen, worunter die, welche y als ganze Zahl ergeben, nothwendig sein müssen.

Nur wenn $q=b_0$ ist, wird diese Methode unanwendbar. In diesem Falle hat man:

$$y=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots}{b_0}.$$

Der Zähler ist also durch b_0 theilbar. Ist ξ ein Werth von x, der dieser Bedingung genügt, so ist auch $\xi+s\beta_0$ ein solcher, wenn s eine ganze Zahl ist. Aus diesem Grunde kann man ξ immer kleiner als b_0, oder, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\frac{b_0}{2}$ annehmen, und

mit allen ganzen Zahlen, die so beschaffen sind, stellt man Versuche an, um die entsprechenden Werthe von x zu ermitteln.

Sei z. B.:

$$y = \frac{2x+18}{5x-3},$$

$$p = 2x+18, \quad q = 5x-3,$$

also:

$$5p-2q-96=0,$$
$$5p-2q=96.$$

Die Factoren von 96 sind:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 48,$$

wozu noch 0 kommt. Versuche geben:

$$x = -9, -1, 0, 1, 3, 7,$$
$$y = 0, -2, -6, 10, 2, 1.$$

II. Die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

soll so aufgelöst werden, dass x, y, z rationale Zahlen sind.

Die Aufgabe hat die geometrische Bedeutung, ein rechtwinkliges Dreieck zu finden, dessen drei Seiten rationale Werthe haben.

Sei:

$$z = x+u,$$

so ist:

$$y^2 = 2xu + u^2,$$

also:

$$x = \frac{y^2-u^2}{2u}, \quad z = \frac{y^2+u^2}{2u},$$

wo y und u beliebig sind. Für $y=2$, $u=1$ erhält man:

$$x = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{5}{2},$$

oder indem man alle Grössen mit 2 multiplicirt:

$$x=3, \; y=4, \; z=5.$$

Der erste, welcher über unbestimmte Aufgaben schrieb, ist Diophantus, ein Schriftsteller, dessen Zeit man nicht kennt. Die Ausgabe dieses Schriftstellers, welche Fermat vorbereitete und sein Sohn 1760 herausgab, ist mit so ausgezeichneten Bemerkungen und Zusätzen von Seiten des Herausgebers versehen, dass dieselbe als der eigentliche Urquell der neueren Arithmetik zu betrachten ist.

Unbestimmte Coefficienten (Analysis).

Dieselben werden namentlich bei Potenzreihen angewandt, wenn man die Form einer Function bis auf den Werth dieser Coefficienten kennt, um durch die Eigenschaften der Function dieselben zu bestimmen.

Die Methode beruht hauptsächlich auf den von Descartes herrührenden Satz. Ist x eine variable Grösse, so kann der Ausdruck:

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

nur dann immer gleich Null sein, wenn $a=b=c=d= \ldots =0$ ist. Setzt man nämlich zunächst $x=0$, so ergibt sich $a=0$, und wenn man nach der Division durch x wieder $x=0$ setzt: $b=0$ u. s. w.

Die Anwendung dieses Satzes erfordert jedoch, dass man die Richtigkeit der Form vorher bewiesen hat.

Wir geben einige Beispiele von der Anwendung dieser Methode.

I. Durch den Cauchy'schen Satz steht es fest (vergleiche den Artikel: Quantität — imaginäre), dass jede Function $f(x)$, die für $x=0$ eindeutig und continuirlich ist, sich in eine unendliche Reihe nach ganzen positiven Potenzen entwickeln lässt. Die Coefficienten dieser Reihe gibt in der Regel sehr leicht die obige Methode, leichter oft als der Maclaurin'sche Satz. Wie weit die Reihe aber gilt, müssen die im besagten Artikel gegebenenen Betrachtungen zeigen.

Sei z. B. $f(x) = \arcsin x$ eine Function, die erst für $x=1$ mehrdeutig wird. Um diese nach Potenzen von x zu entwickeln, setzen wir:

$$\arcsin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$

und differenziiren:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ hat zum Coefficienten des mit x^{2s+1} multiplicirten Gliedes 0, also:

$$a_{2s} = 0.$$

Dies gilt auch für a_0, da für $x_1 = 0$ die Gleichung 1) wird:

$$0 = a_0.$$

Ferner hat der Coefficient von x^{2s} den Werth:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2s-1)}{1 \cdot 2 \ldots s \cdot 2^s},$$

welches der Werth von $(2s+1)a_{2s+1}$ ist, so dass man hat:

$$a_{2s+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2s-1)}{(2s+1)\,1\cdot 2\ldots s\cdot 2^s},$$

$$\arcsin x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots,$$

eine Reihe, die convergirt, so lange x kleiner als 1 ist.

Durch dieselbe Methode kann man auch die Coefficienten der allgemeinen Entwickelung von $f(x)$ auf die einfachere Form des Maclaurin'schen Satzes bringen, wenn die Möglichkeit dieser Entwickelung nach Cauchy dargethan ist.

Setzt man nämlich:

$$f(x)=a_0+a_1 x+a_2 x^2+a_3 x^3+\ldots,$$

so erhält man durch wiederholtes Differenziiren:

$$f'(x)=a_1+2a_2 x+3a_3 x^2+\ldots,$$
$$f''(x)=2a_2+2\cdot 3a_3 x+\ldots,$$
$$f'''(x)=2\cdot 3a_3+\ldots,$$

also wenn man in allen diesen Gleichungen $x=0$ setzt:

$$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=1\cdot 2a_2,\quad f'''(0)=1\cdot 2\cdot 3a_3,$$

also:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''(0)+\ldots,$$

und wenn man $f(x)=\varphi(a+x)$ setzt, so kommt der Taylor'sche Satz:

$$\varphi(a+x)=\varphi(a)+x\varphi'(a)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\varphi(a)+\ldots$$

II. Auch bei endlichen Entwickelungen leistet diese Methode gute Dienste. Nehmen wir z. B. die Entwickelung einer gebrochenen rationalen Function in Partialbrüche.

Sei $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ein rationaler Bruch, der Zähler wenigstens um einen Grad niedriger als der Nenner, und:

$$\varphi(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p),$$

ein Product einfacher von einander verschiedener Factoren, so kann man setzen

1) $$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A_1}{(x-\alpha_1)}+\frac{A_2}{(x-\alpha_2)}+\ldots+\frac{A_p}{(x-\alpha_p)},$$

denn wenn man beide Seiten mit $\varphi(x)$ multiplicirt, erhält man durch Entwickelung nach Potenzen von x, dass $f(x)$ gleich einem Polynom von $p-1$ ter Ordnung sein soll. Diese Polynome sind in der That identisch, und somit auch die beiden Seiten unserer Gleichung, wenn die Coefficienten der Potenzen von x übereinstimmen. Dies sind an Anzahl p, und da die Seite rechts p unbestimmte Coefficienten enthält, so kann man diese demgemäss bestimmen, womit die Möglichkeit der Entwickelung feststeht. Um aber diese Coefficienten wirklich zu entwickeln, multiplicire man mit $(x-\alpha_s)$, und setze dann $x=\alpha_s$. Es kommt, da alle Glieder rechts bis auf A_s verschwinden:

2) $$A_s=f(\alpha_s)\frac{(x-\alpha_s)}{\varphi(x)},$$

wo $x=\alpha_s$ zu setzen ist. Da $\varphi(x)$ den Factor $(x-\alpha_s)$ enthält, kann man denselben nämlich heben. Auch kann man, da Zähler und Nenner Null werden, differenziiren. Es ergibt sich dann:

2a) $$A_s=\frac{f(\alpha_s)}{\varphi'(\alpha_s)}.$$

Kommen aber gewisse Factoren in höherer Potenz vor, enthält z. B. $\varphi(x)$ den Factor $(x-\alpha_t)^n$, so setzt man in der Entwickelung 1) statt $\frac{A_t}{(x-\alpha_t)}$ den Ausdruck:

$$\frac{A_t^{(1)}}{(x-\alpha_t)^n}+\frac{A_t^{(2)}}{(x-\alpha_t)^{n-1}}+\frac{A_t^{(3)}}{(x-\alpha_t)^{n-2}}+\ldots+\frac{A_t^{(n)}}{x-\alpha_t}.$$

Dass diese Form möglich ist, lässt sich ganz wie bei einfachen Factoren darthun. Multiplicirt man dann beide Seiten der Gleichung 1) mit $(x-\alpha_t)^n$, so verschwinden alle Coefficienten rechts bis auf $A_t^{(1)}$, wenn man $x=\alpha_t$ setzt. Es ist sonach:

3) $$A_t^{(1)}=f(\alpha_t)\frac{(x-\alpha_t)^n}{\varphi(x)},$$

wo $x=\alpha_t$ ist, oder wenn man Zähler und Nenner, um sie von der Form $\frac{0}{0}$ zu befreien, t mal differenziirt:

3a) $$A_t^{(1)}=1\cdot2\cdot3\ldots n\frac{f(\alpha_t)}{\varphi^{(n)}(\alpha_t)},$$

unter $\varphi^{(n)}(\alpha_t)$ wie immer den $n$ten Differenzialquotienten von $\varphi(\alpha_t)$ verstanden. Soll dagegen ein anderer Coefficient $A_t^{(r)}$ gefunden werden, so hat man:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}(x-\alpha_t)^n=A_t^{(1)}+A_t^{(2)}(x-\alpha_t)+A_t^{(3)}(x-\alpha_t)^2+\ldots+A_t^{(r)}(x-\alpha_t)^r$$
$$+\ldots+A_t^{(n-1)}(x-\alpha_t)^{n-2}+A_t^{n}(x-\alpha_t)^{n-1}+(x-\alpha_t)^nB,$$

wo B der von $x-\alpha_t$ freie Theil der Entwickelung ist. $r$maliges Differenziiren gibt nun:

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(f(x)\frac{(x-\alpha_t)^n}{\varphi(x)}\right)=1\cdot2\ldots r\,A_t^{(r)}+(x-\alpha_t)\,C,$$

wo C eine ganze rationale Function von x ist. Also wenn man $x=\alpha_t$ setzt:

4) $$\frac{1}{1\cdot2\ldots r}\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(f(x)\frac{(x-\alpha_t)^n}{\varphi(x)}\right)_{\alpha_t}=A_t^{(r)},$$

womit die Aufgabe völlig gelöst ist.

Beispiel.

Sei zu entwickeln:

$$\frac{x^2+1}{(x-a)^2(x+a)^2}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-a)^2}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a}+\frac{A_2^{(1)}}{(x+a)^2}+\frac{A_2^{(2)}}{x+a}.$$

Man hat:

$$\alpha_1=a,\qquad \alpha_2=-a,$$

$$A_1^{(1)}=\frac{a^2+1}{4a^2},\quad A_1^{(2)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+1}{(x+a)^2}\right)_a=\left(\frac{2x(x+a)^2-2(x^2+1)(x+a)}{(x+a)^4}\right)_a$$
$$=\left(\frac{2(ax-1)}{(x+a)^3}\right)_a=\frac{a^2-1}{4a^3},$$

$$A_2^{(1)} = \frac{a^2+1}{4a^2}, \quad A_2^{(2)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+1}{(x-a)^2}\right)_{-a} = \left(\frac{2x(x-a)^2-2(x^2+1)(x-a)}{(x-a)^4}\right)_{-a}$$

$$= \left(-\frac{2(ax+1)}{(x-a)^3}\right)_{-a} = -\frac{a^2-1}{4a^3},$$

also:

$$\frac{x^2+1}{(x-a)^2(x+a)^2} = \frac{a^2+1}{4a^2}\left(\frac{1}{(x+a^2)}+\frac{1}{(x-a)^2}\right)+\frac{a^2-1}{4a^3}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right).$$

Unbestimmte Gleichung (Arithmetik).

Siehe: Unbestimmte Aufgabe.

Unbestimmtes Integral (Analysis).

Ein Integral, dessen Grenzen willkürlich sind.

Undulationstheorie (Optik).

Die Herleitung der optischen Erscheinungen aus der Annahme einer wellenförmigen Bewegung eines Mediums, des Aethers, welche durch Schwingungen des lichtgebenden Körpers angeregt wird. Die Undulationstheorie ist die einzige, welche die optischen Erscheinungen zu erklären im Stande ist (vergleiche die Artikel: Licht und: Optik).

Unechter Bruch (Arithmetik).

Ein Bruch, dessen Zähler grösser als der Nenner ist, z. B. $\frac{5}{4}$.

Unecht gebrochene Function (Algebra).

Eine rationale gebrochene Function, deren Zähler höheren Grades als der Nenner ist.

Unendliche Reihe (Analysis).

Eine Reihe, die aus unendlich viel Gliedern besteht (siehe den Artikel: Reihe).

Unendlichkeit (Analysis).

Die Einführung der Unendlichkeit in die Analysis setzt durchaus keine metaphysische Begründung dieses Begriffes voraus, sie ist eben, wie so Vieles in der Analysis, als Symbol zu betrachten, und das Rechnen mit diesem Symbol beruht auf folgender Definition:

„Ein Satz oder eine Eigenschaft ist von einer unendlichen Grösse ausgesagt, wenn dieselben sich desto mehr der Richtigkeit nähert, je mehr man die betrachtete Grösse zunehmen lässt."

So z. B. heissen die Sätze:

$$\frac{1}{\infty}=0, \quad e^{-\infty}=0$$

weiter nichts, als dass die Ausdrücke $\frac{1}{x}$, e^{-x} sich immer mehr und bis auf jede Grenze der Null nähern, wenn man x immer mehr wachsen lässt. Der Ausdruck $\frac{1}{x}$ für $x=\infty$ wird auch eine unendlich kleine Zahl genannt, und solche kommen weit mehr als unendlich grosse in der Analysis vor. Wenn nach dem Obigen $\frac{1}{x}$ mit Null identificirt werden kann, so führt diese Betrachtung jedoch zu keinem weiteren Resultate für die Rechnung, wenn eine unendlich kleine Grösse durch eine andere dividirt wird, da eben $\frac{0}{0}$ ganz unbestimmt ist. Ist also ν unendlich klein, so sind, um z. B. den Ausdruck $\frac{\varphi(x+\nu)-\varphi(x)}{\nu}$ zu ermitteln, gewisse Betrachtungen nöthig, welche eben die Differenzialrechnung bilden. Der Hauptsatz derselben:

$$\frac{\varphi(x+\nu)-\varphi(x)}{\nu}=\varphi'(x)$$

gibt nach dem Obigen an, dass sich der Ausdruck links mit abnehmendem ν einer bestimmten Grenze $\varphi'(x)$ nähert, und diese um so mehr und bis auf einen beliebig kleinen Unterschied erreicht, je kleiner ν ist.

Wenn a und b endliche Grössen sind, so kann man in dem Ausdrucke $a+\nu b$ das zweite Glied vernachlässigen, da $a+\nu b$ sich mit abnehmendem ν um jeden beliebig kleinen Unterschied an a annähert; man sagt daher auch, der Ausdruck νb sei verschwindend klein gegen a. Mit dem Ausdruck a kann nun weiter gerechnet werden, und zu einem eigentlich falschen Resultate kann man auf diesem Wege nie gelangen, wohl aber zu einem unbestimmten.

Habe man z. B. zwei Ausdrücke $\alpha+\nu\beta$ und $a+\nu b$ auf verschiedenem Wege erlangt, und in dem letzteren νb vernachlässigt, zeige sich später, dass diese Ausdrücke gleich sind, dass man also hat $\alpha+\nu\beta=a+\nu b$, so hat die Vernachlässigung, die wir uns gestatteten, zu der

Gleichung $a+\nu\beta=a$ geführt. Zeigt sich später, dass $\alpha=a$ ist, so hat man $\nu\beta=0$ statt der eigentlichen Gleichung $\nu\beta=\nu b$. Indess ist die erstere noch nicht falsch, da ja νb in der That verschwindend klein ist, also gleich Null angenommen wird. Ein falsches Resultat entsteht erst, wenn man durch ν dividiren und $b=0$ setzen wollte. Da nämlich gleich bei Anfang der Rechnung $\nu b=0$ angenommen wurde, also $\nu=0$, und $\frac{0}{0}$ unbestimmt ist, so ist der Schluss $\frac{\nu\beta}{\nu}=b$ hier ein falscher. Wenn wir jedoch die ganze Rechnung so durchführen, als wenn ν beliebig wäre, so kommt man zu dem Resultat $\nu\beta=\nu b$, und hier ist, da ν noch nicht gleich Null gesetzt war, der Schluss, dass $\beta=b$ sei, richtig. Dies führt auf die sogenannte Vorsicht, die man beim Rechnen mit unendlich kleinen Grössen anwenden muss, wie so oft empfohlen wird. Diese Vorsicht ist keine andere, als die überhaupt beim Rechnen nothwendige, dass man eben keine Fehler machen muss. Hiermit ist jedoch nicht gesagt, dass man — wie Einige wollen — immer erst am Ende einer Rechnung das unendlich Kleine verschwinden lassen dürfe, man muss sich eben nur überzeugen, ob dieses Verschwindenlassen, welches bei einer beliebigen Stelle eintreten kann, nichts Unbestimmtes gebe. Gleiches gilt auch für den Ausdruck $a+b\nu+c\nu^2$. Man kann selbst $c\nu^2$ nicht gegen $b\nu$ verschwinden lassen, wenn später in der Rechnung $a+b\nu$ wegfällt, und durch ν^2 dividirt wird, obwohl in dem Ausdrucke $b\nu+c\nu^2=\nu(b+c\nu)$, $c\nu$ gegen b verschwindend klein ist.

Diese Betrachtungen reichen aus, wenn das Resultat der Rechnung ein endliches ist. Manche Rechnungen führen aber zu unendlich grossem Resultate, und hier sind besondere Betrachtungen nöthig.

Sei $\nu=\frac{1}{\varepsilon}$ eine abnehmende Grösse und habe man die Gleichung:

$$a+\frac{b}{\varepsilon}=\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon},$$

wo a, b, α, β endlich sind. Wollte man hier $\frac{1}{\varepsilon}$ verschwinden lassen, so käme $a=\alpha$, also wenn im Laufe der Rechnung mit ε multiplicirt wird, $a\varepsilon=\alpha\varepsilon$, während die richtige Gleichung ist:

$$a\varepsilon+b=\alpha\varepsilon+\beta.$$

Wir wollen sehen, in wiefern diese beiden Gleichungen übereinstimmen. Zwei Ausdrücke x und y sind gleich, wenn man hat:

A) $$y-x=0,$$

B) $$\frac{x}{y}=1.$$

Setzen wir nun $x=a\varepsilon+b$, $y=\alpha\varepsilon+\beta$, so gibt die Gleichung B):

$$\frac{a\varepsilon+b}{\alpha\varepsilon+\beta}=1,$$

d. h.:

$$\frac{a+\frac{b}{\varepsilon}}{\alpha+\frac{\beta}{\varepsilon}}=1,$$

und hier kann offenbar $\frac{b}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\varepsilon}$ weggelassen werden, also:

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{a\varepsilon}{\alpha\varepsilon}=1.$$

In diesem Sinne ist also die Gleichung $a\varepsilon=\alpha\varepsilon$ richtig. Wendet man dagegen Gleichung A) an, so kommt:

$$(a-\alpha)\varepsilon+b-\beta=0,$$

und diese Gleichung stimmt mit $a\varepsilon-\alpha\varepsilon=0$ nur überein, wenn $b=\beta$ ist, was hier nicht angenommen wurde. Hieraus folgt:

„Besteht das Resultat in einer Gleichung, deren beide Seiten unendlich gross sind und die von der Form:

$$a\varepsilon+b=\alpha\varepsilon+\beta$$

ist, so können Vernachlässigungen des unendlich Kleinen an beliebigen Stellen nur vorgenommen werden, wenn die Gleichungen so verstanden werden, dass die Quotienten beider Theile Eins geben, nicht aber so, dass die Differenz Null gibt."

Auch kann das Resultat eine Form haben, wo selbst der Quotient nicht mehr Eins ist. Z. B. gehen wir von der identischen Gleichung aus:

$$a+\frac{b}{\varepsilon}=\left(a+\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{b-1}{\varepsilon}.$$

Wollten wir die zweiten Glieder rechts und links vernachlässigen, so käme:

$$a=a+\frac{1}{\varepsilon},\quad \text{also}\quad a\varepsilon=a\varepsilon+1.$$

Hier ist allerdings noch der Quotient:

$$\frac{a\varepsilon+1}{a\varepsilon}=1,$$

wenn ε unendlich gross ist. Aber wenn

beide Ausdrücke etwa Exponenten von einer Zahl u werden, so hat man:

$$u^{a\varepsilon} = u^{\dot{a}\varepsilon} \cdot u,$$

wo der Quotient der rechten Seite durch die linke gleich u ist. Hier also ergibt sich ein völlig falsches Resultat.

Nur also auf Grund bestimmter Sätze dürfen solche Vernachlässigungen stattfinden, was aber sich aus der Definition des Unendlichen selbst ergibt, und somit bei richtigem Schliessen durchaus keine Gefahr ist, ein falsches Resultat zu erhalten.

Näheres gibt der Artikel: Quantität.

Ungleichförmige Beschleunigung (Dynamik).

Eine solche kommt einer Bewegung zu, deren Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um ungleiche Grösse wächst. So ist z. B. die Fallbewegung beschaffen, wenn der Fall aus einer grossen Höhe erfolgt, wo man während desselben die Entfernung vom Erdmittelpunkte nicht als constant betrachten darf.

Ungleichförmige Bewegung (Dynamik).

Eine solche, deren Geschwindigkeit nicht constant ist.

Ungleichschwebende Temperatur (Akustik).

Die derartige Verfertigung und Abstimmung der Instrumente, dass die Intervalle eines halben Tones nicht alle gleich sind. Da bei jeder musikalischen Temperatur ein Fehler gegen das reine Intervall gemacht wird, so kann man es durch die ungleichschwebende erreichen, dass die am häufigsten vorkommenden Intervalle nahe rein sind, und der Fehler auf die seltener vorkommenden übertragen wird. Dennoch ist die gleichschwebende Temperatur die allgemein gebräuchliche. (Siehe den Artikel: Akustik.)

Ungrade (Arithmetik).

Heisst eine Zahl, die nicht durch 2 theilbar ist. Alle Primzahlen bis auf 2 sind ungrade. Jede ungrade Zahl hat die Form $2n+1$, wenn n eine beliebige ganze Zahl ist.

Union (Combinationslehre).

Die einzelnen Elemente, welche aus einer gegebenen Anzahl herausgegriffen werden.

Universalgelenk (Maschinenlehre).

Gelenk zur Kuppelung zweier Wellen, die in einem Winkel zusammentreffen. (Siehe den Artikel: Kuppelung.)

Universalinstrument (Astronomie).

Ein Winkelmessinstrument, das so gestellt werden kann, dass man es bald als Passageninstrument, bald als Meridiankreis, Multiplicationskreis und Theodolit gebrauchen kann.

Universalschraubenschlüssel (Maschinenlehre).

Schlüssel zum Eingriffe in verschiedene Schraubenmuttern. Von den beiden Backen, welche den Schraubenkopf ergreifen, kann der eine durch eine Schraube, deren Mutter in der Handhabe sich befindet, dem andern beliebig genähert werden, indem man die Handhabe um ihre Axe dreht.

Universaluhr (Gnomonik).

Gleichbedeutend mit Aequatorialuhr (siehe den Artikel: Sonnenuhr).

Unmögliche Grösse (Analysis).

Schlechte Uebersetzung von imaginäre Grösse.

Unreine Gleichung (Algebra).

Eine Gleichung, deren eine Seite aus mehr als zwei Gliedern besteht.

Unruhe (Horologie).

Die Haarfeder, welche den Gang der Federuhren regulirt (siehe den Artikel: Chronometer).

Unterer Planet (Astronomie).

Die Planeten, welche zwischen Sonne und Erde liegen, also Mercur und Venus. Der Planet oder die Planetenschaar, welche nach Leverrier zwischen Sonne und Mercur liegen soll, ist noch immer problematisch.

Untergang (Astronomie).

Die Stellung eines Sternes am Horizont, ehe er unter denselben herabsinkt.

Unterschied (Arithmetik).

Gleichbedeutend mit Rest oder Differenz.

Unterschlächtiges Wasserrad (Hydraulik).

Ein verticales Wasserrad, welches vom

Wasser nahe beim Fusse angegriffen wird (siehe den Artikel: Wasserrad).

Unterstützungspunkt, Hypomochlium (Statik).

Der feste Punkt eines Hebels.

Unveränderliche Grösse, Constante (Analysis).

Solche, die sich nicht mit der Variablen ändert.

Unvollkommene Zahl (Arithmetik).

Eine solche, die kleiner ist, als die Summe ihrer Theiler. Z. B. 12 hat die Theiler 1, 2, 3, 4, 6, deren Summe 16 beträgt.

Unze (Messkunst).

Ein Gewicht von 2 Loth. Nach der Grösse des Lothes der verschiedenen Länder ist also auch die der Unze verschieden. Sie ist oder war üblich als Handels-, Gold-, Silber- und Medicinalgewicht.

Das preussische Mepicinalpfund gleich 24 (alten) Loth hatte 24 Unzen.

Die Unze (Oncia) war früher auch eine Münze verschiedener Staaten. Z. B.:

In Malta: 1 Oncia = $2\frac{1}{2}$ Scudi.

Auf der Insel Sicilen ebenso.

Im Königreich Neapel 1 Unze gleich 3 Ducati.

In Spanien: Onza de oro. 9,8753 gehen auf eine Cölnische Mark fein Gold. Die Onza ist gleich 22 Thlr. 7 Sgr. 4,8 Pf. Werth in preussischem Silbergeld. Dieselbe Unze heisst auch Doblon (Piaster).

Uranographie (Astronomie).

Die graphische Darstellung des Himmels auf Himmelsgloben oder Sternencharten.

Uranometrie (Astronomie).

Die Bestimmung der Fixsterne in ihrer Stellung am Himmel.

Uranus (Astronomie).

Der vorletzte der bis jetzt bekannten Planeten ist von Herschel (13. März 1781) entdeckt. Am Himmel erscheint er als Stern sechster Klasse. Mädler bestimmt seine scheinbare Grösse auf 4″ und schreibt ihm eine Abplattung von $\frac{1}{10,28}$ zu. Genauer kennt man nur zwei Trabanten des Uranus, jedoch sind vier oder fünf von einzelnen Astronomen gesehen worden.

Die Umlaufszeiten um den Hauptplaneten sind von vier Uranusmonden bekannt, und zwar betragen diese:

Siderisch:

2 Tage 12ʰ 29′ 22″,6
4 Tage 3ʰ 28′ 8″,0
8 Tage 17ʰ 1′ 19″,3
13 Tage 11ʰ 5′ 1″,5

Synodisch:

2 Tage 12ʰ 29′ 38″,57
4 Tage 13ʰ 28′ 46″,50
8 Tage 17ʰ 4′ 52″,9
12 Tage 13ʰ 13′ 32″,1

Nur von den beiden letzten aber kennt man die grossen Axen, und diese betragen bezüglich 63543 und 84933 Meilen. Die Neigung gegen die Uranusbahn ist nur bei dem letzten bekannt, sie beträgt 99° 43′ 53″,3, ist also fast senkrecht gegen die Bahn des Hauptplaneten.

Die Elemente des Uranus selbst sind:

Halbe grosse Axe
30,13381

Excentricität 0,0466006	Jährl. Veränder. derselben 0,00000025072
Länge des Perihels 168° 5′ 24″	Jährl. Veränderung 2″,28
Länge d. aufst. Knotens 73° 8′ 47″,8	Jährl. Veränder. −19″,54
Neigung der Bahn gegen die Ekliptik 0° 46′ 29″,2	Jährliche Veränderung 40″,0,3

Epoche 1. Januar 1800
173° 30′ 37″

Andere Verhältnisse sind:

Umlaufszeit:

Siderische	Tropische
30686 T. 19ʰ 41′ 36″	30586 T. 21ʰ 48′ 5″

Synodische
369 Tage 16ʰ

Rotationszeit	Neigung des Aequators
unbekannt	unbekannt

Entfernung von der Sonne:

kleinste	grösste
18,28848	20,07630

Mittlere tägliche Bewegung	Durchmesser, mittlerer, in Meilen
42″,4	7866

Scheinbare Grösse	Dichtigkeit	Schwere
4″,249	0,167	0,76

Fallzeit	Volumen	Masse
11,5	87	14,5

Bei der halben grossen Axe ist die der Erdbahn als Einheit genommen. Bei der Entfernung von der Sonne ist die mittlere Entfernung der Erde von der letzteren Einheit. Die auf Dichtigkeit, Schwere, Fallzeit, Volumen und Masse bezüglichen Zahlen haben zur Einheit die betreffenden Zahlen für die Erde.

Urvariable (Analysis).

Gleichbedeutend mit unabhängige Variable.

Usancen (kaufmännische Arithmetik).

Die Gewohnheiten, welche von Alters her in Bezug auf Zahlungen und anderen Verkehr unter Kaufleuten desselben Platzes oder Landes herrschen. Es wird denselben oft Gesetzeskraft gegeben, wo dann freilich eine möglichst vollständige Sammlung dieser Usancen, als auch, wie es in vielen Staaten geschehen ist, die Errichtung eigener Handelsgerichte mit Beisitzern, die zum Theil dem Kaufmannsstande angehören, nöthig ist.

Uso (kaufmännische Arithmetik).

Die auf irgend einem Wechselplatze fest angenommene Zeit zwischen der Ausstellung eines Wechsels von einem andern Platz oder einem andern Termin bis zum Verfalltage. Ein nach Uso ausgestellter Wechsel ist also zu dieser Zeit fällig. Gewöhnlich beträgt diese Zeit 2 Monate. Oft aber nimmt man 2 Uso, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ Uso als Verfallzeit an.

In Berlin ist Wechseluso 14 Tage nach dem Acceptiren, wozu 3 Respecttage kommen, in Frankfurt ebenfalls 14 Tage und 4 Respecttage, in Hamburg 14 Tage nach Sicht bei Wechseln von deutschen Plätzen, bei solchen von England, Frankreich und den Niederlanden 1 Monat, von Portugal, Spanien und Triest 1 Monat nach Dato, wobei 12 Respecttage. In London ist Uso bei den Wechseln aus Deutschland und den Niederlanden 1 Monat, aus Spanien und Portugal 2, aus Italien 3 Monat, aus Frankreich 30 Tage nach Dato, mit 3 Respecttagen. Je nachdem der Tag, wo der Uso gerechnet wird, der Acceptions- oder Ausstellungstag (Dato) ist, theilt man die Usowechsel in Sicht- und Datowechsel ein.

V.

Valuta (kaufmännische Arithmetik).

Werth einer Sache. Jeder Wechsel muss gesetzlich das Bekenntniss enthalten: Valuta empfangen, oder in Rechnung, womit der Einwand, dass kein Werth dafür erhalten sei, ausgeschlossen ist.

Valuta heisst aber auch der Werth, in welchem die Münzen berechnet sind. So ist in Deutschland die Valuta jetzt der 30 Thaler-Fuss, gleichbedeutend mit dem 45 Gulden-Fuss oder dem 52½ Gulden-Fuss Währung, da das Pfund fein zu 30 Thalern wie in Preussen, Sachsen, Hannover, und zu 45 Gulden wie in Oesterreich und zu 52½ Gulden in den süddeutschen Mittel- und Kleinstaaten ausgeprägt wird. Oft hat man für kaufmännische Zahlungen eine andere Valuta, als sonst gebräuchlich ist. So ist in Hamburg die Mark Banko, in Bremen der Thaler Gold (1 preussischer Friedrichsd'or zu 5 Thalern) Valuta.

Bei Wechselrechnungen, die sich auf Wechsel von oder nach fremden Plätzen beziehen, hat man zweierlei Valuta, die feste und die veränderliche. Man gibt nämlich ein- für allemal einer gewissen Summe in fremdem Gelde oder Wechseln einen gewissen festen Werth in einheimischen, und die Veränderung dieses festen Werthes zeigt die veränderliche Valuta an.

So z. B. ist in Berlin die feste Valuta für Hamburg 300 Mark Banko = 150 Thlr. Ist nun eines Tages die Hamburger veränderliche Valuta 149¾, so heisst dies, dass für 300 Mark nur 149¾ bezahlt werden.

Die festen Valuta muss man kennen. Kaufmännische Bücher, z. B. Nelkenbrechers bekanntes Taschenbuch, enthalten das Nöthige. Die veränderliche Valuta gibt der auf den grösseren Handelsplätzen täglich erscheinende Courszettel.

Valvationswerth der Münzen (practische Rechenkunst).

Derjenige Werth, der sich für eine fremde Münze ausgedrückt in heimischem Gelde aus Vergleich der gesetzlichen Münzfusse ergibt. Der Valvationswerth ist vom Courswerthe verschieden, wenn der wirkliche Werth des Geldes mit dem gesetzlichen Münzfusse aus irgend einem Grunde nicht mehr übereinstimmt.

Vara (Münzkunde).

Ein portugiesisches und spanisches Längenmaass (Elle). Die portugiesische Vara enthält 1,096 Meter, die spanische 0,8478 Meter.

Variable (Analysis).

Siehe veränderliche Grösse.

Variation — combinatorische (Analysis).

So werden die Combinationen mit Versetzungen genannt (vergleiche den Artikel: Combinationslehre).

Variation (Astronomie).

Eine der Hauptstörungen in der Länge des Mondes. Sie ist von Tycho de Brahe entdeckt. Am grössten ist sie, wenn der Mond 45° oder 132° nach einer oder der andern Seite von der Sonne entfernt ist, also in den Zeiten, die etwa in der Mitte der 4 Quadranten des Mondes liegen. Ihr grösster Werth beträgt 36½ Minuten.

Variation der Magnetnadel (Mathematische Geographie).

Die regelmässige, also periodische Ab-

weichung der Magnetnadel von ihrer mittleren Stellung. Es gibt eine tägliche und eine jährliche Variation je nach der Periode, ausserdem noch eine säculare Störung, von der nicht bekannt ist, ob sie periodisch sei, wozu dann noch eine regelmässige Störung kommt, die z. B. bei Gewittern, Nordlichtern u. s. w. sehr beträchtlich ist.

Die Variationen sind namentlich für die Declination untersucht, und ist man für dieselbe zu folgenden Sätzen gelangt.

1) Die tägliche Variation der Wintermonate muss von der der Sommermonate getrennt werden. In den ersteren sind 2 Maxima und Minima, in den letzeren nur ein Maximum und Minimum vorhanden.

(Unter Maximum ist der westlichste Stand der Nadel verstanden.)

2) Ein Maximum der täglichen Variation findet um 1 Uhr Mittags statt. Findet noch ein zweites statt, so ist dies kleiner.

3) In den spätern Abendstunden der Wintermonate findet ein Minimum statt, um Mitternacht ein zweites Maximum, zwischen 8 und 9 Uhr Morgens das zweite Minimum.

4) Im Sommer findet um 6 Uhr Morgens das Minimum statt.

5) Die Amplitude der Oscillation ist im Sommer fast dreimal so gross als im Winter.

6) Um 10 Uhr Morgens und 6—8 Uhr Abends ist die Declination sehr nahe der mittleren gleich.

7) Zu diesen Gesetzen, die offenbar sich durch eine magnetische Einwirkung der Sonne erklären, kommt noch eine solche des Mondes. Der Mond muss demgemäss mit seiner der Erde zugekehrten Hälfte nördlich magnetisch sein. Die Declination ist deshalb grösser, wenn der Mond östlich vom magnetischen Meridian steht, als wenn er sich westlich befindet.

Was die Inklination anbetrifft, so weiss man von deren Variation wenig. Kreil, dessen Beobachtungen man auch die obigen Sätze verdankt, findet ein dreifaches tägliches Maximum und Minimum der Declination. Das erste Maximum findet statt im Sommer zwischen 8 und 9, im Winter zwischen 10 und 11, um Mittag das erste Minimum, das zweite Maximum um 3 Uhr Nachmittags, das zweite Minimum in den spätern Abendstunden, das dritte Maximum um oder nach Mitternacht (es ist in einigen Monaten das grösste) das dritte Minimum des Morgens.

Hieran reihen sich Untersuchungen über die horizontale und totale Intensität der magnetischen Kraft in Bezug auf ihre Variation, die auch von Kreil herrühren.

Die Horizontalcomponente hat täglich ein Minimum und ein Maximum. Ersteres findet im Sommer um 10 Uhr Morgens, letzteres um 8 Uhr Abends statt, im Winter beide etwas später.

Die Totalintensität hat des Morgens früh ein Maximum, Nachmittags ein Minimum, und wahrscheinlich um 8 Uhr Abends ein zweites Maximum. Der Einfluss des Mondes ist auch hier erkennbar.

Die Bewegung der Nadeln auf der südlichen Erdhälfte ist wahrscheinlich der auf der nördlichen entgegengesetzt. Die Variationen nehmen gegen die Pole hin zu, und sind am magnetischen Aequator am kleinsten. Eine genauere theoretische Begründung der Variationen ist bis jetzt nicht gelungen.

Variationsrechnung (Analysis).

1) Allgemeines.

In verschiedenen Aufgaben der Analysis kommt es vor, dass dieselben Functionen gleichzeitig oder nach einander nach einem und einem andern Gesetze zu differenziiren sind.

Sei z. B. gegeben die Function:

$$U = f(x, y,)$$

und nehmen wir an, dass zwischen x und y eine Relation stattfinde, die bekannt oder unbekannt ist, also eine Gleichung:

$$\varphi(x, y) = 0,$$

oder zwei Gleichungen von der Gestalt:

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \varphi_2(t),$$

so hat man durch Differenziiren:

$$dU = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Die Ausdrücke dx und dy sind aber nicht unabhängig von einander, sondern man hat:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0,$$

oder:

$$dx = \frac{d\varphi_1}{dt} dt, \quad dy = \frac{d\varphi_2}{dt} dt.$$

Es ergibt sich also der Ausdruck von dU:

$$dU = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) dx,$$

wo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

zu setzen ist, oder:

$$dU = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\varphi_2}{dt}\right) dt.$$

Setzt man dagegen eine solche Relation nicht voraus, so sind in dem ersten Ausdrucke von dU: dx und dy von einander unabhängig und völlig willkürlich zu denken.

Bei denjenigen Betrachtungen, wo ein Wechsel des Gesetzes nur gelegentlich vorkommt, pflegt man den Ausdrücken von dU in jedem Falle eine der hier dargestellten Formen zu geben. Dies würde jedoch zu sehr grossen Weitläufigkeiten und auch Missverständnissen führen, wenn ein solches verschiedenes Gesetz des Differenziirens in derselben Gleichung vorkommt. Es ist daher gerathener und auch richtiger, dem Zuwachse selbst eine verschiedene Bezeichnung zu geben. Wir setzen also in eine oder mehrere Gleichungen von beliebig vielen Unbekannten:

$$U = f(x, y, z), \quad V = f_1(x, y, z)$$

immer die gewöhnlichen Bezeichnungen dx, dy, dz für den Zuwachs, wenn zwischen den Veränderlichen x, y, z, also auch zwischen den Zunahmen gewisse Beziehungen, bekannte oder unbekannte, stattfinden sollen, dagegen die Bezeichnungen δx, δy, δz, wenn diese Zunahmen den Relationen nicht unterliegen, ohne jedoch völlig auszuschliessen, dass etwa andere Beziehungen in diesem Falle angenommen werden. Um auch besondere Ausdrücke für diese verschiedenen Zunahmen zu haben, nennen wir die ersteren dx, dy, dz . . ., wie gewöhnlich, Differenziale, dagegen die letzteren Variationen.

Die Variationsrechnung ist also allgemein als derjenige Theil der Analysis zu definiren, der gleichzeitig Veränderungen betrachtet, die verschiedenen Gesetzen folgen. Er findet namentlich aber Anwendung auf Integrale. In der That kommt es oft vor, dass in einem Integral, z. B. $\int f dx$, wo f nicht allein x, sondern noch andere von x abhängig gedachte Variablen y, z . . . und deren Differenzialquotienten nach x enthalten, derart geändert werden soll, dass die Functionen y und z . . ., welche von x abhängig sind, ihren Ausdruck ändern, dass somit diesen Grössen y, z . . . ein von x unabhängiger Zuwachs δy, δz . . . gegeben werden muss. Namentlich ist dies in den Fragen über Maxima und Minima der Integrale der Fall, welche daher die eigentliche Anwendung der Variationsrechnung bilden, woher auch die letztere oft als Theorie der Maxima und Minima definirt wird.

Wir wollen jedoch, um einen vorläufigen Begriff von dergleichen Rechnungen zu geben, ein einfaches Beispiel, worin keine Integrale vorkommen, betrachten.

Sei gegeben die Differenzialgleichung:

$$dy = p\, dx,$$

oder:

$$dy - p\, dx = 0.$$

Ihr Integral wird die Form haben:

$$f(x, y) = c.$$

Um dieses Integral zu finden, kann man folgendermaassen verfahren.

Wenn man den Zusammenhang zwischen x und y ignorirt, so ist der Ausdruck: $\delta y - p\,\delta x$ nicht mehr gleich Null. Multiplicirt man denselben mit einer unbekannten Function M, so kann man setzen:

$$\delta U = M\,\delta y - p\,M\,\delta x,$$

denn diese Gleichung ist identisch mit den beiden andern:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = M, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -p\,M,$$

welche nach Elimination von M zu einer immer zu erfüllenden Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p\,\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

führen. Ist nun irgendwie der Ausdruck U bestimmt, so hat man auch, wenn man $U = c$ setzt:

$$dU = 0,$$

also:

$$dy - p\, dx = 0,$$

und die gegebene Gleichung ist erfüllt.

Also die gegebene Aufgabe ist identisch mit der folgenden:

„Denjenigen Factor M zu finden, welcher den Ausdruck $\delta y - p\,\delta x$ zu einem vollständigen Differenzial macht"

Es soll diese bekannte Betrachtung in der hier ihr gegebenen Gestalt eben nur eine Andeutung über den Wechsel des Gesetzes, nach welchem differenziirt wird, geben. Ehe wir aber auf Integrale kommen, ist ein Hauptsatz der Variationsrechnung zu geben.

Sei u eine Function von x, der wir einen Zuwachs δu, als von x unabhängig, geben, wodurch u in u' verwandelt werden soll. Nun ist offenbar:

$$u'_{(x+dx)} = u'_x + du'_x,$$

und auch:

$$u'_{(x+dx)} = u_{(x+dx)} + \delta(u_{x+dx}).$$

Der erste Ausdruck aber gibt:

$$u_x + \delta u_x + du_x + d\,\delta u_x.$$

und der letztere:

$$u_x + du_x + \delta u_x + \delta\, du_x,$$

woraus dann folgt:

$$d\,\delta u = \delta\, du.$$

Nimmt man auf beiden Seiten statt u etwa δu, so kommt:

$$d\,\delta\delta u = \delta\, d\,\delta u = \delta\delta\, du,$$

oder:

$$d\,\delta^2 u = \delta^2\, du,$$

also durch Wiederholung dieses Verfahrens:

$$d\,\delta^p u = \delta^p du,$$

also wenn man auch u mit du vertauscht:

$$d\,\delta^p du = dd\,\delta^p u = \delta^p ddu,$$

und indem man eben so fortfährt:

$$\delta^p d^q u = d^q \delta^p u,$$

oder: Die Zeichen d und δ können in beliebiger Ordnung nach einander geschrieben werden.

2) Variation einfacher bestimmter Integrale.

Wir führen die allgemeine Aufgabe auf mehrere einfachere zurück.

A) Zu variiren sei der Ausdruck:

$$U = \int_\alpha^\beta (u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \ldots + u_n dx_n),$$

wo $u_1, u_2 \ldots u_n$ Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ sind, und etwa x_1 die unabhängige Variable ist, auf die sich die Granzen α und β beziehen.

Da die Gesammt-Variation gleich der Summe der auf die einzelnen Veränderlichen bezüglichen Gesammt-Variationen ist, nach den Grundbegriffen der Differenzialrechnung, so hat man:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial U}{\partial x_n}\delta x_n + \int_\alpha^\beta (u_1 d\delta x_1 + u_2 d\delta x_2 \ldots u_n d\,\delta x_n).$$

Die ersten n Theilsätze haben die Gestalt:

$$\int_\alpha^\beta \Bigg[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\delta x_n\right) dx_1,$$
$$+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u_2}{\partial x_n}\delta x_n\right) dx_2$$
$$+ \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$+\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial u_n}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}\delta x_n\right) dx_n \Bigg],$$

und die letzten n geben durch theilweises Integriren:

$$(u_1 \delta x_1 + u_2 \delta x_2 \ldots + u_n \delta x_n)_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta (du_1 \delta x_1 + du_2 \delta x_2 + \ldots + du_n \delta x_n),$$

wo das Zeichen β, α an der Klammer wie gewöhnlich anzeigt, dass in dem Ausdruck in derselben für x_1 zuerst β und dann α gesetzt, und die Differenz genommen werden soll. Statt dieser Bezeichnung wählen Lindlöff und Moigno in Nachahmung eines Cauchy'schen das Zeichen:

$$\int_\alpha^\beta (u_1 \delta x_1 + u_2 \delta x_2 + \ldots + u_n \delta x_n),$$

das, wie wir später sehen werden, von Vortheil ist, und daher auch hier gebraucht werden soll. Die Bezeichnung du_1, $du_2 \ldots$ zeigt an, dass nach allen Veränderlichen zu differenziiren ist. Man hat somit schliesslich:

$$1) \qquad \delta U = \sum_{s=1}^{s=n} \left\{ \int_\alpha^\beta u_s \, \delta x_s + \int_\alpha^\beta \left\{ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_s} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_s} dx_n \right) \delta x_s - du_s \, \delta x_s \right\} \right..$$

B) Sei der Ausdruck:

$$U = \int_\alpha^\beta \sum_{s=1}^{s=n} (w_s dx_s)$$

zu variiren.

Es mögen aber die Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$ nicht mehr ganz beliebig, sondern durch Gleichungen von der Gestalt:

$$v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \ldots + v_n dx_n = 0$$

verbunden sein. Die Anzahl dieser Gleichungen ist beliebig.

Sei die Anzahl dieser Gleichungen gleich t, also:

$$v_1^{(1)} dx_1 + v_2^{(1)} dx_2 + \ldots + v_n^{(1)} dx_n = 0,$$

$$v_1^{(2)} dx_1 + v_2^{(2)} dx_2 + \ldots + v_n^{(2)} dx_n = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$v_1^{(t)} dx_1 + v_2^{(t)} dx_2 + \ldots + v_n^{(t)} dx_n = 0.$$

Die v sind Functionen der x. Einbegriffen ist der Fall, wo man nur einen Theilsatz $v\,dx_1 = 0$ oder $v = 0$ hat, wo also keine Differenziale vorhanden sind.

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Factor k_1, $k_2 \ldots k_t$ und addire alle zum Werthe unter dem Integralzeichen von u, so wird dieser sich nicht ändern, da die betreffenden Ausdrücke gleich Null sind. Das Integral hat dann wieder die Form:

$$U = \int_\alpha^\beta (u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \ldots + u_n dx_n),$$

wo zu setzen ist:

$$2) \qquad u_s = w_s + k_1 v_s^{(1)} + k_2 v_s^{(2)} + \ldots + k_t v_s^{(t)}.$$

Unter dieser Bedingung ist die Variation die in 1) gegebene. Zwar muss nämlich auch nach k_1, $k_2 \ldots$ variirt werden, und man erhält auf diese Weise z. B. für das mit k_1 multiplicirte Glied:

$$(v_1^{(1)} dx_1 + v_2^{(1)} dx_2 + \ldots + v_n^{(1)} dx_n)\, \delta k_1.$$

Dies wie die übrigen entsprechenden ist aber wegen der Bedingungsgleichungen gleich Null.

Die Bedingungsgleichungen drücken nun t Beziehungen zwischen den Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$, also auch zwischen deren Variationen $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_n$ aus.

Es sind also von diesen Ausdrücken t nicht beliebig, z. B. $\delta x_1, \delta x_2 \ldots \delta x_t$; diese t Variationen kann man aber in dem Ausdrucke 1) unter dem Integralzeichen verschwinden lassen, wenn man die mit ihnen multiplicirten Glieder, also bezüglich:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_s} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_s} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_s} dx_n - du_s$$

gleich Null setzt, wo s eine der Grössen 1 bis t ist, was wegen der bis jetzt willkürlichen Grössen $k_1, k_2 \ldots k_t$ geschehen kann.

Man erreicht auf diese Weise, dass alle noch unter dem Integralzeichen enthaltenen Variationen $\delta x_{t+1}, \delta x_{t+2} \ldots$ völlig willkürlich sind. Was das von den Grenzwerthen abhängige Glied anbetrifft, so müssen die Beziehungen dieser Grenzwerthe auf andere Weise bestimmt sein. Es kann dies z. B. durch Gleichungen zwischen den Grenzwerthen geschehen.

C) Es ist der Ausdruck U wie in B), es finden aber Beziehungen nicht für jeden Werth der Variablen, sondern nur für gewisse Integrale, die sie enthalten, statt. Seien diese Bedingungen von der Gestalt:

$$\int_\alpha^\beta (v_1^{(r)} dx_1 + v_2^{(r)} + \ldots + v_n^{(r)} dx_n) = C_s,$$

d. h. es ist ein von $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängiges Integral einer Constante C_s gleich. Eine solche Gleichung gibt nicht eine Relation zwischen $x_1, x_2 \ldots x_n$, welche richtig bleibt für jeden Werth von x_1 zwischen α und β, sondern nur eine solche zwischen allen Werthen dieser Variablen, welche in die Grenzen der Integration fallen. Wenn man nun jede dieser Gleichungen, deren wieder t sein mögen, mit einer Constanten $a_1, a_2 \ldots a_t$ multiplicirt und zu U addirt, so wird zu ersetzen sein U_s durch $U_s + \Sigma a_s C_s$; hierdurch aber bleibt δU_s ungeändert, da a und C Constanten, also $\delta \Sigma a_s C_s = 0$ ist. In den Ausdruck 1) ist dann zu setzen:

3) $$u_s = w_s + a_1 v_s^{(1)} + a_2 v_s^{(2)} + \ldots + a_t v_s^{(t)},$$

wo die a als Constanten zu betrachten sind. Fasst man das in 1) enthaltene Integral als Summe auf, welche sich auf die Zwischenwerthe zwischen α und β bezieht, so finden zwischen diesen Zwischenwerthen, die wir mit $\alpha_1, \alpha_1 \ldots \alpha_t$ bezeichnen wollen, und die also Constanten sind, und also auch zwischen ihren Variationen t Gleichungen statt. Die t Grössen a kann man nun aber sich so bestimmt denken, dass t Glieder der Summe verschwinden, und sind dann die übrigen Glieder mit willkürlichen Variationen multiplicirt.

Auf diese Hauptfälle lässt sich jede Aufgabe der Variationsrechnung mit einem einfachen Integral zurückführen.

Wir wollen jetzt den wichtigsten Fall der allgemeinen Aufgabe näher entwickeln. — Sei gegeben:

$$U = \int_\alpha^\beta f\, dt.$$

f ist eine Function von t einer andern Variablen x, und von den n ersten Differenzialquotienten von x nach t. Man soll δU bilden.

Wir setzen:

$$\frac{dx}{dt}=x_1,\ \frac{d^2x}{dt^2}=x_2\ \ldots\ \frac{d^nx}{dt^n}=x_n,$$

oder:

4) $$dx-x_1\,dt=0,\ dx_1-x_2\,dt=0\ \ldots\ dx_{n-1}-x_n dt=0.$$

Es ist dann f eine Function der Variablen $t,\ x,\ x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n$, und diese ist zu variiren, wie in B) gezeigt wurde, unter der Bedingung, dass die n Gleichungen 4) stattfinden.

Die Gleichungen 2) sind nun, wenn man die Variablen in der Ordnung t, $x,\ x_1\ \ldots\ x_n$ nimmt, und $w_1=f,\ w_2=w_3\ \ldots\ =0$ setzt:

$$u_1=f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n,$$
$$u_2=k_1,\ u_3=k_2\ \ldots\ u_{n+1}=k_n,$$

also:

$$\begin{aligned}\delta U=\int_\alpha^\beta &[(f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n)\delta t+k_1\delta x+k_2\delta x_1+\ldots+k_n\delta x_{n-1}]\\ &+\int_\alpha^\beta\left\{\left[\frac{\partial f}{\partial t}dt-d(f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n)\right]\delta t\right.\\ &+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\,dt+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-k_1\right)\delta x_1\,dt+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}-k_2\right)\delta x_2\,dt+\ldots\\ &\left.+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}-k_n\right)\delta x_n dt-dk_1\,\delta x-dk_2\,\delta x_1-\ \ldots\ -dk_n\delta x_{n-1}\right\}.\end{aligned}$$

Da die Anzahl der Gleichungen 4) gleich n ist, so müssen n Glieder des Integrals verschwinden. Wir setzen also die mit $\delta x_1,\ \delta x_2\ \ldots\ \delta x_n$ multiplicirten Theilsätze gleich Null, und erhalten zur Bestimmung der k die Gleichungen:

5) $$k_n=\frac{\partial f}{\partial x_n},\ k_{n-1}=\frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}-\frac{dk_n}{dt},\ k_{n-2}=\frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}-\frac{dk_{n-1}}{dt}\ \ldots$$
$$k_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{dk_2}{dt}.$$

Wenn man die verschwindenden Glieder weglässt, so kommt schliesslich:

$$\begin{aligned}\delta U=\int_\alpha^\beta &[(f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n)\delta t+k_1\delta x+k_2\delta x_1+\ldots+k_n\delta x_{n-1}]\\ &+\int_\alpha^\beta\left[\frac{\partial f}{\partial t}dt-d(f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n)\right]\delta t\\ &+\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{dk_1}{dt}\right)\delta x\,dt.\end{aligned}$$

Statt des mit δt multiplicirten Gliedes unter dem Integralzeichen kann man auch schreiben:

$$d(k_1x_1+k_2x_2+\ \ldots\ +k_nx_n)-\frac{\partial f}{\partial x}dx-\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1-\ \ldots\ -\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

Die Grössen $k_1,\ k_2\ \ldots\ k_n$ werden am besten successive durch die Gleichungen 5) eliminirt, welche auch einer sehr leicht zu findenden independenten Darstellung fähig sind.

Uebrigens leuchtet augenblicklich ein, dass wenn f ausser x und t noch eine dritte Variable y und ihre Differenziale nach t enthält, eben nur zu dem mit δt multiplicirten Gliede ein zweites kommt, welches dem ersten genau entspricht, wenn man $x, x_1, x_2 \ldots$ mit y, y_1, y_2 und die Coefficienten k_1, k_2 mit andern l_1, l_2 vertauscht, ausserdem aber ein drittes, mit δy multiplicirtes, ebenso gebildetes Glied hinzuzufügen ist. Zur Bestimmung der l sind dann Gleichungen zu bilden, die 5) analog sind.

3) Maxima und Minima einfacher Integrale.

Es sei ein Integral von der Form U im vorigen Abschnitt gegeben. Es wird gefragt, welche Functionen von x_1 die Grössen $x_2 \ldots x_n$ sein müssen, damit dies Integral ein Maximum oder Minimum sei.

Dieses Maximum oder Minimum ist ein unbedingtes, wenn keine Beziehungen zwischen den Grössen x stattfinden, ein bedingtes, wenn solche Beziehungen stattfinden, sei es, dass sie die in B) oder C) des vorigen Abschnittes angegebene Form haben. Die Aufgaben, bei welchen Beziehungen der letzteren Art obwalten, nennt man gewöhnlich isoperimetrische.

Alle diese sind jedoch in gleicher Weise zu behandeln. Wenn man den Grössen $x_1, x_2 \ldots$ einen unendlich kleinen Zuwachs gibt, mit andern Worten δU bildet, so nimmt das Integral die Form $U+\delta U$ an; wenn man aber statt des Zuwachses eine willkürliche Verminderung den Variablen gibt, so erhält man $U-\delta U$. Diese beiden Ausdrücke dürfen im Falle des Maximum nicht grösser, in dem des Minimum nicht kleiner als U sein, und man hat also:

$$\delta U=0,$$

als Bedingung für beides, vorausgesetzt, dass keine Discontinuität stattfindet. Indess ist diese Bedingung weder ausreichend — es braucht, wenn sie erfüllt ist, nicht immer ein Maximum oder Minimum stattfinden — noch kann man durch sie das erstere vom letzteren unterscheiden.

Indem wir die weitere Untersuchung dieses Gegenstandes vorbehalten, bemerken wir, dass bei den meisten Aufgaben schon an sich klar ist, ob einer der beiden Fälle und welcher stattfinde.

Betrachten wir jetzt den Werth von δU und zwar zunächst den Theil unter dem Summenzeichen. Die Grössen δx_1, $\delta x_2 \ldots$ darin sind völlig willkürlich, an sich, wenn das Maximum ein unbedingtes ist, im andern Falle dadurch, dass wir, wie in B) und C) des vorigen Abschnittes gezeigt, die mit abhängigen Variationen behafteten Glieder gleich Null setzen. Auch sind diese Werthe δx_1, δx_2 von denen im entwickelten Theile unabhängig, und es muss daher, damit $\delta U=0$ sei, jedes Glied unter dem Summenzeichen einzeln verschwinden, somit auch der entwickelte Theil gleich Null sein. Welche Bedingungen zwischen den einzelnen Gliedern dieses letzteren Theils stattfinden, hängt von der jedesmaligen Aufgabe ab. Die mit unabhängigen Variationen multiplicirten Glieder sind dann ebenfalls einzeln der Null gleich. Diese Bedingungen führen zu einer Anzahl Differenzialgleichungen, die nöthigenfalls mit den Bedingungsgleichungen B) zu verbinden sind. Die Constanten bestimmt dann der entwickelte Theil.

Offenbar ist es eigentlich unnöthig, die unabhängige Variable selbst zu ändern, wenn die Grenzen des Integrals fest sind. Denn wenn man nur den abhängigen Grössen eine Aenderung gibt, kann man in diesen Grenzen jede beliebige Aenderung des Integrals erreichen. Es wird aus diesem Grunde, indem man alle Theilsätze des Integrals gleich Null setzt, eine Gleichung identisch. Aber auch wenn die Grenzen nach einem gewissen Gesetze sich ändern können, kann man im Integrale die unabhängige Veränderliche unvariirt lassen, aber dann muss eine Variation eben der Grenzen eintreten. Diese Betrachtungen werden öfter ebenfalls der Variationsrechnung zu Grunde gelegt; die hier gegebenen ziehen wir aber als allgemeiner vor.

Das Gesagte ist jetzt auf Beispiele anzuwenden.

Möge in der Gleichung 6) nur der erste Differenzialquotient enthalten sein, so hat man $k_2=k_3=\ldots=0$, also die Gleichungen 5) geben:

$$k_1=\frac{\partial f}{\partial x},$$

und wenn man in 6) den mit δx multiplicirten Theil verschwinden lässt (der mit δt multiplicirte wird dann identisch Null, wie eben gezeigt wurde), hat man:

$$1) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{d\,\frac{\partial f}{\partial x_1}}{dt}.$$

Der entwickelte Theil aber ist:

1a) $\left(f - \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1\right) \delta t + \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x = 0,$

wo für t die Grenzwerthe α und β, für x die entsprechenden Werthe zu setzen sind. Sind die Grenzen α und β fest, so wird δt und δx gleich Null. Seien aber dieselben so bestimmt, dass für die untere Grenze eine Gleichung $x = \varphi_1(t)$, und für die obere eine andere $x = \varphi_2(t)$ stattfinde, so ist bezüglich:

$$\delta x = \varphi_1'(t)\,\delta t, \quad \delta x = \varphi_2'(t)\,\delta t,$$

also finden die Gleichungen:

2) $$f + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_1'(t) - x_1) = 0,$$

$$f + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi_2'(t) - x_1) = 0,$$

bezüglich an den Grenzen statt.

Beispiele.

I) Sei t die Abscisse, x die Ordinate. Es wird die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten gesucht, deren Abscissenwerthe gegeben sind. Dieselben seien α und β.

Es muss das Integral, welches den Bogen ausdrückt:

$$U = \int_\alpha^\beta \sqrt{(1 + x_1^2)}\, dt,$$

ein Minimum sein. Der entwickelte Theil verschwindet, da die Grenzwerthe fest sind. Man hat:

$$f = \sqrt{(1 + x_1^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{(1 + x_1^2)}},$$

also nach Gleichung 1):

$$\frac{x_1}{\sqrt{(1 + x_1^2)}} = c,$$

also wenn man für x_1 seinen Werth $\frac{dx}{dt}$ setzt:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 (1 + c^2) = c^2,$$

oder wenn man $\frac{c}{\sqrt{(1 - c^2)}} = a$ setzt:

$$x = at + b,$$

die Gleichung einer graden Linie. Sie ist völlig bestimmt, da zwei Punkte, $t = \alpha$ und $t = \beta$, gegeben sind.

Wird aber nur angenommen, dass diese Grade von zwei gegebenen Curven:

$$x = \varphi_1(t), \quad x = \varphi_2(t),$$

begrenzt werde, so geben, mit Rücksicht darauf, dass man hat:

$$x_1 = a, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{a}{\sqrt{(1 + a^2)}}, \quad f = \sqrt{(1 + a^2)},$$

die Gleichungen 2):

$$a\varphi_1'(t) = 1, \quad a\varphi_2'(t) = 1,$$

was zeigt, dass die Grade auf beiden Curven senkrecht steht.

II) Gegeben eine beliebige ebene Curve, deren Gleichung sei $x = \varphi(t)$. Es wird eine zweite von gegebener Länge C gesucht, derart, dass der zwischen beiden enthaltene Inhalt ein Maximum sei.

Dass es eine solche gebe, ist an sich ersichtlich. Da:

$$\int (x - \xi)\, dt$$

der Ausdruck für den Inhalt des zwischen zwei Curven liegenden Flächenstückes ist, so muss:

$$\int [x - \varphi(t)]\, dt$$

ein Maximum sein unter der Bedingung, dass in denselben Grenzen:

$$\int \sqrt{(1 + x_1^2)}\, dt = C,$$

also constant ist. Wir haben nach C) des vorigen Abschnittes somit:

$$f = x - \varphi(t) + a\sqrt{(1 + x_1^2)},$$

und die Gleichung 1) wird:

$$1 = a\frac{d}{dt}\left(\frac{x_1}{\sqrt{(1 + x_1^2)}}\right),$$

also:

$$(t - b)\sqrt{(1 + x_1^2)} = a x_1,$$

d. h:

$$x_1^2 = \frac{(t - b)^2}{a^2 - (t - b)^2},$$

also wenn man $x_1 = \frac{dx}{dt}$ setzt:

$$dx = \frac{(t - b)\, dt}{\sqrt{(a^2 - (t - b)^2)}},$$

$$(t - b)^2 + (x - e)^2 = a^2.$$

Die Curve ist ein Kreis. Zur Bestimmung ihrer Endpunkte weiss man, dass auf denselben $x = \varphi(t)$ ist, und es folgt ähnlich wie in der vorigen Aufgabe, dass in den Schnittpunkten beide Curven auf einander senkrecht stehn. Zur Bestimmung von a, b, c hat man die Gleichungen 2) in Gemeinschaft mit:

$$\int \sqrt{(1 + x_1^2)}\, dt = 0.$$

Uebrigens bleibt eine Constante unbestimmt.

Ist die gegebene Curve eine Grade, so ist leicht zu sehen, dass sie ein Durchmesser des Kreises sein wird.

III) Zwischen zwei gegebenen Punkten eine Curve zu ziehen, derart, dass wenn letztere sich um eine Axe dreht, die Rotationsfläche ein Minimum wird.

Das Integral ist:

$$\int x\sqrt{(1+x_1^2)}\,dt,$$

also:

$$f=x\sqrt{(1+x_1^2)},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=\sqrt{(1+x_1^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{x x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}},$$

d. h. nach Gleichung 1):

$$\sqrt{(1+x_1^2)}=\frac{d}{dt}\left(\frac{x x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}}\right).$$

Man hat jedoch:

$$dx=x_1\,dt,$$

und wenn man dt eliminirt:

$$\frac{\sqrt{(1+x_1^2)}}{x_1}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}}\right),$$

oder wenn man $\frac{x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}}=u$ setzt:

$$\frac{u\,d(xu)}{dx}=1,\quad ux\,du+u^2\,dx=dx,$$

d. h.:

$$\frac{u\,du}{1-u^2}=\frac{dx}{x},$$

oder:

$$x\sqrt{(1-u^2)}=a,$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{x}{\sqrt{(1+x_1^2)}}=a,\quad dt=\frac{a\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}.$$

Ein zweites Integral ist dann:

$$t-b=a\lg\frac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a},$$

woraus sich ergibt:

$$x+\sqrt{(x^2-a^2)}=ae^{\frac{t-b}{a}},$$

$$x-\sqrt{(x^2-a^2)}=ae^{-\frac{t-b}{a}},$$

also:

$$x=\frac{a}{2}\left\{e^{\frac{t-b}{a}}+e^{-\frac{t-b}{a}}\right\}.$$

Es ist dies eine Kettenlinie.

Die Bestimmung der Grenzen für den Fall, dass die Endpunkte durch gegebene Curven gehen, hat keine Schwierigkeit.

Setzen wir aber voraus, dass die Curve eine gegebene Länge habe.

Es muss dann:

$$\int\sqrt{(1+x_1^2)}\,dt$$

constant bleiben, und es wird das Integral:

$$\int(x+h)\sqrt{(1+x_1^2)}\,dt$$

ein Minimum. Dies stimmt genau mit dem Vorigen überein, wenn man x mit $x+h$ vertauscht, so dass man erhält:

$$x+h=\frac{a}{2}\left\{e^{\frac{t-b}{a}}+e^{-\frac{t-b}{a}}\right\},$$

was wieder eine Kettenlinie ist.

Geht sie durch zwei feste Punkte, so kann man wieder durch deren Coordinate und die Gleichung:

$$\int\sqrt{(1+x_1^2)}\,dt=0$$

die Grössen a, b, h bestimmen. Es ergeben sich aber zweierlei Werthe dafür: der eine gibt eine gegen die Rotationsaxe convexe, der andere eine concave Kettenlinie. Die letztere gibt ein Maximum, die erstere ein Minimum.

Bei Gelegenheit dieser Aufgabe ist eine allgemeine Bemerkung zu machen. Wenn man in Gleichung 6) des vorigen Abschnittes den mit ∂t multiplicirten Theil gleich Null setzt, und annimmt, dass die Eunction f, wie hier, t gar nicht enthalte, so kommt:

$$d(f-k_1x_1-k_2x_2-\ \ldots\ -k_nx_n)=0,$$

also:

3) $f=k_1x_1+k_2x_2+\ldots k_nx_n+\text{const.}$,

für unsern Fall, wo $k_2=k_3=\ldots=0$ ist, also:

3a) $$f=\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\text{const.}$$

Diese Gleichung, welche mit 2) gleichbedeutend ist, ist also bereits einmal integrirt. — Machen wir noch eine Anwendung:

IV) Die Curve zu finden, welche, wenn sie um eine Axe rotirt, den grössten oder kleinsten Inhalt umschliesst.

a) Es wird vorausgesetzt, dass die Curve von constanter Länge sei.

Da der gesuchte Inhalt gleich:

$$\pi\int x^2\,dt$$

ist, und:

$$\int \sqrt{(1+x_1^2)}\, dt$$

constant sein soll, so ist:

$$f=x^2+a\sqrt{(1+x_1^2)},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{a x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}},$$

also wegen 3 a):

$$x^2+\sqrt{(1+x_1^2)}=\frac{a x_1^2}{\sqrt{(1+x_1^2)}}+b,$$

oder:

$$(x^2-b)\sqrt{(1+x_1^2)}+a=0,$$

d. h.:

$$dt=\frac{(x^2-b)\,dx}{\sqrt{(a^2-(x^2-b)^2)}}.$$

Es ist dies die Differenzialgleichung der elastischen Linie. Ist ν der Krümmungsradius, so ergibt sich $\nu=\frac{a}{2x}$.

b) Wird aber vorausgesetzt, dass die Oberfläche constant sei, so ist:

$$f=x^2+a x\sqrt{(1+x_1^2)},$$

also:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{a x x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)}},$$

und man hat nach 3 a):

$$x[x+a\sqrt{(1+x_1^2)}]=\frac{a x_1^2 x}{\sqrt{(1+x_1^2)}}+b,$$

d. h.:

$$ax=(b-x^2)\sqrt{(1+x_1^2)}.$$

Eine Integration ist nicht möglich, doch zeigt sich leicht, dass die Summe der beiden Krümmungen der Rotationsfläche gleich $-\frac{1}{a}$ ist.

Was die Curve selbst anbetrifft, so hat Delaunay gezeigt, dass sie von einem Brennpunkte einer Ellipse oder Hyperbel beschrieben wird, welche auf einer Graden, der Rotationsaxe, rollt.

Man kann in diesem Beispiele annehmen, dass einer der Endpunkte fest sei, der andere aber beliebig verschoben wird. In der Gleichung 1 a) sind dann δt und δx unabhängig von einander, also gleichzeitig ihre Coefficienten Null. Es ist also für diese Grenze:

$$f=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}=0.$$

Dies kann nur stattfinden, wenn $b=0$ ist. Für diesen Fall also hat man statt der obigen Gleichung:

$$a+x\sqrt{(1+x_1^2)}=0,$$

woraus sich ergibt:

$$(t-c)^2+x^2=a^2;$$

man hat also jetzt einen Kreis. Uebrigens können für die bewegliche Grenze nur dann $f=0$ und $\frac{\partial f}{\partial x_1}=0$ sein, wenn $x=0$ ist.

Sind beide Grenzen beweglich, so findet für die andere ein Gleiches statt.

Es kommt der Fall vor, dass die Function f unter dem Integralzeichen von den Grenzwerthen abhängig ist.

Seien z. B. α, β die Grenzen von t, a, b die zugehörigen Werthe von x, und diese Grössen in x enthalten, so ist auch die auf sie bezügliche Variation zu nehmen. Es kommt also zu dem Integral ein Theil hinzu:

$$\delta\alpha\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dt+\delta\beta\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial \beta}\,dt$$
$$+\delta a\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial a}\,dt+\delta b\int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial b}\,dt.$$

Die Variationen von α, β ... sind hier aus dem Integralzeichen herauszuziehen, da diese Grössen für die Integration constant sind. Dieser Theil ist dann zu vereinen mit:

$$\int_\alpha^\beta \left(f-\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1\right)\delta t+\frac{\partial f}{\partial x_1}\,\delta x,$$

der sich ja auch auf die Grenzen bezieht. Ein Beispiel wird dies klar machen.

V) Diejenige (vertical gedachte) Curve zu finden, welche ein fallender Körper in der kürzesten Zeit zurücklegt. Die Zeit wird hier ausgedrückt durch das Integral:

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{1+x_1^2}{x-a+h}}\,dt,$$

wo h die Fallhöhe ist, welche der Anfangsgeschwindigkeit entspricht, a der Werth von x, welcher der untern Grenze $t=\alpha$ entspricht. — Setzen wir also:

$$f=\sqrt{\frac{1+x_1^2}{x-a+h}},$$

so ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{x_1}{\sqrt{(1+x_1^2)(x-a+h)}}.$$

Es gibt somit die Gleichung 3a):

$$(x-a+h)(1+x_1^2)=0.$$

Um dies zu integriren, wird gesetzt.

$$x-a+h=\frac{c}{2}(1-\cos\vartheta).$$

Die Differenzialgleichung wird dann:

$$\frac{c}{2}\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\sin\vartheta}{1-\cos\vartheta},$$

deren Integral ist:

$$\frac{c}{2}(\vartheta-\sin\vartheta)=t-a+e,$$

welche in Gemeinschaft mit:

$$\frac{c}{2}(1-\cos\vartheta)=x-a+h$$

eine Cycloide gibt.

Befinde sich jetzt der Anfangspunkt und Endpunkt dieser Cycloide auf zwei Curven, deren Gleichungen sein mögen:

$$x=\varphi_1(t)\quad\text{für}\quad t=\alpha,\qquad x=\varphi_2(t)\quad\text{für}\quad t=\beta,$$

so ist der von den Grenzen abhängige Theil nach dem Vorigen:

$$\int^\beta\left[f-\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]\delta t-\int^\alpha\left[f-\frac{\partial f}{\partial x_1}x_1+\varphi_1'(t)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}-\int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial a}dt\right)\right]\delta t,$$

wo die Zeichen $\int^\beta$ und $\int^\alpha$ andeuten, dass in den betreffenden Ausdrücken bezüglich $t=\beta$ und $t=\alpha$ gesetzt werden soll. Offenbar aber sind, da $\delta\beta$ und $\delta\alpha$ von einander unabhängig sind, diese Ausdrücke einzeln gleich Null.

Nun ergibt sich leicht:

$$x_1=\cot\frac{\vartheta}{2},\quad f=\frac{1}{\sqrt{c}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\cot\frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{c}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1+x_1^2)}}{\sqrt{(x-a+h)^3}}=\frac{1}{\sqrt{c^3}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^4},$$

$$\int_\alpha^\beta\frac{\partial f}{\partial a}dt=\frac{1}{\sqrt{c}}\left(\cot\frac{\vartheta_1}{2}-\cot\frac{\vartheta_2}{2}\right),$$

wo ϑ_1, ϑ_2 die den Grenzen α und β entsprechenden Werthe von ϑ sind. Setzt man dies in die beiden Theile des obigen Ausdrucks ein, die der Null gleich sind, so kommt:

$$1+\varphi_1'(\alpha)\cot\frac{\vartheta_2}{2}=0,\quad 1+\varphi_2'(\beta)\cot\frac{\vartheta_2}{2}=0,$$

also:

$$\varphi_1'(\alpha)=\varphi_2'(\beta),$$

d. h.: In den beiden Schnittpunkten der Cycloide sind die Grenzcurven parallel.

Da $\cot\frac{\vartheta}{2}=x_1$ ist, so ist die zweite Curve auf der Cycloide senkrecht (dies ist übrigens schon nach dem Früheren klar).

Es ist oft bei geometrischen Problemen besser, statt der Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten andere Beziehnngen einzuführen.

VI. Diejenige Curve zu finden, welche in Gemeinschaft mit der Evolute und den Krümmungsradien im Anfangs- und Endpunkte den kleinsten Inhalt einschliesst.

Der Ausdruck für diesen Inhalt ist $\frac{1}{2}\int \varrho\, ds$, wo ϱ der Krümmungsradius, s der Bogen ist. Sind x und y die rechtwinkligen Coordinaten, x_1, y_1 die ersten Differenzialquotienten nach s, x_2, y_2 die zweiten, so ist bekanntlich:

$$\varrho = \frac{x_1}{y_2} = -\frac{y_1}{x_2} = \sqrt{\frac{x_1^2+y_1^2}{y_2^2+x_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}},$$

da:

$$x_1^2+y_1^2=1$$

ist. Diese Gleichung ist eine Bedingung zwischen x, y und s; es muss also, wenn λ ein unbestimmter Factor ist, sein:

$$f=\frac{1}{\sqrt{y_2^2+x_2^2}}+\lambda(x_1^2+y_1^2-1).$$

In Gleichung 6) des vorigen Abschnittes ist t mit s zu vertauschen; auch treten, wie daselbst angedeutet, die auf y bezüglichen Theile hinzu. Man hat dann, da f von x und y frei ist, für die mit δx und δy multiplicirten Theile: $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, also:

$$\frac{dk_1}{ds}=0,\quad \frac{dl_1}{ds}=0,\quad k_1=a,\quad l_1=b.$$

Es ist aber:

$$k_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{dk_2}{ds},\quad l_1=\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{dl_2}{ds},$$

$$k_2=\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad l_2=\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

woraus sich ergibt:

$$k_2=-x_2\varrho^3,\quad l_2=-y_2\varrho^3,$$

$$k_1=2\lambda x_1+\frac{d(x_2\varrho^3)}{ds}=a,\quad l_1=2\lambda y_1+\frac{d(y_2\varrho^3)}{ds}=b.$$

Eliminirt man λ hieraus, so kommt:

$$y_1\frac{d(x_2\varrho^3)}{dt}-x_1\frac{d(y_2\varrho^3)}{ds}=ay_1-bx_1,$$

oder:

$$(y_1x_2-x_1y_2)\frac{d\varrho^3}{ds}+\varrho^3(y_1x_3-x_1y_3)=ay_1-bx_1,$$

und durch Integration, da:

$$y_1x_2-x_1y_2=\frac{x_2}{y_1}=-\frac{1}{\varrho}$$

ist:

$$(y_1x_2-x_1y_2)\varrho^3=ay-bx+c,$$

oder:

$$\varrho^2=bx-ay-c.$$

Wenn man aber die Werthe von a und b bezüglich mit x_2 und y_2 multiplicirt und addirt, so ergibt sich, da:

$$x_1x_2+y_1y_2=0$$

ist:

$$3\frac{d\varrho}{ds}+\varrho^3(x_2x_3+y_2y_3)=ax_2+by_2,$$

also da:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)=x_2 x_3+y_2 y_3$$

ist:

$$2\frac{d\varrho}{ds}=a x_2+b y_2,$$

also durch Integration:

$$2\varrho=a x_1+b y_1+e.$$

Sei l der Winkel der Tangente mit einer festen Linie, so ist:

$$\varrho=\frac{ds}{dl},\quad x_1=\cos l,\quad y_1=\sin l,$$

also wenn $a=m\cos h$, $b=m\sin h$ gesetzt wird:

$$2\,ds=(m\cos(l-h)+e)\,dl,$$

also durch Integration:

$$2s=m\sin(l-h)+el.$$

Die Curve ist die Evolvente einer Cycloide (vergleiche den Artikel: Trajectorie). Der vom Integralzeichen freie Theil ist:

$$\int_0^\beta[(f-k_1 x_1-k_2 x_2-l_1 y_1-l_2 y_2)\delta s+k_1\,\delta x+k_2\,\delta x_1+l_1\,\delta y+l_2\,\delta y_1].$$

Als untere Grenze ist Null genommen, da im Anfangspunkt der Bogen s immer gleich Null gesetzt werden kann. Es ist, da:

$$x_1^2+y_1^2=1$$

ist, an der Grenze $f=\varrho$. Wir nehmen an, dass die Endpunkte fest sind, dann ist noch: $\delta x=\delta y=0$, δx_1 und δy_1 aber sind ganz willkürlich, also ihre Coefficienten der Null gleich, d. h.:

$$\varrho^3 x_2=\varrho^3 y_2=0,$$

oder:

$$\varrho^2 x_1=\varrho^2 y_1=0,$$

und da in der Gleichung: $x_1^2+y_1^2=1$ nicht x_1 und y_1 verschwinden können, $\varrho=0$. Nun war:

$$\varrho^2=bx-ay-c,$$

also an beiden Grenzen:

$$bx-ay-c=0.$$

Ist die Verbindungslinie beider Endpunkte Axe der x, so sind die entsprechenden y gleich Null, also an den Grenzen:

$$b\,\xi_1=b\,\xi_2=c,$$

wenn ξ_1, ξ_2 die entsprechenden Abscissen sind, d. h.:

$$b(\xi_2-\xi_1)=0,\qquad\text{und:}\qquad b=c=0.$$

Die Gleichungen der Curve werden in diesem Falle:

$$\varrho^2=-ay,\qquad\text{und:}\qquad 2\varrho=a x_1,$$

oder:

$$2\,ds=a\cos l\,dl,\qquad 2s=a\sin l+b.$$

Die Curve ist eine Cycloide. In der That ist ja eine Cycloidenevolvente selbst eine Cycloide. Liegen die Endpunkte aber auf gegebenen Curven, so ergibt sich wie oben:

$$bx-ay-c=0,$$

also wenn man für die Endpunkte noch $y=\eta_1$ und $=\eta_2$ nimmt:

$$\frac{\xi_2-\xi_1}{a}=\frac{\eta_2-\eta_1}{b}.$$

Ausserdem aber ist nun:

$$k_1\,\delta x + l_1\,\delta y = 0, \quad \text{d. h.:} \quad a\delta\xi_1 + b\delta\eta_1 = 0,$$

und wenn $\eta_1 = \varphi(\xi_1)$ die Gleichung der einen Grenzcurve ist:

$$\frac{a}{b} = -\varphi_1'(\xi_1) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{\eta_2 - \eta_1},$$

d. h. wie leicht zu sehen, die Verbindungslinie der Endpunkte steht auf beiden Grenzcurven senkrecht.

VII) Die Curve von bestimmter Länge zu finden, die den tiefsten Schwerpunkt hat.

Lassen wir die Dichtigkeit der Curve zunächst einem beliebigen Gesetze folgen, und sei ϑ dieselbe, so ist der Schwerpunkt gegeben durch die Formel:

$$\frac{1}{A}\int_\alpha^\beta \vartheta y\,ds,$$

wo $A = \int_\alpha^\beta \vartheta\,ds$ die Masse ist, welche also constant sein muss. Dazu kommt die zweite Bedingung, dass $x_1^2 + y_1^2 = 1$ sei; ϑ wird nun Function von s sein. Es ist also:

$$f = \vartheta(y-k) + \lambda(x_1^2 + y_1^2 - 1).$$

Die mit δx und δy multiplicirten Theile sind nun:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{dk_1}{ds} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{dl_1}{ds} = 0,$$

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\lambda x_1, \quad l_1 = \frac{\partial f}{\partial y_1} = 2\lambda y_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \vartheta,$$

also:

$$2\lambda x_1 = a, \quad \int \vartheta\,ds - 2\lambda y_1 = -b,$$

d. h.:

$$2\lambda y_1 = M + b,$$

wo $M = \int \vartheta\,ds$. M ist von A zu unterscheiden, da das erstere Integral ein unbestimmtes ist.

Durch Quadriren der beiden Gleichungen erhält man:

$$2\lambda = \sqrt{(a^2 + (M+b)^2)},$$

und dann:

$$dx = \frac{a\,ds}{2\lambda}, \quad dy = \frac{(M+b)\,ds}{2\lambda}.$$

Die Integration setzt voraus, dass M, also ϑ bekannt sei.

Ist die Dichtigkeit constant, so ist $\vartheta = 1$, $M = s$.

Setzen wir $\frac{dx}{ds} = \cos l$, $\frac{dy}{ds} = \sin l$, so kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{M+b}, \quad \text{d. h.:} \quad \frac{s+b}{a} = \cot l.$$

Die Curve ist eine Kettenlinie (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten).

In den letzten Aufgaben ist oft der Bogen als unabhängige Veränderliche angenommen. In diesem Falle ist immer die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dx^2}{ds^2} + \frac{dy^2}{ds^2} = 1$$

hinzuzufügen, auch dann, wenn nur eine der Coordinaten vorkommen sollte; dies aus dem Grunde, weil ohne diese Bedingung nicht immer eine Gleichung zwischen reellen x und s eine Curve vorstellt, da y imaginär werden kann.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Curven im Raum.

VIII) Die kürzeste Linie auf einer Fläche zu finden.

Ein Minimum ist der Bogen $\int_\alpha^\beta ds$, wenn s die Bogenlänge, x, y, z die Coordinaten sind. Die hinzugefügte Bedingung ist:

$$F(x, y, z) = 0,$$

wenn dies die Gleichung der Fläche ist.

Ausserdem muss sein:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

wo:

$$x_1 = \frac{dx}{ds}, \quad y_1 = \frac{dy}{ds}, \quad z_1 = \frac{dz}{ds}$$

gesetzt wird. Also:

$$f = 1 + \lambda F + \mu (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1).$$

Mögen der Grösse k_1 für x, die Grössen l_1 für y, m_1 für z entsprechen, so ist:

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2\mu x_1, \quad l_1 = 2\mu y_1, \quad m_1 = 2\mu z_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

also die entsprechend mit δx, δy, δz multiplicirten Glieder geben:

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 2 \frac{d}{ds} (\mu x_1), \; \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \frac{d}{ds} (\mu y_1), \; \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 2 \frac{d}{ds} (\mu z_1).$$

Diese Gleichungen werden mit x_1, y_1, z_1 multiplicirt und addirt. Es kommt:

$$0 = 2 (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \frac{d\mu}{ds} + 2\mu (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2).$$

Das letzte Glied verschwindet, also:

$$\frac{d\mu}{ds} = 0, \quad \mu = c,$$

und somit:

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z} = x_2 : y_2 : z_2.$$

x_2, y_2, z_2 sind proportional den Cosinus der Winkel, welche das Loth auf der in der Krümmungsebene befindlichen Normale der Curve mit den Axen macht, $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ aber den Cosinus derjenigen Winkel, welche die Normale der Fläche mit den Axen macht. Hieraus folgt die allgemeine Eigenschaft der kürzesten Linie:

„Ihre Krümmungsebene geht in jedem Punkte durch die Normale der Fläche."

Es ist leicht zu zeigen, dass für die Kugel der grösste Kreis diese Bedingung erfüllt.

Eine andere Eigenschaft der kürzesten Linien wollen wir unmittelbar aus dem Begriff der Variation ableiten.

Lege man nämlich durch jeden Punkt der kürzesten Linie eine die Fläche berührende Ebene so, dass alle diese Ebenen eine abwickelbare Fläche einhüllen, durch deren Abwickelung die kürzeste Linie in eine ebene Curve verwandelt wird. Im Begriff der Berührungsebene liegt es nun, dass die nach einer Seite der kürzesten Linie derselben unendlich nahe gelegene Curve auf der Fläche ebenfalls in dieser abwickelbaren Fläche liegt, denn jede Tangentialebene muss so gedacht werden, als wenn sie die dem Berührungspunkte unendlich nahen Punkte der Fläche mit umschliesst. So wird

denn bei Abwickelungen diese nächste Curve mit abgewickelt. Ihr Unterschied von der kürzesten ist eben die Variation, und diese muss gleich Null sein.

Also auch für die abgewickelte Curve ist die Variation gleich Null, und diese mithin eine kürzeste in der Ebene, d. h. eine Grade. Also:

„Wenn durch jeden Punkt der kürzesten Linie eine Berührungsebene gelegt wird, und mit der von allen diesen gebildeten abwickelbaren Fläche zugleich die kürzeste Linie in die Ebene gewickelt wird, so entsteht eine Grade."

Diese Eigenschaft bezieht sich auch, da die Schlüsse ungeändert bleiben, auf andere Linien, auf Flächen, denen Minimum- und Maximum-Eigenschaften zukommen.

An den Grenzen ist nun noch $f=1$, da F und $x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2=1$ verschwinden, und man erhält aus der Gleichung:

$$\int_{s_1}^{s_2}(f-k_1 x_1-l_1 y_1-n_1 z_1)\,\delta s+k_1\,\delta x+k_2\,\delta y+k_3\,\delta z=0,$$

wo s_1 und s_2 die Grenzwerthe sind:

$$\int_{s}^{s_1}[(1-2c)\,\delta s+2c\,(x_1\,\delta x+y_1\,\delta y+z_1\,\delta z)]=0.$$

δs ist unabhängig von δx, δy, δz, also an beiden Endpunkten:

$$x_1\,\delta x+y_1\,\delta y+z_1\,\delta z=0.$$

Ist z. B. auf der Fläche eine Curve gezogen, in der der eine Endpunkt liegt, so sind δx, δy, δz die dieser Curve entsprechenden Aenderungen der Coordinaten. Dieselben sind proportianal den Cosinus der Winkel, welche die Tangente daran mit den Axen macht, und die Grenzgleichung drückt wieder aus, dass die kürzeste Linie auf dieser Curve senkrecht steht. Allgemein aber drückt der Ausdruck:

$$\int_{s_1}^{s_2}(1-2c)\,\delta s+2c(x_1\,\delta x+y_1\,\delta y+z_1\,\delta z)$$

die Variation des Bogens s, also δs aus, da der unentwickelte Theil verschwunden ist. Das Nämliche ist offenbar die Bedeutung des Ausdruckes $\delta(s_2-s_1)$, also:

$$\delta s=(1-2c)\,\delta s+\int_{s_1}^{s_2}2c\,(x_1\,\delta x+y_1\,\delta y+z_1\,\delta z),$$

oder:

$$\delta s=\int_{s_2}^{s_2}(x_1\,\delta x+y_1\,\delta y+z_1\,\delta z).$$

Denkt man sich nun unendlich viel kürzeste Linien neben einander, und sei σ das durch ihre Endpunkte gebildete Bogenelement, so ist:

$$\delta x=\frac{dx}{d\sigma}\,\delta\sigma,\quad \delta y=\frac{dy}{d\sigma}\,\delta\sigma,\quad \delta z=\frac{dz}{d\sigma}\,\delta\sigma,$$

also wenn φ_1, φ_0 die Winkel sind, welche diese Curven bezüglich mit der kürzesten Linie machen, so ist:

$$\delta s=\cos\varphi_1\,\delta\sigma-\cos\varphi_0\,\delta\sigma_0,$$

wenn φ_0 auf den andern Endpunkt geht. Sei dieser fest, so $\delta\sigma_0=0$, steht die zweite Grenzcurve auf den kürzesten Linien senkrecht, so ist $\cos\varphi_0=0$, also in beiden Fällen:

$$\delta s=\cos\varphi_1\,\delta\sigma.$$

Sind alle kürzesten Linien gleich, so ist $\delta s=0$, also $\cos\varphi=0$, d. h.:

„Wenn man von einem Punkte oder von einer beliebigen Curve aus senkrecht auf derselben eine Schaar kürzester Linien von gleicher Länge zieht, so ist die Verbindungslinie der Endpunkte senkrecht auf allen kürzesten Linien."

IX) Auf einer Fläche ist eine Curve gegeben. Es wird eine zweite gesucht, die in Gemeinschaft mit ihr bei gegebener Länge den grössten Inhalt einschliesst.

Sei $F=0$ die Gleichung der Fläche, $\frac{\partial z}{\partial x}=p$, $\frac{\partial z}{\partial y}=q$ die daraus gezogenen partiellen Differenzialquotienten von z, so ist der gesuchte Inhalt $\int v\,dx$, wo:

$$v=\int_{y_0}^{y} \sqrt{(1+p^2+q^2)}\,dy,$$

und y_0, y die bezüglich der gegebenen und gesuchten Curve entsprechenden Werthe von y sind. v ist also eine Function von x und y. Nimmt man den Bogen als unabhängige Veränderliche, so ist wieder $\int_{s_1}^{s_2} v\,x_1\,ds$ das zu untersuchende Integral, und:

$$f=v\,x_1+\lambda F+\mu(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2-1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+x_1\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+x_1\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=\lambda\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$k_1=\frac{\partial f}{\partial x_1}=v+2\mu x_1,\quad l_1=2\mu y_1,\quad n_1=2\mu z_1,$$

und die mit δx, δy, δz multiplicirten Theile werden:

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x}+x_1\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{d(v+2\mu x_1)}{ds}=2\mu x_2+2x_1\frac{d\mu}{ds}+\frac{dv}{ds},$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+x_1\frac{\partial v}{\partial y}=2\mu y_2+2y_1\frac{d\mu}{ds},$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=2\mu z_2+2z_1\frac{d\mu}{ds}.$$

Multiplicirt man mit x_1, y_1, z_1 und addirt, so kommt, da:

$$x_1\frac{\partial v}{\partial x}+y_1\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{dv}{ds}$$

ist:

$$0=\frac{d\mu}{ds},\quad \mu=c,$$

also:

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial x}-y_1\frac{\partial v}{\partial y}=2c\,x_2,$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial y}+x_1\frac{\partial v}{\partial y}=2c\,y_2,$$

$$\lambda\frac{\partial F}{\partial z}=2c\,z_2,$$

und:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Sind π, k, ϱ die Cosinus der Winkel, welche die Tangente an die Fläche, welche auf der Curve normal ist, mit den Axen macht, so erhält man, da x_1, y_1, z_1 die Cosinus der Winkel sind, welche die Tangente an die Curve selbst mit den Axen macht, $\pi y_1-k x_1$ als Cosinus des Winkels, welche die durch beide Graden gelegte Ebene mit der Ebene xy, also die Normale an die Fläche mit der Axe der z macht, und deshalb ist:

$$\pi y_1-k x_1=-\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}.$$

Multiplicirt man nun die drei Gleichungen, welche die Curve geben, bezüglich mit π, k, ϱ, so kommt:

$$2c(\pi x_2 + k y_2 + \varrho z_2) = 1.$$

Ist r der Haupt-Krümmungsradius der Curve, so sind $r x_2$, $r y_2$, $r z_2$ die Cosinus der Winkel derselben mit den Axen, also:

$$r(\pi x_2 + k y_2 + \varrho z_2) = \cos \vartheta,$$

wenn ϑ der Winkel ist, welchen die Hauptnormale mit der Normale an die Curve macht, welche die Fläche berührt, und somit:

$$2c \cos\vartheta = r, \quad \text{oder:} \quad \frac{r}{\cos\vartheta} = \frac{1}{2c},$$

so dass dies Verhältniss constant ist. — Wie bei der vorigen Aufgabe folgt übrigens, dass die Gurve, in gleicher Weise abgewickelt, dieselbe Maximumeigenschaft in der Ebene behält, also einen Kreis gibt.

Ist die gegebene Fläche eine Kugel, also:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z,$$

$$\sqrt{(1 + p^2 + q^2)} = \frac{1}{z},$$

also

$$2\lambda x z - y_1 = 2c x_2 z, \quad 2\lambda y z + x_1 = 2c y_2 z, \quad 2\lambda z = 2c z_2,$$

also wenn man λ eliminirt:

$$2c(x z_2 - x_2 z) = y_1, \quad 2c(y z_2 - y_2 z) = -x_1,$$

und durch Elimination von z_2:

$$2c(y x_2 - x y_2) = z_1.$$

Diese drei Gleichungen lassen sich integriren:

$$2c(x z_1 - x_1 z) = y + \beta, \quad 2c(z y_1 - y z_1) = x_1 + \alpha, \quad 2c(y x_1 - x y_1) = z + \gamma,$$

und wenn man aus den beiden ersten z eliminirt:

$$-2c z(y x_1 - x y_1) = x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y,$$

also nach der dritten Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = -1.$$

Die Curve ist eine ebene, somit ein Kreis.

X) Die Curve des kürzesten Falles (Brachystochrone) auf einer gegebenen Oberfläche zu finden.

Sei ein materieller Punkt auf der Fläche einer Kraft unterworfen, deren Componenten bezüglich gleich X, Y, Z sind. Ist v die Geschwindigkeit, so hat man vermöge des Satzes von den lebendigen Kräften:

$$v^2 - v_0^2 = 2\int (X dx + Y dy + Z dz),$$

wenn wir annehmen, dass die Grösse unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differenzial ist. v_0 ist die Anfangsgeschwindigkeit.

Die Zeit, in der der materielle Punkt den Raum zwischen zwei gegebenen auf der Fläche durchläuft, ist gegeben durch die Gleichungen: $ds = v dt$, und $t = \int \frac{ds}{v}$. Ist also F die Gleichung der Fläche, so mus sein $\int \frac{ds}{v}$ ein Minimum, unter den Bedingungen:

$$F = 0, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1,$$

also:

$$f = \frac{1}{v} + \lambda F + \mu(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y},$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$k_1 = 2\mu x_1, \quad l_1 = 2\mu y_1, \quad n_1 = 2\mu z_1.$$

Die mit δx, δy, δz multiplicirten Theile geben die Gleichungen:

$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{d}{ds}(\mu x_1),$$
$$-\frac{2}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{d}{ds}(\mu y_1),$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 2\frac{d}{ds}(\mu z_1),$$

und der mit δs multiplicirte Theil:

$$\frac{1}{v} = 2\mu(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + c,$$

d. h.:

$$\frac{1}{v} - 2\mu = c.$$

Es ist dies auch eine Folge der obigen Gleichnngen.

Durch Untersuchung der Grenzbedingungen findet man leicht $c=0$, also:

$$2\mu = \frac{1}{v},$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{ds}\left(\frac{x_1}{v}\right),$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{ds}\left(\frac{y_1}{v}\right),$$
$$-\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d}{ds}\left(\frac{z_1}{v}\right).$$

Mache diejenige Tangente A an die Fläche, welche auf der Curve normal ist, Winkel mit den Axen, deren Cosinus α, β, γ seien, so hat man, wenn diese Gleichungen bezüglich mit α, β, γ multiplicirt und addirt werden:

$$-\frac{1}{v^2}\left(\alpha\frac{\partial v}{\partial x} + \beta\frac{\partial v}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{1}{v}\frac{\cos\varphi}{r},$$

wo r der Krümmungsradius, φ der Winkel ist, welchen die Grade A mit demselben macht.

Nun ist:

$$v\frac{\partial v}{\partial x} = X, \quad v\frac{\partial v}{\partial y} = Y, \quad v\frac{\partial v}{\partial z} = Z,$$

also:

$$\frac{r}{v^2}(X\alpha + Y\beta + Z\gamma) + \cos\varphi = 0,$$

oder wenn ϑ der Winkel ist, welchen die Mittelkraft R von X, Y, Z mit der Graden A macht:

$$R\cos\psi = -\frac{v^2}{r}\cos\varphi.$$

Der letzte Theil der Gleichung ist die nach A zerlegte Centrifugalkraft, der erste die nach A zerlegte wirkende Kraft, also die Spannung, welche der Punkt nach Richtung A erleidet, verdoppelt sich bei der Brachystochrone gegen die, welche

stattfände, wenn Kraft R allein wirkte, wenn $v=0$, also der Punkt in Ruhe wäre. Für den Fall, dass die Schwere allein wirkt, hat man $X=Y=0$, $Z=R=g$, also:

$$v^2=2g(z-h),\quad r=\frac{2(z-h)\cos\varphi}{\gamma}.$$

Wird die Grade A bis zu einer Horizontalebene verlängert, deren Gleichung $z=h$ ist, und welche durch den Punkt gehen würde, von welchem aus sich der materielle Punkt bewegt, wenn die Anfangsgeschwindigkeit Null wäre, so ist die Länge dieser Graden gleich $\frac{z-h}{\gamma}$, und die doppelte Länge der Projection dieser Linie auf die Krümmungsebene gibt also den Hauptkrümmungsradius.

Wir haben oben schon die Brachystochrone in der Ebene betrachtet, im Falle, wo nur die Schwere angreift. Nehmen wir jetzt den allgemeinsten Fall, wo also nur die Bestimmung stattfindet, dass $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ ein vollständiges Differenzial ist, aber die Curve nicht gezwungen ist, auf einer Fläche zu bleiben. Die Gleichung $F=0$ fällt dann weg, und man hat:

$$\frac{\partial v}{\partial x}-v_1 x_1+v x_2=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}-v_1 y_1+v y_2=0,\quad \frac{\partial v}{\partial z}-v_1 z_1+v z_2=0,$$

wo $v_1=\frac{dv}{ds}$ ist. — Seien a, b, c die Cosinus der Winkel, welche die Krümmungsebene mit den Coordinatenebenen macht, so erhält man, wenn man bezüglich mit a, b, c multiplicirt und addirt:

$$a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial y}+c\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \text{oder:}\quad aX+bY+cZ=0,$$

d. h. die Resultante R liegt in der Krümmungsebene. Multiplicirt man mit x_2, y_2, z_2 und addirt, so kommt, wenn r der Hauptkrümmungsradius, ω der Winkel desselben mit der Resultante ist:

$$R\cos\omega=-\frac{v^2}{r}.$$

Dieser Gleichung lässt sich eine Auslegung ganz wie oben geben.

Hat man nur eine Centralkraft, und ist deren Ausgangspunkt Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man:

$$v\frac{\partial v}{\partial x}=X=\frac{Rx}{\varrho},$$

und ähnliche Gleichungen für die andern Componenten. ϱ ist hier der Radiusvector. Unsere drei Gleichungen werden dann:

$$\frac{Rx}{v\varrho}-v_1 x_1+v x_2=0,\quad \frac{Ry}{v\varrho}-v_1 y_1+v y_2=0,\quad \frac{Rz}{v\varrho}-v_1 z_1+v z_2=0,$$

Durch Elimination von r kommt:

$$-v_1(y z_1-z y_1)+v(y z_2-z y_2)=0,$$

und zwei symmetrische Gleichungen. Integration gibt dann:

$$y z_1-z y_1=e v,\quad z x_1-x z_1=f v,\quad x y_1-y x_1=h v.$$

e, f, h sind Constanten. Multiplicirt man mit x, y, z und addirt, so ist:

$$ex+fy+hz=0.$$

Die Curve ist eine ebene. Wirkt nur die Schwere, so wird:

$$R=g,\quad v^2=2g(z-h),\quad r=2(z-h)\cos\omega.$$

Diese Gleichung charakterisirt die Cycloide.

XI) Die Brachystochrone im widerstehenden homogenen Mittel zu finden.

Dass diese Curve, wenn die Schwere allein wirkt, sich in der Verticalebene befinden muss, ist leicht einzusehen. Ist wieder v die Geschwindigkeit, so ist der Ausdruck für die Fallzeit:

$$\int dt=\int\frac{ds}{v}.$$

Es sei ferner $\varphi(v)$ der Ausdruck für den Widerstand, der jedenfalls eine Function von v ist. Man hat dann:

$$g y_1 - \varphi(v) = \frac{dv}{dt} = v v_1,$$

wo $v_1 = \frac{dv}{ds}$ ist. Die Bedingungsgleichungen also sind:

$$x_1^2 + y_1^2 - 1 = 0, \quad v v_1 + \varphi(v) - g y_1 = 0,$$

$$f = \frac{1}{v} + \lambda(v v_1 + \varphi(v) - g y_1) + \mu(x_1^2 + y_1^2 - 1).$$

Man hat hier drei von s abhängige Variablen x, y, v. Beziehen sich k_1, l_1, n_1 bezüglich auf diese, so ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{1}{v^2} + \lambda[v_1 + \varphi'(v)],$$

$$k_1 = 2\mu x_1, \quad l_1 = 2\mu y_1 - g\lambda, \quad n_1 = \lambda v.$$

Die mit δx, δy multiplicirten Theile geben dann:

$$\frac{d}{ds}(2\mu x_1) = 0,$$

integrirt:

$$2\mu x_1 = a, \quad \frac{d}{ds}(2\mu y_1 - g\lambda) = 0, \quad 2\mu y_1 - g\lambda = b.$$

Der mit δs multiplicirte Theil gibt noch:

$$\frac{1}{v} = 2\mu - g\lambda y_1 + \lambda v v_1 + e.$$

a, b, e sind Constanten. Setzt man in die letzte Gleichung:

$$g y_1 = \varphi(v) + v v_1,$$

so kommt:

$$\frac{1}{v} = 2\mu - \lambda\varphi(v) + e.$$

Aus den Grenzbetrachtungen aber ergibt sich, dass $e = 0$ ist.

Diese Gleichung verbindend mit den beiden andern Integralen und den beiden Bedingungsgleichungen, kann man λ, μ, x_1, y_1 eliminiren, und erhält:

$$\left(1 - \frac{b v \varphi(v)}{g}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v v_1 + \varphi(v)}{g}\right)^2\right] = a^2 v^2 \left(1 - \frac{v v_1 \varphi(v) + [\varphi(v)]^2}{g^2}\right)^2.$$

Diese Gleichung gibt v als Function von s, und in Verbindung mit:

$$v v_1 + \varphi(v) - g y_1 = 0$$

auch y als Function von s.

Betrachten wir noch die Grenzgleichung. Sind s_1, s_2 die Grenzwerthe, so hat man für den entwickelten Theil:

$$\int_{s_1}^{s} \left[\frac{1}{v} - 2\mu + \lambda(g y_1 + v v_1)\,\delta s + 2\mu x_1\,\delta x + (2\mu y_1 - g\lambda)\,\delta y + \lambda v\,\delta v\right],$$

d. h.:

$$e\,\delta(s_2 - s_1) + \int_{s_1}^{s_2} (a\,\delta x + b\,\delta y + \lambda v\,\delta v).$$

Da $\delta(s_2 - s_1)$ willkürlich ist, so muss, wie bereits oben angenommen wurde, $e = 0$ sein. Ist am Anfangspunkte der Bewegung die Geschwindigkeit gegeben, so ist daselbst $\delta v = 0$; am andern aber, wo δv veränderlich ist, muss $\lambda = 0$ sein, da, wenn man λ im Allgemeinen bestimmt hat, δv als von δx und δy ganz unabhängig zu betrachten ist. Es ist also in diesem Punkte:

$$2\mu x_1 = a, \quad 2\mu y_1 = b, \quad \frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b},$$

d. h. die Tangente an der Curve in diesem Punkte macht Winkel mit den Axen, deren Cosinus sich wie b und a verhalten. Sind von der Brachystochrone nicht die Endpunkte gegeben, sondern nur zwei Curven, durch welche sie geht, so lehrt die Gleichung $a\,\delta x + b\,\delta y = 0$ wieder, dass beide auf der Brachystochrone in ihren Endpunkten senkrecht stehen.

XII) Ein biegsamer Faden befindet sich auf einer gegebenen Fläche. Wann ist sein Schwerpunkt am tiefsten?

Ist die Axe der z der Schwere gleich gerichtet, so ist der Ausdruck für den Schwerpunkt $\frac{\int z\,ds}{\int ds}$, aber $\int ds$ ist die gegebene Länge, die wir gleich c setzen, also constant. $F=0$ sei wieder die Gleichung der Fläche. Man hat also:

$$f = z - c + \mu(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 1) + \lambda F,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial z},$$

$$k_1 = 2\mu x_1, \quad l_1 = 2\mu y_1, \quad n_1 = 2\mu z_1,$$

also die mit δx, δy, δz multiplicirten Ausdrücke sind:

$$\lambda \frac{\partial F}{\partial x} = 2\frac{d}{ds}(\mu x_1), \quad \lambda \frac{\partial F}{\partial y} = 2\frac{d}{ds}(\mu y_1), \quad 1 + \lambda \frac{\partial F}{\partial z} = 2\frac{d}{ds}(\mu z_1),$$

und der mit δs multiplicirte Theil gibt:

$$z - e = 2\mu,$$

wo e eine Constante ist.

Mache die Grade A, die wir wie in X) bestimmen, die Winkel, deren Cosinus α, β, γ sind, mit den Axen, so erhält man wie dort:

$$\gamma = 2\mu(\alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2),$$

oder:

$$r = \frac{z - e}{\gamma} \sin \vartheta,$$

wo ϑ der Winkel des Hauptkrümmungsradius r mit der Flächennormale ist.

4) Zurückführung der Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale auf eine partielle Differenzialgleichung.

Nach Hamilton's Betrachtungen und derjenigen Deutung, welche ihnen Jakobi gegeben, ist jede mechanische Aufgabe zurückzuführen auf eine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung. Jakobi, indem er nachweist, dass der Grund davon der sogenannte Satz von den kleinsten Wirkungen sei (siehe den Artikel: Dynamik), welche die mechanischen Probleme zu einer einzigen Anwendung der Variationsrechnung machen, zeigt, dass jedes Maximum- oder Minimumproblem, welches auf ein einfaches Integral führt, derselben Betrachtung zugänglich ist.

Wir wollen diese Theorie hier noch geben. Zu dem Ende wollen wir den Variationen der Integrale aber eine einfachere Form geben.

Sei t die unabhängige Variable, $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängige Variablen, so war ein Integral von der Form zu betrachten:

$$S = \int (u_1\,dx_1 + u_2\,dx_2 + \ldots + u_n\,dx_n + u\,dt).$$

$u_1, u_2 \ldots$ enthalten $x_1, x_2 \ldots x_n$, beliebige Differenzialquotienten dieser Grössen nach t und t selbst. Setzen wir also:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_{n+1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_{n+2} \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dt} = x_{2n},$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt}=x_{2n+1},\quad \frac{dx_{n+2}}{dt}=x_{2n+2}\;\ldots\;\frac{dx_{2n}}{dt}=x_{3n},$$

$$\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt}=y_1,\quad \frac{dx_\beta}{dt}=y_2\;\ldots\;\frac{dx_\vartheta}{dt}=y_n.$$

Unter $y_1, y_2 \ldots y_n$ sind hier die höchsten Differenzialquotienten, welche vorkommen, bezüglich von $x_1, x_2 \ldots x_n$ verstanden. Mit Hülfe dieser Gleichungen lassen sich alle Differenzialquotienten, also auch die Coefficienten $dx_1=\frac{dx_1}{dt}\,dt$, u. s. w. eliminiren, und man hat:

$$S=\int v\,dt,$$

wo v eine Function der Grössen x, deren Anzahl m sei, die n Grössen y und t enthält.

Nun können noch andere Bedingungsgleichungen zwischen x und y, jedenfalls aber weniger als n, vorhanden sein. Sei ihre Anzahl p, so eliminiren wir mittels derselben die Grössen y_n, $y_{n-1} \ldots y_{n-p-1}$, und können dann die gegebenen Werthe von $\frac{dx_1}{dt}$ u. s. w. auch schreiben:

$$\frac{dx_1}{dt}=w_1,\quad \frac{dx_2}{dt}=w_2\;\ldots\;\frac{dx_m}{dt}=w_m.$$

Die Grössen $w_1, w_2 \ldots$ sind Functionen der x und der noch übrigen y, an Anzahl $n-p$, wenn man der Symmetrie wegen für x_{n+1}, x_{n+2} auch setzt $w_1, w_2 \ldots$

Führt man nun m unbestimmte Factoren $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$ ein, so hat man nach dem Obigen die Variation zu nehmen von:

$$S=\int_{t_0}^{t}\left[\left(v-\sum_{r=1}^{r=m}\mu_r w_r\right)dt+\sum_{r=1}^{r=m}\mu_r dx_r\right].$$

Die Grenzen t_0 und t sollen hier der Allgemeinheit wegen völlig willkürlich sein, also nicht etwa constant oder beschränkt durch irgend welche Annahme. Nun erhält man:

$$\begin{aligned}dS=&\int_{t_0}^{t}\left[\left(v-\sum_{r=1}^{r=m}(\mu_r w_r)\right)\delta t+\sum_{r=1}^{r=m}\mu_r\delta x_r\right]\\&+\int_{t_0}^{t}dt\left[\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{dv}{dt}-\sum_{r=1}^{r=m}\left(\mu_r\frac{\partial w_r}{\partial t}-\frac{d(\mu_r w_r)}{dt}\right)\right)\right]\delta t\\&+\sum_{r=1}^{r=m}\left[\frac{\partial v}{\partial x_r}-\sum_{s=1}^{s=m}\left(\mu_s\frac{\partial w_s}{\partial x_r}\right)-\frac{d\mu_r}{dt}\right]\delta x_r\\&+\sum_{r=1}^{r=n-p}\left[\frac{\partial v}{\partial y_r}-\sum_{s=1}^{s=m}\left(\mu_s\frac{\partial w_s}{\partial y_r}\right)\right]\delta y_r.\end{aligned}$$

Da die Anzahl der μ grösser als die der y ist, so können zur theilweisen Bestimmung der erstern die mit δy multiplicirten Glieder gleich Null gesetzt werden, also:

$$\frac{\partial v}{\partial y_r}=\sum_{s=1}^{s=m}\left(\mu_s\frac{\partial w_s}{\partial y_r}\right).$$

Diese Gleichungen geben die Werthe aller y, und nach deren Elimination enthalten die Ausdrücke v und $w_1, w_2 \ldots$ dann $x_1, x_2 \ldots x_m, \mu_1, \mu_2 \ldots \mu_m$ und t.

Findet ein Maximum und Minimum in irgend welchen Grenzen, die jedoch t_0 und t umschliessen, statt, so werden die Ausdrücke unter dem Integralzeichen Null, uno man hat dann nur noch:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \left[\left(v - \sum_{r=1}^{r=m} (\mu_r w_r)\right) \delta t + \sum_{r=1}^{r=m} \mu_r \delta x_r\right].$$

oder wenn wir:

$$v - \sum_{r=1}^{r=m} (\mu_r w_r) = \nu$$

setzen, und $\mu_1^{(0)}, \mu_2^{(0)} \ldots \nu^{(0)}, x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots$ als diejenigen Werthe von $\mu_1, \mu_2 \ldots \nu \ldots x_1, x_2 \ldots$ nehmen, welche $t = t_0$ entsprechen:

$$\delta S = \mu_1 \delta x_1 + \mu_2 \delta x_2 + \ldots + \mu_s \delta x_s + \nu \delta t - \mu_1^{(0)} \delta x_1^{(0)} - \mu_2^{(0)} \delta x_2^{(0)} - \ldots$$
$$- \mu_s^{(0)} \delta x_s^{(0)} - \nu^{(0)} \delta t_0.$$

Diese Gleichung ist ausreichend, damit ein Maximum oder Minimum stattfinde. Denn wird sie vorausgesetzt, so verschwindet auch der Theil unter dem Integralzeichen. — Ihre Auflösung aber geschieht folgendermaassen. (Vergleiche über diese Auseinandersetzung den Artikel: Quadraturen — Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf.)

Man denkt $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots t_0$ in Bezug auf die Aenderung δ constant, so hat man:

$$\partial S = \mu_1 \partial x_1 + \mu_2 \partial x_2 + \ldots + \mu_s \partial x_s + \nu \partial t,$$

wo ∂ anzeigt, dass das Zeichen δ der obigen Beschränkung unterliegt, also:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \mu_1, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = \mu_2 \quad \ldots \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \nu.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung:

$$\nu = v - \Sigma (\mu_r w_r),$$

so hat man eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung, welche die abhängige Variable S selbst nicht enthält, und diese löst das Problem. Sie führt nämlich auf ein System totaler Differenzialgleichungen zurück, deren Hauptintegrale die Werthe von $x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots t_0$ sind.

Dieses System muss selbstverständlich mit dem sich durch die Maximum- oder Minimum-Aufgabe ergebenden identisch sein, und dies wollen wir noch direct nachweisen, was ein zweiter Beweis des hier gegebenen Satzes ist. — Es handelt sich dabei nur darum, aus den Ausdrücken:

$$A = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{dv}{dt} - \sum_{r=1}^{r=m} \left(\mu_r \frac{\partial w_r}{\partial t} - \frac{d(\mu_r w_r)}{dt}\right),$$

$$B = \frac{\partial v}{\partial x_r} - \sum_{s=1}^{s=m} \left(\mu_s \frac{\partial w_s}{\partial x_r} - \frac{d\mu_r}{dt}\right)$$

die Grössen $y_1, y_2 \ldots y_{n-p}$ zu eliminiren. Setzen wir noch:

$$v - \sum_{r=1}^{r=m} (\mu_r w_r) - \nu = \varphi,$$

so ist nach dem Obigen:

$$\varphi = 0$$

$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x_r}\right)$ stellen jetzt die Differenzialquotienten nach t und x_r vor, wenn man die y eliminirt. Es ist also:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \sum_{s=1}^{s=n-p} \frac{\partial v}{\partial y_s} \frac{dy_s}{dt},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_r} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_r}\right) - \sum_{s=1}^{s=n-p} \frac{\partial v}{\partial y_s} \frac{dy_s}{dt},$$

und gleiche Ausdrücke finden für die Ausdrücke $w_1, w_2 \ldots$ statt. Berücksichtigt man nun die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial y_r} = \sum_{s=1}^{s=m} \mu_s \frac{\partial w_s}{\partial y_r},$$

so werden die zu untersuchenden Ausdrücke:

$$A = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{dv}{dt} - \sum_{r=1}^{r=m} \left[\mu_r \left(\frac{\partial w_r}{\partial t}\right) - \frac{d(\mu_r w_r)}{dt} \right],$$

$$B = \left(\frac{\partial v}{\partial x_r}\right) - \sum_{s=1}^{s=m} \mu_s \left(\frac{\partial w_s}{\partial x_r}\right) - \frac{d\mu_r}{dt}.$$

Die Einführung der Klammer ändert also nichts in ihnen. Man hat jedoch:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \sum_{s=1}^{s=m} \mu_s \left(\frac{\partial w_s}{\partial t}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_r}\right) - \sum_{s=1}^{s=m} \mu_s \left(\frac{\partial w_s}{\partial x_r}\right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_r} = -w_r, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -1,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dv}{dt} - \sum_{r=1}^{r=m} \frac{d(\mu_r w_r)}{dt} - \frac{d\nu}{dt} = 0$$

Auf diese Weise erhält man:

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d\nu}{dt}, \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - \frac{d\mu_r}{dt}.$$

Ganz abgesehen von der Maximum- oder Minimum-Aufgabe kann man also setzen:

$$1) \quad \delta S = \int_{t_0}^{t} \nu \delta t + \sum_{r=1}^{r=m} \mu_r \delta x_r + \int_{t_0}^{t} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{d\nu}{dt}\right) \delta t + \sum_{r=1}^{r=m} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - \frac{d\mu_r}{dt}\right) \delta x_r \right] dt,$$

wo die y eliminirt sind durch die Gleichungen:

$$2) \quad \frac{\partial v}{\partial y_r} = \sum_{s=1}^{s=m} \mu_s \frac{\partial w_s}{\partial y_r},$$

ausserdem die Bedingungsgleichung:

3) $$v - \sum_{r=1}^{r=m} (\mu_r\, w_r) - \nu = \varphi = 0$$

stattfindet, und man noch hat die m Gleichungen:

4) $$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_r}.$$

Zu diesen kommen dann, wenn eine Maximum- oder Minimum-Aufgabe stattfindet, die $m+1$ Gleichungen:

5) $$\frac{d\mu_r}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r},\quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Die Gleichungen 4) und 5) in Verbindung mit der identischen Gleichung:

$$\frac{dt}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 1,$$

bilden aber das System, auf welches man jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung zurückführt, wenn in ihr die abhängige Variable nicht vorkommt (vergleiche den obigen Artikel). Auch sonst ist die Form 1), die wir der Variation gegeben haben, von Wichtigkeit.

5) Unterscheidung der Fälle, wo Maxima und wo Minima, oder keines von beiden eintritt (Criterien).

Das Criterium aufzufinden, wann ein Maximum oder Minimum oder keines von beiden eintritt, und zwar zunächst für den einfachsten Fall, wo nur eine abhängige Variable und ihre Differenzialquotienten vorhanden sind, ist von mehreren Mathematikern versucht worden, namentlich von Legendre. Insofern hat derselbe auch eine Lösung herbeigeführt, als er gezeigt hat, dass dies Criterium von der Auflösung gewisser Differenzialgleichungen abhängt, deren Auflösung er selbst zwar umgehen zu können meinte, was aber, wie Lagrange bemerkte, auf einem Irrthum beruht. Es ist Jakobi's grosses Verdienst, gezeigt zu haben, dass diese Differenzialgleichungen schon gelöst sind durch die Gleichungen, welche das Maximum oder Minimum selbst bestimmen. Mit dieser Bemerkung ist eine neue Theorie der Criterien geschaffen, welche wir hier geben.

Es sind zunächst einige einleitende Betrachtungen zu geben.

Sei φ eine ganze homogene Function zweiter Ordnung von den Grössen z, $z', z'' \ldots z^{(n)}$, wo $z', z'' \ldots z^{(n)}$ die Differenzialquotienten von z nach x sind, welche letztere Grösse in beliebiger Weise in φ enthalten ist. Seien jetzt $\varphi'(z)$, $\varphi'(z')$, $\varphi'(z'') \ldots$ die Differenzialquotienten bezüglich nach z, z', $z'' \ldots$, so lässt sich zeigen, dass der Ausdruck:

$$\psi(z) = \varphi'(z) - \frac{d\varphi'(z')}{dx} + \frac{d^2 \varphi'(z'')}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n \varphi'(z^{(n)})}{dx^n}$$

sich auf die Gestalt bringen lässt:

$$Az - \frac{d A_1 z'}{dx} + \frac{d^2 A_2 z''}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^n A_n z^{(n)}}{dx^n},$$

wo $A, A_1 \ldots A_n$ nur x enthalten. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}\varphi = \tfrac{1}{2} a_{0,0}\, z^2 + a_{0,1}\, z z' + a_{0,2}\, z z'' + \ldots &+ a_{0,n}\, z z^{(n)},\\ + \tfrac{1}{2} a_{1,1}\, z'^2 + a_{1,2}\, z' z'' + \ldots &+ a_{1,n}\, z' z^{(n)},\\ + \tfrac{1}{2} a_{2,2}\, z''^2 + \ldots &+ a_{2,n}\, z'' z^{(n)},\\ + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot &\quad \cdot\\ &+ \tfrac{1}{2} a_{n,n}\, z^{(n)2},\end{aligned}$$

wo $a_{0,0}$, $a_{0,1}$ ... Functionen von x, und zwar $a_{s,t} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^{(s)} \partial z^{(t)}}$ ist. Man hat dann:

$$\varphi'(z) = a_{0,0}\, z + a_{0,1}\, z' + a_{0,2}\, z'' + \dots + a_{0,n}\, z^{(n)},$$

$$\varphi'(z') = a_{1,0}\, z + a_{1,1}\, z' + a_{1,2}\, z'' + \dots + a_{1,n}\, z^{(n)},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\varphi'(z^{(n)}) = a_{n,0}\, z + a_{n,1}\, z' + a_{n,2}\, z'' + \dots + a_{n,n}\, z^{(n)}.$$

Differenziirt man bezüglich die zweite Gleichung einmal, die dritte zweimal u. s. w. nach x, und addirt, nachdem man die Vorzeichen der graden Glieder geändert hat, so haben die in der Diagonale stehenden Glieder schon die vorgeschriebene Form:

$$\text{II)} \qquad a_{0,0}\, z - \frac{d}{dx}(a_{1,1}\, z') + \frac{d^2}{dx^2}(a_{2,2}\, z'') - \dots \pm \frac{d^n}{dx^n}(a_{n,n}\, z^{(n)}).$$

Die andern Glieder aber gruppiren sich zu zweien von der Form:

$$(-1)^p \frac{d^p}{dx^p}(a_{p,q}\, z^{(q)}) (-1)^q \frac{d^q}{dx^q}(a_{p,q}\, z^{(p)}).$$

Sei jetzt:

$$p > q, \quad h + i + k = p + q, \quad a^{(i)} = \frac{d^i}{dx^i}(a_{p,q}),$$

und setzen wir:

$$(h, k) = \frac{d^h}{dx^h}(a^{(i)}\, z^{(k)}) \pm \frac{d^k}{dx^k}(a^{(i)}\, z^{(h)}),$$

indem man das obern oder untere Zeichen nimmt, je nachdem $h-k$ grade oder ungrade ist. Das betrachtete Paar hat dann offenbar die Form: $(-1)^p (p, q)$, da i hier gleich Null ist. Man verificirt nun leicht die Gleichung:

$$(h, k) = (h-1, k) + (h-1, k+1),$$

in welche eingeschlossen ist:

$$(p, q) = (p-1, q) + (p-1, q+1).$$

Indem man die hierin angedeutete Zerlegung wiederholt, lässt sich jedes Gliederpaar umbilden in solche von der Form: (m, m) und $(m+1, m)$. Es ist aber:

$$(m, m) = 2\frac{d^m}{dx^m}(a^{(p+q-2m)}\, z^{(m)}),$$

$$(m+1, m) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(a^{(p+q-2m-1)}\, z^{(m)})$$

$$- \frac{d^m}{dx^m}(a^{(p+q-2m-1)}\, z^{(m+1)}) = \frac{d^m}{dx^m}(a^{(p+q-2m)}\, z^{(m)}),$$

d. h.:

$$(m+1, m) = \tfrac{1}{2}(m, m),$$

so dass in der That das Resultat die bezeichnete Form hat.

Wir wollen aber noch den Werth von (p, q) auf diese Weise wirklich bestimmen.

Wendet man die Zerlegungsformel wiederholentlich an, also:

$$(p, q) = (p-1, q) + (p-1, q+1) = (p-2, q) + 2(p-2, q+1) + (p-2, q+2),$$

so sieht man leicht, dass der Mechanismus des Verfahrens der bei Bildung des binomischen Satzes einzuschlagende ist, dass man also hat:

$$(p, q) = (p-s, q) + s_1(p-s, q+1) + s_2(p-s, q+2) + \dots$$
$$+ s(p-s, q+s-1) + (p-s, q+s),$$

wo $s_1 = s$, $s_2 = \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}$ zu setzen ist. Offenbar darf $p-s$ nicht kleiner als $q+s$ sein. Nehmen wir zunächst an, $p-q$ sei grade, und setzen $p-s = q+s$, so ist: $s = \frac{p-q}{2}$. Sei: $q+s = \alpha$, so kommt:

$$(p, q) = (\alpha, \alpha) + s(\alpha, \alpha-1) + s_2(\alpha, \alpha-2) + \dots + s_2(\alpha, \alpha-s+2)$$
$$+ s(\alpha, \alpha-s+1) + (\alpha, \alpha-s).$$

Fährt man mit den Gliedern rechts, welche nach dem zweiten folgen, in der Entwickelung fort, so werden alle, mit Ausnahme des ersten, sich wie oben fortentwickeln, also:

$$(p, q) = (\alpha, \alpha) + s(\alpha, \alpha-1) + s_2(\alpha-1, \alpha-1) + (s+1)_3(\alpha-1, \alpha-2)$$
$$+ (s+1)_4(\alpha-1, \alpha-3) + \dots + (\alpha-1. \alpha-s).$$

Die Glieder nach dem vierten werden weiter entwickelt. Es kommt für dieselben:

$$(s+1)_4(\alpha-2, \alpha-2) + (s+2)_5(\alpha-2, \alpha-3) + (s+2)_6(\alpha-2, \alpha-4) + \dots,$$

also wenn man so fortfährt, schliesslich:

$$(p, q) = (\alpha, \alpha) + s_1(\alpha, \alpha-1) + s_2(\alpha-1, \alpha-1) + (s+1)_3(\alpha-1, \alpha-2)$$
$$+ (s+1)_4(\alpha-2, \alpha-2) + (s+2)_5(\alpha-2, \alpha-3) + (s+2)_6(\alpha-3, \alpha-3)$$
$$+ \dots, + (\alpha-s+1, \alpha-s).$$

Wir berücksichtigen nun die Gleichungen:

$$(m+1, m) = \tfrac{1}{2}(m, m),$$

und:

$$n_{t+1} + \tfrac{1}{2} n_t = n_t \frac{2n-t+1}{2(t+1)}.$$

Dann ergibt sich:

1) $$(p, q) = (\alpha, \alpha) + \frac{s \cdot 2s}{2 \cdot 2}(\alpha-1, \alpha-1) + \frac{(s+1)_3 2s}{2 \cdot 4}(\alpha-2, \alpha-2)$$
$$+ \frac{(s+2)_5 2s}{2 \cdot 6}(\alpha-3, \alpha-3) + \dots + s(\alpha-s+1, \alpha-s+1) + \tfrac{1}{2}(\alpha-s, \alpha-s),$$

wo zu setzen ist:

$$s = \frac{p-q}{2}, \quad \alpha = \frac{p+q}{2}.$$

Ist aber $p-q$ ungrade, so setzen wir:

$$p-s = q+s+1,$$

also:

$$s = \frac{p-q-1}{2}, \quad \alpha = q+s = \frac{p+q-1}{2},$$

und man erhält zunächst:

$$(p, q) = (\alpha+1, \alpha) + s(\alpha+1, \alpha-1) + s_2(\alpha+1, \alpha-2) + \dots$$
$$+ s(\alpha+1, \alpha-s+1) + (\alpha, \alpha-s).$$

Die Glieder mit Ausnahme des ersten sind wieder umzuformen. Man erhält:

$$s(\alpha,\ \alpha)+(s+1)_2(\alpha,\ \alpha-1)+(s+1)_3(\alpha,\ \alpha-2)+(s+1)_4(\alpha,\ \alpha-3)+\ \dots\ +(\alpha,\ \alpha-s).$$

Die Glieder mit Ausnahme der beiden ersten geben:

$$(s+1)_3(\alpha-1,\ \alpha-1)+(s+2)_4(\alpha-1,\ \alpha-2)+\ \dots\ +(\alpha-1,\ \alpha-s),$$

und wieder mit Ausschluss der beiden ersten Glieder:

$$(s+2)_5(\alpha-2,\ \alpha-2)+(s+3)_6(\alpha-2,\ \alpha-3)+\ \dots,$$

also schliesslich:

$$(p,\ q)=(\alpha+1,\ \alpha)+s(\alpha,\ \alpha)+(s+1)_2(\alpha,\ \alpha-1)+(s+1)_3(\alpha-1,\ \alpha-1)$$
$$+(s+2)_4(\alpha-1,\ \alpha-2)+\ \dots\ +(\alpha-s+1,\ \alpha-s+1)+(\alpha-s+1,\ \alpha-s),$$

also mit Berücksichtigung der obigen Werthe von:

$$(m+1,\ m),\ n_{t+1}+\tfrac{1}{2}n_t:$$

1a) $$(p,\ q)=\frac{2s+1}{2}(\alpha,\ \alpha)+\frac{(s+1)_2(2s+1)}{2\cdot 3}(\alpha-1,\ \alpha-1)$$
$$+\frac{(s+2)_4(2s+1)}{2\cdot 5}(\alpha-2,\ \alpha-2)+\ \dots\ +\frac{2s+1}{2}(\alpha-s+1,\ \alpha-s+1)$$
$$+\tfrac{1}{2}(\alpha-s,\ \alpha-s).$$

Es ist in diese Formeln 1) und 1a) schliesslich zu setzen:

$$(\alpha-u,\ \alpha-u)=2\frac{d^{\alpha-u}a_{(p+q-2\alpha+2u)}z^{(\alpha-u)}}{dx^{(\alpha-u)}},$$

also das erste Glied der Entwickelung. Also bezüglich:

$$(\alpha,\ \alpha)=2\frac{d^{\frac{p+q}{2}}a_{p,q}z^{\left(\frac{p+q}{2}\right)}}{dx^{\frac{p+q}{2}}},$$

und:

$$\frac{2s+1}{2}(\alpha,\ \alpha)=\frac{p-q}{2}\frac{d^{\frac{p+q-1}{2}}\left(\frac{da_{p,q}}{dx}\right)z^{\left(\frac{p+q-1}{2}\right)}}{dx^{\frac{p+q-1}{2}}}.$$

Der Differenzialquotient dieses Gliedes ist jedenfalls von niedrigerer Ordnung als n, da $\frac{p+q}{2}<p<n$ ist. Die Binome, aus denen sich ψ zusammensetzt, tragen also zur Bildung von $\frac{d^n A_n z^{(n)}}{dx^n}$ nichts bei. Der Ausdruck A_n besteht also nur aus dem in dem letzten Gliede von Formel II) enthaltenen Theile $a_{n,n}$, und somit ist:

$$A_n=a_{n,n}=\frac{\partial^2\varphi}{(\partial z^{(n)})^2}.$$

Hieran ist ein zweiter Satz zu knüpfen.

Wenn unter $\psi(z)$ die in I) gegebene Function von x, z und den Differenzialquotienten von z verstanden wird, $\psi(u)$ ein anderer Werth dieser Function ist, worin man z mit u vertauscht, so ist der Ausdruck $u\,\psi(z)-z\,\psi(u)$ ein vollständiger Differenzialquotient, was auch z und u seien. — In der That besteht dieser Ausdruck aus Binomen von der Form:

$$\text{III)} \qquad (-1)^{(p)} \left\{ u \frac{d^p A_p z^{(p)}}{dx^p} - z \frac{d^p A_p u^{(p)}}{dx^p} \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ U_1 - \frac{dU_2}{dx} + \ldots \mp \frac{d^{p-1} U_p}{dx^{p-1}} \right\},$$

wo gesetzt worden ist:

$$U_s = p_s A_p (u^{(p)} z^{(p-s)} - u^{(p-s)} z^{(p)}),$$

wie leicht zu zeigen ist, wenn man von der bekannten Formel:

$$u \frac{d^p A_p z^{(p)}}{dx^p} = (-1)^p [A_p z^{(p)} - p \frac{d}{dx} (A_p z^{(p)} u^{(p-1)}) + p^2 \frac{d^2}{dx} (A_p z^{(p)} u^{(p-2)} \ldots]$$

ausgeht, womit dann unser Satz bewiesen ist. — Wir wollen aber jetzt setzen: $z = u z_1$, dann ist:

$$z' = u z_1' + u' z_1, \quad z'' = u z_1'' + 2 u' z_1' + u'' z'$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z^{(p)} = u z_1^{(p)} + p_1 u' z_1^{(p-1)} + p_2 u'' z_1^{(p-2)} + \ldots + u^{(p)} z_1',$$

dann ist U_s eine lineare Function von z_1, z_1', z_1'' ..., und zwar ist der Coefficient von $z_1^{(r)}$ darin:

$$\text{IV)} \qquad \frac{A_p}{1 \cdot 2 \ldots r \,.\, 1 \cdot 2 \ldots s} [p(p-1) \ldots (p-r-s+1) u^{(p)} u^{(p-r-s)} - p(p-1) \ldots (p-r+1) p(p-1) \ldots (p-s+1) u^{(p-r)} u^{(p-s)}],$$

ein Ausdruck, der sich nicht ändert, wenn man r und s vertauscht. In den Werthen von U_1, U_2 ... U_p sind also die Coefficienten des $s$ten Gliedes von U_r und des $r$ten Gliedes von U_s identisch, und hieraus folgt leicht, dass man diese Ausdrücke betrachten kann als die partiellen Differenzialquotienten einer homogenen Function zweiten Grades χ_p von z_1, z_1', z_1'', so dass man hat:

$$U_s = \frac{\partial \chi}{\partial z_1^{(s)}}.$$

Wenn man nun die Ausdrücke U_0, U_1 ... U_p bezüglich mit z_1, z_1', z_1'' ... multiplicirt und addirt, so kommt:

$$2\chi_p = A_p u^{(p)} [z^{(p)} z_1 - p_1 z^{(p-1)} z_1' + \ldots + z z_1^{(p)}] - A_p z^{(p)} [u^{(p)} z_1 - p_1 u^{(p-1)} z_1' + \ldots + u z_1^{(p)}],$$

oder:

$$\text{V)} \qquad \chi_p = \frac{A_p}{2} \left\{ u^{(p)} \frac{d^p (z z_1)}{dx^p} - z^{(p)} \frac{d^p (u z_1)}{dx^p} \right\}.$$

Wenn man hierin z mit $u z_1$ vertauscht, und die Ableitungen berechnet, hat man den schliesslichen Werth von χ.

Die Binome, aus denen $u\psi(z)-z\psi(u)$ besteht, drücken sich demnach aus den Differenzialquotienten der Functionen $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ aus; setzt man also:

$$\chi=\chi_1+\chi_2+\ldots+\chi_n,$$

so ist χ ebenfalls eine homogene Function zweiter Ordnung von $z_1, z_1' \ldots z_1^{(n)}$, und man hat:

$$\text{VI)} \quad u\psi(z)-z\psi(u)=\frac{d}{dx}\left\{\psi'(z_1')-\frac{d\psi'(z_1'')}{dx}+\ldots\mp\frac{d^{n-1}\psi' z_1^{(n)}}{dx^{n-1}}\right\}.$$

Da übrigens das Glied χ_p keinen höheren Differenzialquotienten als $z_1^{(p)}$ enthält, so ist der Ausdruck $(z_1^{(p)})^2$ nur in χ_n enthalten, sein Coefficient also wird sein $-\frac{A_n}{2}u^2$, also:

$$\frac{\partial^2\chi}{(\partial z^{(n)})^2}=-A_n u^2.$$

Möge endlich u ein Werth sein, welcher die Differenzialgleichung $\psi(u)=0$ erfüllt, so ist, wenn man VI) integrirt:

$$\text{VII)} \quad \int u\psi(z)\,dx=-\psi_1(z_1'),$$

wo ψ_1 eine Function $\psi'(z_1')-\frac{d\,\psi'(z'')}{dx}+\ldots$ gestellt, welche die oben aufgestellte Bedingung erfüllt, dass sie auf die Form:

$$-B_1 z_1'+\frac{dB_2 z_1''}{dx}-\ldots\pm\frac{d^{n-1}B_n z_1^{(n-1)}}{dx^{n-1}}$$

gebracht werden kann, wo $B_1, B_2 \ldots$ Functionen von $x, u, u' \ldots u^{(n)}$ sind, die man ganz wie oben berechnen kann. Auch ist:

$$B_n=-\frac{\partial^2\psi}{(\partial z_1^{(n)})^2}=A_n u^2.$$

Das Gesagte ist jetzt auf unsere Aufgabe anzuwenden.

Sei U wieder der zu untersuchende Ausdruck. Wenn man den darin enthaltenen Grössen x, t den Zuwachs $\delta x, \delta t$ gibt, so wird nach dem Taylor'schen Satze sich U verwandeln in:

$$U+\delta U+\tfrac{1}{2}\delta^2 U+\ldots,$$

wo δU der Zuwachs von U, $\delta^2 U$ der von δU ist, welche entstehen, wenn man x und t um $\delta x, \delta t$ vermehrt. Da nun im Falle des Maximum und Minimum δU verschwindet, so ist dann $\frac{1}{2}\delta^2 U+\ldots$ der ganze Zuwachs, und dieser muss, damit ein Maximum oder Minimum überhaupt stattfindet, für jeden unendlich kleinen Zuwachs δx dasselbe Zeichen haben, und zwar im Falle des Maximum das negative, im Falle des Minimum das positive. Nun lässt sich δx so klein nehmen, dass das Zeichen von $\delta^2 U$ das des ganzen Zuwachses bestimmt, und auf diesen Ausdruck kommt es daher an. — Die bisher aufgestellten Criterien sind, wie man sieht, denen der gewöhnlichen Maxima und Minima vollkommen analog. So wie δU besteht auch $\delta^2 U$ aus einem entwickelten, nur von den Grenzwerthen abhängigen, und einem Theile unter dem Integralzeichen, welcher letztere allein zu betrachten ist, wenn die Grenzen constant sind. — Auf die Betrachtung dieses Theiles aber kann man sich, wie wir jetzt zeigen wollen, in jedem Falle allein beschränken. Da nämlich $\delta^2 U$ sein Zeichen für keinen Zuwachs δx ändern soll, so wird dies auch nicht für solchen geschehen, wo die Grenzen der Integration unverändert bleiben. Man kann also zunächst den entwickelten Theil verschwinden lassen. Auch kann man dann $\delta t=0$ setzen, da, wie schon oben angeführt,

ein in constanten Grenzen enthaltenes Integral ja nicht von den Zwischenwerthen der unabhängigen Variablen abhängt, vorausgesetzt, dass diese reell und continuirlich bleiben. — Was nun die Veränderung der Grenzen anbetrifft, so gibt die Bedingung, dass der nicht entwickelte Theil der ersten Variation verschwindet, Gleichungen, welche x und U selbst als Functionen der Grenzwerthe t und t_0 und gewisse Integrationsconstanten c, c_1 . . . ergeben. Man hat also:

$$x = f(t, c, c_1 \ldots), \quad x_0 = f_1(t_0, c, c_1), \quad U = \varphi(t, t_0, c, c_1 \ldots).$$

Lässt man nun die Grenzen t und t_0 nach irgend einem Gesetze sich ändern, so erhält man durch dies Gesetz Bedingungen zwischen x und t, z. B. wenn eine Grenze durch eine Curve gebildet wird, deren Gleichung $x = \psi(t)$, so hat man die Bedingung $f(t, c, c_1 \ldots) = \psi(t)$. Es werden also t und t_0 durch die Constanten c, c_1 . . . ausgedrückt, so dass U nur diese enthält. Damit nun U ein Maximum oder Minimum ist, müssen diese Constanten c . . . noch gewisse, in der Theorie gewöhnlicher Maxima oder Minima gegebene Bedingungen erfüllen, und dieser Theil der Aufgabe kann also aus den Anwendungen der Variationsrechnung ganz eliminirt werden. Wenn wir jetzt in Abschnitt 2) Formel 6) den mit δt multiplicirten Theil und den entwickelten Theil verschwinden lassen, wie es nach dem eben Gesagten gerechtfertigt ist, so kommt:

$$\delta U = \int \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{dk_1}{dt} \right) \delta x \, dt.$$

Setzen wir $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{dk_1}{dt} = P$, so ist:

$$\delta^2 U = \int \delta P \, \delta x \, dt.$$

Nimmt man noch auf die Gleichungen 5) des Abschnitts 2) Rücksicht, so ist:

$$P = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \ldots \pm \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right),$$

$$\delta P = \delta \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\delta \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\delta \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) - \ldots$$

Man hat also:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial x_s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x_s} \delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_s} \delta x_1 + \ldots$$

Nun setzen wir:

$$\delta x = z.$$

Es ist dann:

$$\delta x_s = \frac{d^s x}{dt^s} = z^{(s)}.$$

Hieraus folgt:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial x} = a_{0,0} z + a_{0,1} z' + a_{0,2} z'' + \ldots + a_{0,n} z^{(n)},$$

$$\delta \frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{1,0} z + a_{1,1} z' + a_{1,2} z'' + \ldots + a_{1,n} z^{(n)},$$

wo zu setzen ist:

$$a_{r,s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(r)} \partial x^{(s)}}.$$

Nimmt man also:

$$\varphi = \tfrac{1}{2} a_{0,0} z^2 + a_{0,1} z z' + a_{0,2} z z'' + \dots + a_{0,n} z z^{(n)},$$
$$+ \tfrac{1}{2} a_{1,1} z^{(1)^2} + a_{1,1} z' z'' + \dots + a_{1,n} z' z'',$$
$$+ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \tfrac{1}{2} a_{n,n} z^{(n)^2},$$

so ist offenbar:

$$\delta \frac{\partial f}{\partial x} = \varphi'(z), \quad \delta \frac{\partial f}{\partial x_1} = \varphi'(z') \dots \delta \frac{\partial f}{\partial x_n} = \varphi'(z^n),$$

also:

$$\delta P = \varphi'(z) - \frac{d\varphi'(z')}{dt} + \frac{d^2 \varphi'(z'')}{dt^2} - \dots \pm \frac{d^n \varphi' z^{(n)}}{dt^n},$$

ein Ausdruck, dem man die Form geben kann:

$$\psi = A_0 z - \frac{d A_1 z'}{dt} + \dots \pm \frac{d^n A_n z^{(n)}}{dt^n},$$

ganz wie oben gezeigt ist, und wir haben:

$$\delta^2 U = \int z \psi(z)\, dt.$$

$\psi(z)$ ist eine Function von t, z und den Differenzialquotienten von z nach t, denn x ist mittels der Integrale der Gleichung $P=0$ eliminirt. Die Differenzialgleichung:

$$\delta P = \psi(z) = 0$$

hat nun ein uns schon bekanntes Integral, denn es muss gleichzeitig $P=0$ und $\delta P=0$ sein, d. h. in P wird x ein Zuwachs δx gegeben, so dass $P(x)$ und $P(x+\delta x)$ beide gleich Null sind. Es muss dann offenbar $x+\delta x$ denselben Ausdruck als x haben, abgesehen von den Constanten, was nur möglich ist, wenn man in dem Werthe von x, welchen das Integral der Gleichung $P=0$ gibt, die Constanten variiren lässt. Ist also:

$$x = F(t, c_1, c_2 \dots c_{2n})$$

das Integral der Gleichung $P=0$, so ist das der Gleichung $\delta P=0$:

$$\delta x = \frac{\partial F}{\partial c_1} \delta c_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} \delta c_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial c_{2n}} \delta c_{2n},$$

oder wenn man $\delta x = u$, $\delta c_s = a_s$ setzt:

$$2) \qquad u = \frac{\partial F}{\partial c_1} a_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} a_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial c_{2n}} a_{2n}.$$

Setzen wir nun $z = u z_1$, so ist, wie oben gezeigt:

$$3) \qquad u \psi(z) = \frac{d}{dt} \left\{ -B_1 z_1' + \frac{d B_2 z_1''}{dt} - \dots \pm \frac{d^n B_n z_1^{(n)}}{dt^n} \right\} = -\frac{d}{dt} \psi_1(z_1').$$

Da an den Grenzen z und seine Differenzialquotienten verschwinden, so ist es mit z_1 ebenso, aber:

$$\delta^2 U = \int z_1 u \psi(z)\, dt = - \int_{t_0}^{t_1} z_1 \psi_1(z_1') + \int z_1 \psi_1(z_1')\, dt,$$

also:

$$\delta^2 U = \int z_1' \psi_1 (z_1') \, dt.$$

Dies Integral wird ähnlich umgeformt. Zu dem Ende braucht man ein Integral der Gleichung $\psi_1(z_1')=0$. Jedem Werthe von z aber, der $\psi(z)$ verschwinden lässt, entspricht wegen $z=uz_1$ und Gleichung 3) ein Werth z_1, der $\psi_1(z_1')$ constant macht, und derselbe wird nach 3) erhalten, wenn man in:

$$4) \qquad v = \frac{\partial F}{\partial c_1} b_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} b_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial c_n} b_n,$$

wo $b_1, b_2 \ldots$ ein neues System von Constanten ist, $v=uv_1$ setzt. Es entspricht hierin v der Grösse z, also v_1' der Grösse z_1'. Setzt man also in der That v_1' für z_1', so wird $\psi_1(z_1')=\text{const.}$, und durch theilweise Bestimmung der Constanten $b_1, b_2 \ldots$ kann man $\psi_1(z_1')=0$ machen, wie hier geschehen soll. Setzt man dann:

$$z_1' = v_1' z_2',$$

so ist wieder:

$$v_1' \psi_1(z_1') = -c_2 z_2'' + \frac{d}{dt} c_3 z_2''' - \ldots \mp \frac{d^{n-2} c_n z_2^{(n)}}{dt^{n-2}} = -\psi_2(z_2''),$$

und wie oben erhält man:

$$\delta^2 U = \int z_2'' \psi_2(z_2'') \, dt.$$

Nun ist eben so wie oben zu setzen:

$$w = \frac{\partial F}{\partial c_1} + \frac{\partial F}{\partial c_2} c_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial c_n} c_n,$$

$$w = v w_1, \quad w_1' = v_1' w_2',$$

und die c werden so bestimmt, dass $\psi_2(z_2'')=0$ wird. Dann hat man durch eine Transformation:

$$\delta^2 U = \int z_3''' \psi_3(z_3''') \, dt \ldots,$$

also schliesslich:

$$\delta^2 U = \int z_n^{(n)} \psi_n(z_n^{(n)}) \, dt,$$

und es ist bei allen diesen Rechnungen keine neue Integration zu machen, sondern nur auf das Integral der Gleichung $P=0$ zurückzukommen.

Da übrigens bei jeder Wiederholung des Verfahrens die Ordnung der Ausdrücke $\psi, \psi_1, \psi_2 \ldots$ um Eins fällt, so ist $\psi_n(z^{(n)}) = Q_n z_n^{(n)}$. Auch war:

$$A_n = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}, \quad B_n = A_n u^2, \quad C_n = B_n v_1'^2 \ldots,$$

wie oben gezeigt wurde, also:

$$Q_n = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} u^2 v_1'^2 + v_2''^2 \ldots,$$

d. h. schliesslich:

$$5) \qquad \delta^2 U = \int \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} (u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)})^2.$$

Wir wollen die Substitutionen, die zu diesem Ausdrucke führen, nochmals feststellen.

Aus dem Integral der Gleichung $P=0$, welches die Form hat:

$$x = F(t, c_1, c_2 \ldots c_{2n}),$$

findet man die n Ausdrücke:

$$u = \frac{\partial F}{\partial c_1} a_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} a_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial c_n} a_n,$$

$$v = \frac{\partial F}{\partial c_1} b_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} b_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial c_n} b_n,$$

$$w = \frac{\partial F}{\partial c_1} e_1 + \frac{\partial F}{\partial c_2} e_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial c_n} e_n,$$

und setzt:

$$v = u v_1, \quad w = u w_1 \ldots z = u z_1,$$

$$w_1' = v_1' w_2 \ldots z_1' = v_1' z_2',$$

$$\ldots$$

$$z_2'' = w_2'' z_3'',$$

$$\ldots$$

Hieraus werden die Werthe $u v_1'$, w_2'' ... berechnet. Die Constanten a, b, e sind nicht ganz willkürlich, sie erfüllen nämlich die Bedingungen:

$$\psi_1(v_1') = 0, \quad \psi_1(w_1') = 0, \quad \psi_2(w_2') = 0 \ \ldots,$$

wo zu setzen ist:

$$\int u \psi(z)\, dt = -\psi_1(z_1'), \int v_1 \psi_1(z_1') = -\psi_2(z_2'') \ldots$$

Nur der Factor $z_n^{(n)}$ enthält die Variation δx, und zwar ist er eine lineare Function von z, z', z'' ... $z^{(n)}$, was man erkennt, wenn man z_1', z_2'' ... in z ausdrückt, nämlich:

$$z_1' = \frac{d\frac{z}{u}}{dt}, \quad z_2'' + \frac{d\frac{z_1'}{v_1'}}{dt} \ldots$$

Hesse gibt noch dem Producte $u v_1' w_2'' \ldots z_n^{(n)}$ die Determinantenform.

Diese beruht auf dem Satze:

Sind $a, b, c \ldots n+1$ Functionen von einer Variablen t, $a', a'' \ldots b', b'' \ldots$ die Differenzialquotienten, λ eine Function von t, so ist:

$$\begin{vmatrix} \lambda a, & (\lambda a)' & \ldots & (\lambda a)^{(n)}, \\ \lambda b, & (\lambda b)' & \ldots & (\lambda b)^{(n)}, \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix} = \lambda^{(n+1)} \begin{vmatrix} a, & a' & \ldots & a^{(n)} \\ b, & b' & \ldots & b^{(n)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix},$$

denn wenn man links die Differenzialquotienten entwickelt, und, wie dies ja geschehen kann, ohne die Determinante zu ändern, von jeder Colonne Glieder abzieht, die den Gliedern einer andern Colonne proportional sind, so kommt man auf den Ausdruck rechts.

Sei nun:

$$D = \begin{vmatrix} u, & u' & \ldots & u^{(n)} \\ v, & v' & \ldots & u^{(n)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z, & z' & \ldots & z^{(n)} \end{vmatrix};$$

und setzen wir:

$$u = u, \quad v = u v_1, \quad w = u w_1 \ \ldots \ z = u z_1,$$

so kommt:

$$D = u^{n+1} \begin{vmatrix} v_1', & v_1'' & \ldots & v_1^{(n)} \\ w_1', & w_1'' & \ldots & w_1^{(n)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ z_1', & z_1'' & \ldots & z_1^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Setzt man hierin dann für v_1', w_1' . . . z_1' bezüglich v_1', $v_1' w_2'$ . . . $v_1' z_2'$ so kommt:

$$D = u^{n+1} v_1'^{(n)} \begin{vmatrix} w_2'' & \ldots & w_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_2'' & \ldots & z_2^{(n)} \end{vmatrix},$$

also schliesslich:

$$D = u^{n+1} v_1'^{\,n} w_2''^{\,n-1} \ \ldots \ z_n^{(n)},$$

also wenn gesetzt wird:

$$\triangle = \begin{vmatrix} u, & u' & \ldots & u^{(n-1)} \\ v, & v' & \ldots & v^{(n-1)} \\ w, & w' & \ldots & w^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \end{vmatrix},$$

wo $\triangle$ also die Unterdeterminante von D ist, so kommt:

$$\triangle = u^n v_1'^{\,n-1} w_2''^{\,n-2} \ldots,$$

also:

$$\frac{D}{\triangle} = u v_1' w_2'' \ldots . z_n^{(n)},$$

woraus sich ergibt:

6)
$$\delta^2 U = \int \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \left(\frac{D}{\triangle}\right)^2 dt.$$

Der Nenner $\triangle$ enthält z, z' . . . gar nicht. Sei noch: $D_p = \frac{\partial D}{\partial z^{(p)}}$, so hat man:

$$\triangle = D_n, \quad \text{und:} \quad \frac{D}{\triangle} = \frac{D_0 z + D_1 z' + D_2 z'' + \ \ldots \ + D_n z^{(n)}}{D_n}.$$

Aus dem Ausdruck 5) oder 6) ergibt sich alles Nöthige.

Erste Bedingung ist, dass $\frac{D^2 f}{\partial x_n^2}$ und $\frac{D}{\triangle}$ continuirlich sind, für alle Werthe zwischen den Grenzen der Integration. Die Constanten $a_1, a_2 \ldots b_1, b_2 \ldots$

müssen sich also gemäss den Bedingungen so bestimmen lassen, dass $\triangle$ nicht Null wird, für irgend einen Werth t zwischen t und t_0. Ist dies nicht der Fall, so braucht weder ein Maximum noch ein Minimum stattzufinden. Ist diese Bedingung erfüllt, die also zurück auf das Integral führt, so ist $\left(\frac{D}{\triangle}\right)^2$ immer positiv, und es findet also ein Maximum oder Minimum oder keins von beiden statt, je nachdem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^{\,2}}$ in den Grenzen t_0 und t immer negatives, oder immer positives Zeichen hat, oder sein Zeichen wechselt. Keins von beiden aber findet auch dann statt, wenn für jeden Werth innerhalb der Grenzen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^{\,2}}$ gleich Null wird, also die Gleichung $\delta P=0$ erfüllt ist. In diesem Falle sahen wir nun, dass man haben muss:

$$z=\delta x=\frac{\partial F}{\partial c_1}a_1+\frac{\partial F}{\partial c_2}a_2+\ldots+\frac{\partial F}{\partial c_{2n}}a_{2n},$$

z aber kann eine beliebige Function von t sein, vorausgesetzt, dass an den Grenzen z, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2 z}{dt^2}$ . . . $\frac{d^{n-1}z}{dt^{n-1}}$ verschwinden. Lassen sich also die Constanten a_1, a_2 . . . a_{2n} so bestimmen, dass an beiden Grenzen:

$$\delta x=\frac{d\,\delta x}{dt}=\frac{d^2\delta x}{dt^2}=\ldots=\frac{d^{n-1}\delta x}{dt^{n-1}}=0$$

ist, so findet weder Maximum noch Minimum statt, die Untersuchung braucht dann also nicht weiter geführt zu werden.

Wir machen jetzt Anwendung auf die einfachsten Fälle. Enthält f nur t und x, so ist:

$$\delta^2 U=\int\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\delta x^2\,dt.$$

Das Maximum oder Minimum ist also lediglich an die Bedingung geknüpft, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ continuirlich und bezüglich immer negativ oder positiv sein muss. — Enthalte f noch x_1, und sei das Integral von $\delta P=0$:

$$x=F\,(t,\ c_1,\ c_2).$$

Wir setzen:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}=r_1,\quad \frac{\partial F}{\partial c_2}=r_2,$$

so ist zunächst Bedingung, dass überhaupt Maximum oder Minimum stattfinde, dass die Gleichung:

$$a_1 r_1+a_2 r_2=0,\quad\text{oder:}\quad \frac{r_1}{r_2}=m,$$

wo m eine willkürliche Constante ist, weder zugleich an beiden Grenzen stattfinden kann, noch für zwei willkürliche Werthe von t, innerhalb dieser Grenzen t_1 und t_2, denn auch in diesem Falle wäre ja zwischen t_1 und t_2 kein Maximum und Minimum des Integrals, also auch für den ganzen Raum, auf welchen sich das Integral erstreckt, kein solches vorhanden. Ist diese Bedingung erfüllt, so setzt man:

$$z=\delta x,\quad u=a_1 r_1+a_2 r_2,$$

wo sich dann ergibt:

$$\delta^2 U=\int\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}}\,\frac{(uz'-zu')^2}{u^2}\,dt.$$

a und a_1 müssen also solche Werthe erhalten können, dass u nicht gleich Null wird, d. h. dass die Gleichung $\frac{r_1}{r_2}=m$ für keinen Werth von t in den Grenzen der Integration erfüllt wird. Dies ist immer der Fall, wenn es irgend einen Werth gibt, den $\frac{r_1}{r_2}$ innerhalb der Grenzen nicht annimmt, da man m diesen Werth ertheilen kann. Es darf also $\frac{r_1}{r_2}$ innerhalb der Grenzen nicht von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen. — Dieser Bedingung kann noch ein anderer Ausdruck gegeben werden. r_1 und r_2 sind ebenso wie $a_1 r_1 + a_2 r_2$ Specialwerthe von $\delta x = z$, welche $\delta P=0$ machen. Diese Gleichung aber hat die Form:

$$A_0 z - \frac{d(A_1 z')}{dt} = 0,$$

es ist also identisch:

$$A_0 r_1 - \frac{d(A_1 r_1')}{dt} = 0, \qquad A_0 r_2 - \frac{d(A_1 r_2')}{dt} = 0,$$

somit, wenn man A_0 eliminirt, und integrirt:

$$A_1(r_2 r_1' - r_1 r_2') = C, \quad \frac{d\frac{r_1}{r_2}}{dt} = \frac{C}{A_1 r_2^2}.$$

Der Differenzialquotient von $\frac{r_1}{r_2}$ ändert also sein Zeichen nur mit $A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$. Also $\frac{r_1}{r_2}$ wird immer wachsen oder immer abnehmen, wenn $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ dasselbe nicht ändert. Im erstern Falle wird $\frac{r_1}{r_2}$, wenn es den Werth $+\infty$ erreicht hat, nach $-\infty$ überspringen, um wieder beständig zu wachsen, im zweiten Falle findet der Sprung von $-\infty$ nach $+\infty$ statt. $\frac{r_1}{r_2}$ kann also nur auf einen früheren Werth zurückkommen, wenn es alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen hat. Die beiden Beschränkungen für $\frac{r_1}{r_2}$, dass die zweite Variation weder Null noch unendlich werden darf, bilden somit eine einzige. Diese ist, dass man die obere Grenze nicht von der untern gegebenen t_0 soweit entfernen darf, dass $\frac{r_1}{r_2}$, nachdem es durch Unendlich gegangen, auf seinen früheren Werth zurückkommt. Ist diese Bedingung erfüllt, so muss $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$ beständig negativ oder positiv sein, damit ein Maximum oder Minimum stattfinde.

Wir wollen jetzt den allgemeineren Fall betrachten, wo die Aufgabe gewissen Bedingungen unterliegt, und uns dabei der Gleichungen des Abschnitts 4) bedienen.

Wenn man, wie es gestattet ist, den entwickelten Theil nicht berücksichtigt und $\delta t=0$ setzt, so hat man für ein beliebiges Integral S, nach Abschnitt 4), Gleichung 1):

$$\delta S = \int \sum_{r=1}^{r=m} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_r} - \frac{d\mu_r}{dt} \right) \delta x_r \right\} dt,$$

und es finden Bedingungen statt von der Form:

$$\frac{dx_r}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mu_r}.$$

Bilden wir jetzt die zweite Variation, indem wir setzen:

$$\delta x_r = z_r, \quad \delta \mu_r = u_r,$$

so kommt:

$$\delta^2 S = \int \sum_{r=1}^{r=m} \sum_{s=1}^{s=m} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} z_r z_s + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial \mu_s} z_r u_s - z_r \frac{du_r}{dt} \right\} dt,$$

und die Variation der Bedingungsgleichungen gibt:

$$\frac{dz_r}{dt} = - \sum_{s=1}^{s=m} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial \mu_s} z_s + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_r \partial \mu_s} u_s \right\}.$$

Der Einfachheit wegen setzen wir:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} = a_{r,\,s}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial \mu_s} = b_{r,\,s}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mu_r \partial \mu_s} = c_{r,\,s},$$

so dass man hat:

$$a_{r,\,s} = a_{s,\,r}, \quad c_{r,\,s} = c_{s,\,r}.$$

Die a, b und c sind Functionen von t, die sich nach Integration der Gleichungen bestimmen lassen, welche das Verschwinden der ersten Variation gibt.

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen:

$$\sum_{r,\,s} \left\{ a_{r,\,s} z_r z_s + b_{r,\,s} z_r u_s - \sum_r z_r \frac{du_r}{dt} \right\}$$

soll nun mit Hülfe der Bedingungsgleichungen:

$$7) \qquad \frac{dz_r}{dt} = - \sum_s (b_{s,\,r} z_s + c_{r,\,s} u_s)$$

in einen andern umgeformt werden, welcher aus einer homogenen Function zweiter Ordnung von n Variablen $v_1, v_2 \ldots v_n$ besteht, die nur von t abhängig sind, und wo die Coefficienten selbst nur t enthalten. Wir setzen zu dem Ende:

$$-z_r \frac{du_r}{dt} = - \frac{d(u_r z_r)}{dt} + u_r \frac{dz_r}{dt} = - \frac{d(u_r z_r)}{dt} - \sum_s (b_{s,\,r} u_r z_s + c_{r,\,s} u_r u_s).$$

Bei der Integration wird aus dem ersten Gliede sich ergeben:

$$\int_{t_0}^{t} \sum_r (u_r z_r).$$

Dies verschwindet, da z_r an den Grenzen gleich Null ist. Man hat also nur zu untersuchen den Ausdruck:

$$8) \qquad \sum_{r,\,s} (a_{r,\,s} z_r z_s - c_{r,\,s} u_r u_s).$$

Diesen Ausdruck wollen wir gleich setzen mit:

$$9) \qquad - \sum_{r,\,s} c_{r,\,s} (u_r + \sum_h \alpha_{r,\,h} z_h)(u_s + \sum_k \alpha_{s,\,k} z_k),$$

wo die α Functionen von t sind, die wir bestimmen werden, und die Summen sich auf alle Werthe von h und k von 1 bis m erstrecken. Durch Zerlegung des letzteren Ausdruckes erhält man:

$$- \sum_{r,\,s} c_{r,\,s} u_r u_s - \sum_{r,\,s,\,h} c_{r,\,s} \alpha_{r,\,h} z_h u_s - \sum_{r,\,s,\,k} c_{r,\,s} \alpha_{s,\,k} z_k u_r$$
$$- \sum_{r,\,s,\,h,\,k} c_{r,\,s} \alpha_{r,\,h} \alpha_{s,\,k} z_h z_k,$$

oder wenn man im dritten Gliede h für k setzt und r mit s vertauscht:

$$- \sum_{r,\,s} c_{r,\,s} u_r u_s - 2 \sum_{r,\,s,\,h} c_{r,\,s} \alpha_{r,\,h} z_h u_s - \sum_{r,\,s,\,h,\,k} c_{r,\,s} \alpha_{r,\,h} \alpha_{s,\,k} z_h z_k.$$

Für das zweite Glied lässt sich nun schreiben, wenn wir Gleichung 7) berücksichtigen:

$$-2\sum_{r,h}(\alpha_{r,h}z_h\sum_s c_{r,s}u_s)=2\sum_{r,h}\left\{\alpha_{r,h}z_h(\sum_s b_{s,r}z_s)+\frac{dz_r}{dt}\right\}.$$

Die bis jetzt beliebigen α unterwerfen wir nun der Bedingung, dass:

$$\alpha_{r,h}=\alpha_{h,r}$$

sein soll. Dann ist der zuletzt geschriebene Ausdruck gleich:

$$2\sum_{r,h,s}(b_{s,r}\alpha_{r,h}z_h z_s)+\sum_{r,h}\alpha_{r,h}\left\{z_h\frac{dz_r}{dt}+z_r\frac{dz_h}{dt}\right\}=2\sum_{r,h,s}(b_{s,r}\alpha_{r,h}z_h z_s)$$
$$+\sum_{r,h}\frac{d(\alpha_{r,h}z_h z_r)}{dt}-\sum_{r,h}z_h z_r\frac{d(\alpha_{r,h})}{dt}.$$

Das vorletzte Glied bleibt ausser Acht, da es bei der Integration:

$$\sum_{r,h}\alpha_{r,h}z_h z_r=0$$

gibt. Substituirt man nun in Ausdruck 9), so kommt statt dessen:

$$10)\qquad -\sum_{r,s}c_{r,s}u_r u_s+2\sum_{r,h,s}b_{s,r}\alpha_{r,h}z_h z_s-\sum_{r,h}z_h z_r\frac{d\alpha_{r,h}}{dt}$$
$$-\sum_{r,s,h,k}c_{r,s}\alpha_{r,h}\alpha_{s,k}z_h z_k.$$

Dieser Ausdruck ist dem in 8) zu identificiren. Setzt man also in beiden die mit $z_p z_q$ multiplicirten Glieder gleich, indem man in den einzelnen Summen den z entsprechende Indices gibt, also demgemäss Vertauschungen der Indices vornimmt, nachdem man jedoch:

$$2\sum_{r,h,s}b_{s,r}\alpha_{r,h}z_h z_s=\sum_{r,h,s}(b_{s,r}\alpha_{r,h}z_h z_s+b_{h,r}\alpha_{r,s}z_h z_s)$$
$$=\sum_{r,h,s}(b_{s,r}\alpha_{r,h}+b_{h,r}\alpha_{r,s})z_r z_h$$

geschrieben, so kommt:

$$11)\qquad \frac{d\alpha_{r,s}}{dt}=-\alpha_{r,s}+\sum_h(b_{s,h}\alpha_{r,h}+b_{r,h}\alpha_{s,h})-\sum_{h,k}c_{h,k}\alpha_{r,h}\alpha_{s,h}.$$

Diese Gleichung ändert sich nicht, wenn man r mit s vertauscht, und somit genügt sie der Bedingung $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$. Sie stellt ferner ein System von $\frac{m(m+1)}{2}$ Differenzialgleichungen vor, welche hinreichen, um die $\frac{m(m+1)}{2}$ Functionen α zu bestimmen. Nachdem dies geschehen, hat man dann die zweite Variation in der That auf die Form, welche 9) gibt, nämlich:

$$12)\qquad \delta^2 S=-\int\sum_{r,s}c_{r,s}v_r v_s dt,$$

gebracht, wo:

$$v_r=u_r+\sum_h\alpha_{r,h}z_h$$

ist. Da nun die Summe unter dem Integralzeichen sich jedenfalls in ein Aggregat von m Quadraten, mit gewissen Coefficienten multiplicirt, zerlegen lässt (vergleiche den Artikel: Quadrat), so kann dieser Ausdruck ähnlich wie in dem Jakobi'schen Falle discutirt werden, und namentlich müssen die Coefficienten der Quadrate alle negativ oder positiv sein, je nachdem ein Maximum oder Minimum stattfindet. Der Ausdruck 11) ist derselbe, als der, welchen Klebsch (Crelle, Bd. 55 und 56) gibt. Da, um ihn zu finden, jedoch die Auflösung neuer Differenzialgleichungen nöthig ist, so ist unseres Erachtens derselbe nicht als

eine Erweiterung des Jakobi'schen Verfahrens aufzufassen. Das Letztere würde verlangen, dass festgestellt wird, welche Erleichterung beim Integriren dadurch erlangt wird, dass man die Integrale der Gleichungen, welche durch das Verschwinden der ersten Variation entstehen, bereits kennt. Klebsch kommt auf die Formel 11) allerdings durch ein Anknüpfen an diese Gleichungen. Die hier gegebene Entwickelung ist nichts als eine allgemeinere Ausführung des Legendre'schen Verfahrens, da die von demselben gemachten Schlüsse vollständig für den allgemeinen Fall ausreichen. Die wahre Verallgemeinerung des Jakobi'schen ist wohl noch als unerledigt zu betrachten.

6) Variation mehrfacher Integrale.

Die Prinzipien, welche bei der Variation einfacher Integrale auseinandergesetzt sind, reichen auch für die mehrfachen aus. Namentlich das in Bezug auf die Bedingungsgleichungen und auf das Eliminiren der Differenzialquotienten Gesagte findet unveränderte Anwendung. Da die Bildung der Variation aber auf theilweisem Integriren beruht, so ist es nöthig, die entsprechende Formel für mehrfache Integrale zunächst zu geben. Sei:

$$S=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,dv\,du\ldots$$

Die Grenzen $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1$ sollen Functionen einer Variable t sein, die auch in f vorkommt, und es ist die Grösse $\frac{dS}{dt}$ zu bestimmen.

Geben wir den Grenzen des nach u genommenen Integrals α_0 und α_1 einen Zuwachs, so kommt:

$$\int_{\alpha_0+\frac{d\alpha_0}{dt}dt}^{\alpha_1+\frac{d\alpha_1}{dt}dt}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,dv\,du$$

$$=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1} f\,dw\,dv\,du+dt\,\Big/_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,dv\,\frac{du}{dt}.$$

Das Substitutionszeichen hat die obige Bedeutung, dass nach den Integrationen für u gesetzt werden soll α_1 und α_0, also für $\frac{du}{dt}$ auch $\frac{d\alpha_1}{dt}$ und $\frac{d\alpha_0}{dt}$ und die Differenz beider Werthe zu nehmen ist. Ebenso erhält man:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0+\frac{d\beta_0}{dt}dt}^{\beta_1+\frac{d\beta_1}{dt}dt}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,dv\,du$$

$$=S+dt\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\Big/_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,\frac{dv}{dt}\,du\ldots$$

Das Substitutionszeichen tritt also an die Stelle eines Integralzeichens. Nimmt man noch den Zuwachs von S hinzu, der sich durch Integriren von f ergibt, so kommt:

I)
$$\frac{dS}{dt}=\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots\frac{df}{dt}\,dw\,dv\,du\ldots$$

$$+\Big/_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,dv\,\frac{du}{dt}+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\Big/_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,dw\,\frac{dv}{dt}\,du$$

$$+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\Big/_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots f\,\frac{dw}{dt}\,dv\,du\ldots+\ldots$$

Sei nun $f=\varrho\cdot\varphi$, so ist, wenn man den Ausdruck I) in den Grenzen t_0 und t_1 nochmals nach t integrirt:

$$\text{II)}\quad \int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots\varrho\frac{d\varphi}{dt}\,dw\,dv\,du\,dt$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots\varrho\,\varphi\cdot dw\,dv\,du$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\ldots\varphi\frac{d\varrho}{dt}\,dw\,dv\,du\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\varrho\,\varphi\,dw\,dv\,\frac{du}{dt}\cdot dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\varrho\,\varphi\,dw\,\frac{dv}{dt}\,du\,dt$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\int_{\beta_0}^{\beta_1}\int_{\gamma_0}^{\gamma_1}\varrho\,\varphi\,\frac{dw}{dt}\,dv\,du\,dt-\ldots$$

Dies ist die Formel fürs theilweise Integriren. Sie entspricht genau der bekannten für einfache Integrale:

$$\int_{t_0}^{t}\varrho\frac{d\varphi}{dt}\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\varphi\varrho-\int_{t_0}^{t_1}\varphi\frac{d\varrho}{dt}\,dt.$$

Mit ihrer Hülfe wird es keine Schwierigkeit machen, die Variation eines mehrfachen Integrals zu bestimmen. Wie der Ausdruck auch beschaffen sei, so lässt er sich zurückführen auf Integrale von der Form:

$$U=\int_{t_n^0}^{t_n'}\int_{t_{n-1}^0}^{t_{n-1}'}\ldots\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}f\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n,$$

$$V=\int_{t_n^0}^{t_n'}\int_{t_{n-1}^0}^{t_{n-1}'}\ldots\int_{t_1^0}^{t_1'}f\,dt_p(x_r)dt_1\,dt_2\ldots dt_{p-1}dt_{p+1}\ldots dt_n.$$

Hier sind $t_1, t_2 \ldots t_n$ unabhängige, $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängige Variablen, welche alle in f enthalten sind. Die Grenzen $t_1^0, t_1', t_2^0 \ldots$ sind so beschaffen, dass t_n^0, t_n' Constanten, alle t' und t^0, deren unterer Index kleiner als n ist, Functionen von t_n sind, ausserdem alle t^0, t', deren Index kleiner als $n-1$, auch Functionen von t_{n-1} sind u. s. w., so dass t_1^0, t_1' Functionen von $t_2, t_3 \ldots t_n$ sind. Die Variation wird ganz wie bei einfachen Integralen gebildet. Wir wollen z. B. von U und V diejenigen Theile $\triangle U$ und $\triangle V$ bilden, welche nach x_r genommen sind. Man erhält:

$$\triangle U=\iint\ldots\int\frac{\partial f}{\partial x_r}\,\delta x_r\,dt_1\,dt_2\ldots dt_n.$$

Die Integralzeichen sind dieselben wie in U.

$$\triangle V=\iint\ldots\int\frac{\partial f}{\partial x_r}\,\delta x_r\,dt_p\,(x_r)\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{p-1}\,dt_{p+1}\ldots dt_n$$

$$+\iint\ldots\int f\,dt_1\,dt_2\ldots dt_{p-1}\,dt_p(\delta x_r)\,\delta t_{p+1}\ldots dt.$$

Für den letzten Theil aber ergibt sich durch theilweises Integriren, da:

$$dt_p(\delta x_r) = \frac{d\,\delta x_r}{dt_p}\,dt_p$$

ist:

$$\int_{t_n^\circ}^{t_n'} \cdots \int_{t_{p+1}^\circ}^{t_{p+1}'} \int_{t_p^\circ}^{t_p'} \int_{t_{p-1}^\circ}^{t_{p-1}'} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} f\,\delta x_r\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_{p-1}\,dt_{p+1} \ldots dt_n$$

$$-\int_{t_n^\circ}^{t_n'} \cdots \int_{t_p^\circ}^{t_p'} \int_{t_{p-1}^\circ}^{t_{p-1}'} \int_{t_{p-2}^\circ}^{t_{p-2}'} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} f\,\delta x_r\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_{p-2}\,\frac{dt_{p-1}}{dt_p}\,dt_p \ldots dt_n$$

$$-\int_{t_n^\circ}^{t_n'} \cdots \int_{t_{p-1}^\circ}^{t_{p-1}'} \int_{t_{p-2}^\circ}^{t_{p-2}'} \int_{t_{p-3}^\circ}^{t_{p-3}'} \cdots$$

$$\cdots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} f\,\delta x_r\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_{p-2}\,\frac{dt_{p-2}}{dt_p}\,dt_{p-1} \ldots dt_n$$

$$- \ldots - \int_{t_n^\circ}^{t_n'} \cdots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} \frac{df}{dt_p}\,\delta x_r\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n.$$

Es ist hier wie in dem Folgenden immer das Zeichen d, also $\frac{df}{dt_p}$ genommen, wenn dies Differenziiren nach t_p derart ausgeführt werden soll, dass alle abhängigen Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ als Functionen von t_p betrachtet werden, dagegen geht $\frac{\partial f}{\partial t_p}$ nur auf t_p selbst.

Soll U nach t_p variirt werden, so braucht man in den Werthen von $\triangle V$ für x_r nur zu schreiben t_p. Soll V nach t_p variirt werden, so erhält man:

$$\triangle' V = \iint \cdots \int \frac{\partial f}{\partial t_p}\,\delta t_p\,\frac{dx_r}{dt_p}\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n.$$

Ein zweites Glied findet nicht statt, da dt_p selbst nicht vorkommt. Soll V nach t_q variirt werden, wo q nicht gleich p ist, so schreibt man in U statt f den Werth: $f\frac{dx_r}{dt_p}$ und verfährt wie oben. Nur auf Glieder dieser Art führt die Bildung der Variation.

Wir können uns jetzt die allgemeinste Aufgabe stellen.

Es ist zu variiren der Ausdruck:

$$S = \int_{t_n^\circ}^{t_n'} \cdots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} f\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_n,$$

wo f die unabhängigen Variablen $t_1, t_2 \ldots$, die abhängigen $x_1, x_2 \ldots x_s$ und beliebige Differenzialquotienten der letzten nach den ersteren enthält. Diese Variablen sind noch verbunden durch gewisse Bedingungsgleichungen:

1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \ldots$$

Zunächst lassen sich alle Differenzialquotienten eliminiren, indem man in S und den Gleichungen 1) setzt.

2) $$\frac{dx_r}{dt_p} = x_{(r,p)}, \quad \text{oder:} \quad dt_p x_r - x_{(r,p)} dt_p = 0.$$

Die Grössen $x_{(r,p)}$ kommen dann zu den übrigen x hinzu. Wenn wir die Ausdrücke in 1) mit Factoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ und die Ausdrücke in 2) $dt_p x_r - x_{(r,p)} dt_p$ mit andern Factoren $k_{r,p}$ multipliciren und unter den Integralzeichen zum Argument von S addiren, wodurch dasselbe nicht verändert wird, so ist der zu variirende Ausdruck:

3) $$S = \int_{t_n^\circ}^{t_n'} \ldots \int^{t_1'} [F dt_1 dt_2 \ldots dt_n + \sum_{r,p} k_{r,p} dt_p (x_r) dt_1 \ldots dt_{p-1} dt_{p+1} \ldots dt_n],$$

wo zu setzen ist:

4) $$F = f + \sum_s \lambda_s f_s - \sum_{r,p} k_{r,p} x_{(r\,p)}.$$

Die Variation ist zu nehmen nach allen t, x, λ und k, die mit $\delta\lambda$ und δk multiplicirten Glieder aber fallen wegen der Gleichungen 1) und 2) ganz weg. δS zerfällt dann in zwei Theile, der erste ist eine Summe von $n-1$fachen Integralen, der letzte ein $n$faches Integral. Wir setzen:

5) $$\delta S = A + \int_{t_n^\circ}^{t_n'} \ldots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} \Sigma (B_q \delta t_q + C_q \delta x_q) dt_1 dt_2 \ldots dt_n,$$

wo A die Summe der $n-1$fachen Integrale anzeigt, Wir erhalten, wenn wir die obigen Regeln anwenden:

6) $$A = \sum_q \left(\int_{t_n^\circ}^{t_n'} \ldots \int_{t_{q+1}^\circ}^{t_{q+1}'} dt_{q+1} \ldots dt_n \left\{ \int_{t_q^\circ}^{t_q'} \int_{t_{q-1}^\circ}^{t_{q-1}'} \ldots \right.\right.$$

$$\ldots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} (\varphi_q \delta t_q + \sum_r k_{r,q} \delta x_r) dt_1 dt_2 dt_3 \ldots dt_{q-1}$$

$$- \int_{t_q^\circ}^{t_q'} \int_{t_{q-1}^\circ}^{t_{q-1}'} \int_{t_{q-2}^\circ}^{t_{q-2}'} \ldots$$

$$\ldots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} (\varphi_q \delta t_q + \sum_r k_{r,q} \delta x_r) dt_1 dt_2 \ldots dt_{q-2} \frac{dt_{q-1}}{dt_q} dt_q$$

$$- \int_{t_q^\circ}^{t_q'} \int_{t_{q-1}^\circ}^{t_{q-1}'} \int_{t_{q-2}^\circ}^{t_{q-2}'} \int_{t_{q-3}^\circ}^{t_{q-3}'} \ldots$$

$$\ldots \int_{t_1^\circ}^{t_1'} (\varphi_q \delta t_q + \sum_r k_{r,q} \delta x_r) dt_1 \ldots dt_{q-3} \frac{dt_{q-2}}{dt_q} dt_{q-1} dt_q$$

$$- \ldots - \int_{t_q^0}^{t_q'} \ldots \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} (q_q \delta t_q + \sum_r k_{r,q} \delta x_r) \frac{dt_1}{dt_q} dt_2 \ldots dt_q \Big\} \Big).$$

Für q sind alle Werthe von 1 bis n zu setzen. Der Ausdruck q_q entsteht, indem man in 3) für dt_q schreibt $d\delta t_q$ und theilweise integrirt, mit Hinweglassung des $n$fachen Integrals, welches nicht zu A gehört. Aus der in 3) enthaltenen Summe fallen dann die Glieder weg, wo $p=q$ ist, da dt_p nicht vorkommt, sondern $dt_p(x_r)$. Es ist also:

$$q_q = F + \sum_{r,p} k_{r,p} \frac{dx_r}{dt_p} - \sum_r k_{r,q} \frac{dx_r}{dt_q}.$$

Da aber in 4) $f_s = 0$ ist, so erhält man mit Berücksichtigung der Gleichungen 2):

7) $$q_q = f - \sum_r k_{r,q}\, x_{(r,q)}.$$

Da für q alle Werthe von $q=1$ bis $q=n$ zu setzen sind, so erhält man eine Reihe von $n-1$fachen Integralen, die soweit als möglich zu vereinigen sind.

In speciellen Fällen ist der Ausdruck A auch noch mancher Vereinfachung fähig. Da man nämlich hat:

$$dt_q \delta x_r = \delta(x_{(r,q)} dt_q) = x_{(r,q)}\, d\delta t_q - dt_q \delta x_{(r,q)},$$

so kann man setzen:

$$\delta x_{(r,q)} = x_{(r,q)} \frac{d\delta t_q}{dt_q} = \frac{d\delta x_r}{dt_q}.$$

Setzt man dies ein, so wird ein Theil der Ausdrücke in A wieder theilweiser Integration fähig, man erhält $n-2$fache Integrale u. s. w. Mittels der Bedingungsgleichung und deren, welche für die Grenzwerthe gelten, sind dann soviel als möglich von den δt und δx wegzuschaffen, die übrigen sind dann unabhängig von einander, also falls die Variation verschwinden soll, ihre Coefficienten einzeln gleich Null. Sehr leicht sind aber die Ausdrücke B_q und C_q zu bilden. Man erhält sogleich:

$$B_q = \frac{\partial F}{\partial t_q} - \frac{d}{dt_q}\left\{F + \sum_{r,p} k_{r,p} \frac{dx_r}{dt_p} - \sum_r k_{r,q} \frac{dx_r}{dt_q}\right\},$$

also wenn man den Werth von F und die Gleichungen 1) und 2) berücksichtigt:

8) $$B_q = \frac{\partial f}{\partial t_q} + \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial t_q} - \frac{d}{dt_q}(f - \sum_r k_{r,q}\, x_{(r,q)}).$$

Ebenso erhält man:

9) $$C_q = \frac{\partial f}{\partial x_q} + \sum_s \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_q} - k_{\alpha,\beta} - \sum_p \frac{dx_{q,p}}{dt_p},$$

wo $(\alpha, \beta) = q$ ist. Denn da die Grössen $x_{\alpha,\beta}$ in den Gleichungen 2) unter die Anzahl der x gehören, so wird, wenn q gross genug ist, $(\alpha, \beta) = q$ sein können. Ist dies nicht der Fall, so setzt man $k_{\alpha,\beta} = 0$.

Wenn die Variation verschwinden soll, so werden alle C_q einzeln gleich Null, denn die δx sind entweder alle willkürliche Functionen der t, oder mit Ausnahme derjenigen, welche man durch die Bedingungsgleichungen bestimmt, und deren Coefficienten sind zur Bestimmung der k und λ gleich Null zu setzen, wie dies für einfache Integrale ausgeführt ist. — Sehr aber würde man irren, wenn man

wie bei einfachen Integralen auch die B_q einzeln gleich Null setzen und glauben wollte, dass dies eine identische Folge des Verschwindens der C_q wäre. In der That sind nicht die δt völlig willkürlich, in welchem Falle das Verschwinden des ganzen Integrals auch nöthig machte, dass ihre Coefficienten Null wären. Es tritt vielmehr die Bedingung hinzu, dass die t von einander unabhängig sind, mithin auch δt_q von $t_1, t_2 \ldots t_{q-1}, t_{q+1} \ldots t_n$ unabhängig ist. Damit nun das Integral verschwinde, darf schliesslich kein mit δt_q multiplicirtes Glied vorkommen, ausgenommen für die Grenzwerthe von t_q, wo ja die t mit einander durch Gleichungen verbunden sein können. Diese Bedingung aber ist erfüllt, und auch nur dann erfüllt, wenn man hat:

$$B_q = \frac{d\alpha_1}{dt_1} + \frac{d\alpha_2}{dt_2} + \ldots + \frac{d\alpha_{q-1}}{dt_{q-1}} + \frac{d\alpha_{q+1}}{dt_{q+1}} + \ldots + \frac{d\alpha_n}{dt_n}.$$

In diesem Falle nämlich, da δt_q von den t mit Ausnahme von t_q unabhängig ist, kann man integriren, und man erhält mit Anwendung der Formel II), wo man $\varrho = 1$ setzt, eine Anzahl $n-1$ facher Integrale, die mit dem Ausdrucke A zu vereinigen sind.

7) Anwendung auf die Theorie des Grössten und Kleinsten.

Diese etwas abstracten Betrachtungen sind leicht durch Beispiele zu erläutern. Nehmen wir ein Doppelintegral, also $n=2$, komme nur eine abhängige Variable x, keinerlei Bedingungsgleichungen 1), und nur die ersten Differenzialquotienten vor, also $\frac{dx}{dt_1} = x_1$, $\frac{dx}{dt_2} = x_2$. Dann hat man $x_{0,1} = x_1$, $x_{0,2} = x_2$. Setzen wir auch k_1, k_2 für $k_{0,1}$ und $k_{0,2}$. Die Gleichungen 9) und 8) werden:

1) $$C_0 = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{dk_1}{dt_1} - \frac{dk_2}{dt_2}, \quad C_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1} - k_1, \quad C_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2} - k_2,$$

$$B_1 = \frac{\partial f}{\partial t_1} - \frac{d}{dt_1}(f - k_1 x_1), \quad B_2 = \frac{\partial f}{\partial t_2} - \frac{d}{dt_2}(f - k_2 x_2).$$

Werden $C_0 = C_1 = C_2 = 0$, findet also ein Maximum oder Minimum statt, so ist gleichzeitig als identische Folge:

$$B_1 = \frac{d\alpha_1}{dt_2}, \quad B_2 = \frac{d\alpha_2}{dt_1}.$$

In der That hat man:

$$B_1 = -\frac{\partial f}{\partial x} x_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt_1} + k_1 \frac{dx_1}{dt_1} + x_1 \frac{dk_1}{dt_1},$$

aber:

$$k_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad k_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dk_1}{dt_1} + \frac{dk_2}{dt_2},$$

also:

$$B_1 = -\frac{dx_2}{dt_2}\frac{dx}{dt_1} - k_2 \frac{d^2 x}{dt_1\, dt_2} = -\frac{d(x_1 k_2)}{dt_2},$$

also:

$$\alpha_1 = -x_1 k_2, \quad \alpha_2 = -x_2 k_1.$$

Der Ausdruck:

$$\iint \frac{d\alpha_1}{dt_2} \delta t\, dt_1\, dt_2 + \iint \frac{d\alpha_2}{dt_1} \delta t_2\, dt_1\, dt_2$$

$$= \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} \alpha_1 \delta t_1\, dt_1 - \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} \alpha_1 \delta t_1 \frac{dt_1}{dt_2} + \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} \alpha_2 \delta t_2\, dt_2$$

kommt zu dem Ausdrucke A hinzu. Sei A_1 die Summe beider, so ist:

$$A_1=\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}\left[\left(\varphi_1+x_1 k_2\frac{dt_1}{dt_2}\right)\delta t_1-x_2 k_1\,\delta t_2+k_1\,\delta x\right]dt_2$$
$$+\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}(\varphi_2\,\delta t_2-x_1 k_2\,\delta t_1+k_2\,\delta x)\,dt_1$$
$$-\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}(\varphi_2\,\delta t_2+k_2\,\delta x)\frac{dt_1}{dt_2}\,dt_2.$$

Man hat nämlich für $q=1$ einen, für $q=2$ zwei Theile, wozu die obigen Integrale hinzugefügt sind. Ferner ist:

$$\varphi_1=f-k_1 x_1,\qquad \varphi_2=f-k_2 x_2,$$

also:

2) $$A_1=\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}(-x_1 k_2\,\delta t_1+(f-k_2 x_2)\,\delta t_2+k_2\,\delta x)\,dt_1$$
$$+\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}\left[\left(f-k_1 x_1+k_2 x_1\frac{dt_1}{dt_2}\right)\delta t_1-\left(x_2 k_1+(f-k_2 x_2)\frac{dt_1}{dt_2}\right)\delta t_2\right.$$
$$\left.+\left(k_1-k_2\frac{dt_1}{dt_2}\right)\delta x\right]dt_2.$$

Beispiel I. Es ist die Oberfläche zu bestimmen, auf welcher der Ausdruck $\iint P^m\,dt_1\,dt_2$ ein Maximum oder Minimum ist.

m sei positiv, x, t_1, t_2 sollen rechtwinklige Coordinaten sein, P das Stück der Axe der x, welches zwischen dem Anfangspunkt und der durch Punkt x, t_1, t_2 gehenden Tangentialebene liegt. Man hat also:

$$P=x-x_1 t_1-x_2 t_2,\quad f=P^m.$$

Die Gleichungen 1) geben:

$$k_1=-m P^{m-1}t_1,\quad k_2=-m P^{m-1}t_2,$$
$$P^{m-2}\left(3m P+m(m+1)t_1\frac{\partial P}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial P}{\partial t_2}\right)=0.$$

Diese Gleichung wird zunächst erfüllt wenn $P=0$, d. h.:

$$t=t_1\frac{\partial x}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial x}{\partial t_2}$$

ist. Diese leicht zu integrirende Gleichung gibt einen Kegel, dessen Scheitel der Anfangspunkt ist.

Sehen wir von dieser Lösung ab, so bleibt noch:

$$\frac{3P}{m-1}+t_1\frac{\partial P}{\partial t_1}+t_2\frac{\partial P}{\partial t_2}=0.$$

Durch Integration erhält man:

$$P=t_1^{\frac{3}{1-m}}\varphi\left(\frac{t_2}{t_1}\right),$$

oder:

$$x-t_1\frac{\partial x}{\partial t_1}-t_2\frac{\partial x}{\partial t_2}=t_1^{\frac{3}{1-m}}\varphi\left(\frac{t_2}{t_1}\right),$$

und abermals integrirt:

$$x_1=t_1\psi\left(\frac{t_2}{t_1}\right)+t_1^{\frac{3}{1-m}}\varphi\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

Es ist hier φ für $\frac{m-1}{m-2}\varphi$ gesetzt. — Ist die Begrenzung gegeben, so lassen sich aus ihr φ und ψ bestimmen.

Sei jetzt aber nur die Projection der Begrenzung auf die Ebene $t_1\, t_2$ fest. Es sind dann $\delta t_1 = \delta t_2 = 0$, also in diesem Falle:

$$A_1 = \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} k_2\, \delta x\, dt_1 + \int_{t_2^0}^{t_2'} \int_{t_1^0}^{t_1'} \left(k_1 - k_2 \frac{dt_1}{dt_2}\right) \delta x\, dt_2.$$

Es ist also wegen des letzten Theils:

3) $$k_1\, dt_2 - k_2\, dt_1 = 0,$$

oder:

$$P^m (t_1\, dt_2 - t_2\, dt_1) = 0,$$

für die Werthe:

$$t_1 = \vartheta_0 (t_2), \qquad t_1 = \vartheta_1 (t_2),$$

welche auf der Begrenzung, d. h. für $t_1 = t_1$ und $= t_1'$ stattfinden mögen. Damit dies stattfinde, muss sein:

$$\vartheta_0 (t_2) = t_2 (\vartheta_0') t_2, \qquad \vartheta_1 (t_2) = t_2\, \vartheta_1' (t_2),$$

d. h.:

$$t_1^0 = \alpha\, t_2, \qquad t_2^0 = \beta\, t_2.$$

Die Begrenzung müssen zwei Grade sein, die durch den Anfangspunkt gehen. In jedem andern Falle ist $P = 0$, also $\varphi = 0$, d. h.:

$$x_1 = t_1\, \psi\left(\frac{t_2}{t_1}\right).$$

Eas erste Integral in A_1 gibt nichts Weiteres. Dasselbe drückt aus, dass $k_2 = 0$ ist für alle Werthe von t_1 zwischen t_1^0 und t_1', welche $t_2 = t_2^0$ und $t_2 = t_2'$ entsprechen, also auf zwei graden Linien, parallel der Axe t_1. Da hier $\frac{dt_2}{dt_1} = 0$ ist, so ist diese Gleichung in $k_1\, dt_2 - k_2\, dt_1$ mit inbegriffen.

Setzen wir aber fest, die Grenzen befänden sich auf gewissen Oberflächen. Von dem ersten Theile in A_1 ist dann ganz abzusehen, da dieser Ausdruck nur vorhanden ist, wenn ein Theil der Begrenzung nur zur Projection auf die Ebene $t_1\, t_2$ der Axe t_1 parallele grade Linien hat. Ist dies nicht der Fall, so ist $t_2^0 = t_1^0$, und der Ausdruck fällt ganz weg.

Sei auf einer der Oberflächen: $\frac{\partial x}{\partial t_1} = p_1$, $\frac{\partial x}{\partial t_2} = p_2$, so hat man:

$$\delta x = p_1\, \delta t_1 + p_2\, \delta t_2.$$

Dies setzt man in den zweiten Theil von A_1 ein, wo dann δx nicht mehr vorkommt. Für den Theil der Begrenzung, welcher auf dieser Oberfläche liegt, sind dann die Coefficienten von δt_1 und δt_2 einzeln gleich Null zu setzen. Aus beiden Gleichungen kann man dann $\frac{dt_1}{dt_2}$ climiniren, und erhält:

4) $$f + k_1 (p_1 - x_1) + k_2 (q_2 - x_2) = 0$$

Es ist zu bemerken, dass auch der erste Theil von A_1 in diese Betrachtung eingeschlossen ist; er entspricht nämlich dem Falle, wo $\frac{dt_2}{dt_1} = 0$, wie dies ja für diesen Ausdruck der Fall ist.

Die Gleichung 3) wird in unserm Beispiele:

$$P^{m-1} [P + m\, t_1 (x_1 - p_1) + m\, t_2 (x_2 - p_2)] = 0,$$

also entweder $P = 0$, was auf die Kegelfläche zurückführt, oder:

$$\frac{x - x_1\, t_1 - x_2\, t_2}{x - p_1\, t_1 - p_2\, t_2} = \frac{m}{m-1}.$$

Diese Gleichung lehrt, dass wenn man in den Schnittlinien Tangentialebenen an die gesuchte und an die Grenzfläche legt, die Stücke der z-Axe, welche zwischen dem Anfangspunkt und einer dieser Flächen liegen, das constante Verhältniss $\frac{m}{m-1}$ haben.

Beispiel II. Diejenige Oberfläche zu bestimmen, deren Flächeninhalt in gewissen Grenzen ein Minimum ist.

Der Inhalt ist:

$$U=\int_{t_2^0}^{t_2'}\int_{t_1^0}^{t_1'}\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}\,dt_1\,dt_2,$$

also:

$$f=\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=0,\quad k_1=\frac{x_1}{f},\quad k_2=\frac{x_2}{f},$$

$$\frac{d}{dt_2}\left(\frac{x_1}{f}\right)+\frac{d}{dt_1}\left(\frac{x_2}{f}\right)=0,$$

d. h.

$$(1+x_1^2)\frac{\partial x_2}{\partial t_2}-2x_1x_2\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+(1+x_2^2)\frac{\partial x_1}{\partial t_1}=0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Summe der beiden Krümmungen in jedem Punkte gleich Null ist. Sie ist integrirt in dem Artikel: Quadraturen — Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf —. Wir geben hier jedoch eine andere Auflösung nach Bonnet.

Möge die Normale der Fläche die Winkel λ, μ, ν mit den Axen machen. Lege man parallel der Axe x eine Ebene durch die Normale, welche mit der Ebene t_2x den Winkel ξ mache, sei ferner $\eta=\lg\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}$. Betrachten wir ξ und η als Coordinaten, so ist:

$$\sin\nu=\frac{1}{\cos i\eta},\quad \cos\nu=i\operatorname{tg}i\eta,\quad i=\sqrt{-1},$$

$$\cos\lambda=\sin\nu\cos\xi=\frac{\cos\xi}{\cos i\eta},$$

$$\cos\mu=\sin\nu\sin\xi=\frac{\sin\xi}{\cos i\eta},$$

und unsere Gleichung nimmt die Form an:

$$\frac{\partial\frac{\cos\xi}{\cos i\eta}}{\partial t_2}+\frac{\partial\frac{\sin\xi}{\cos i\eta}}{\partial t_1}=0,$$

oder:

$$\text{A)}\qquad -\sin\xi\frac{\partial\xi}{\partial t_2}+\cos\xi\frac{\partial\xi}{\partial t_1}+i\operatorname{tg}i\eta\left(\cos\xi\frac{\partial\eta}{\partial t_2}+\sin\xi\frac{\partial\eta}{\partial t_1}\right)=0.$$

Die Gleichung der Tangentialebene ist:

$$t_2\cos\lambda+t_1\cos\mu+x\cos\nu=\varrho,$$

wo ϱ die Entfernung der Tangentialebene vom Anfangspunkt ist; also:

$$t_2\cos\xi+t_1\sin\xi+x\,i\sin i\eta=\varrho\cos i\eta.$$

Jeder Punkt t_2, t_1, x der Oberfläche kann nun als Schnittpunkt dreier unendlich naher Tangentialebenen betrachtet werden. Er muss also die letzte Gleichung erfüllen, wenn man dieselbe nach ξ und nach η differenziirt, t_1, t_2, x aber constant denkt. Also wenn man:

$$\varrho\cos i\eta=-\zeta$$

setzt:

$$t_2 \cos\xi + t_1 \sin\xi + x i \sin i\eta = -\zeta,$$
$$t_2 \sin\xi - t_1 \cos\xi = \frac{\partial\zeta}{\partial\xi},$$
$$x \cos i\eta = \frac{\partial\zeta}{\partial\eta}.$$

Diese Gleichungen geben t_1, t_2, x. Differenziirt man sie gleichzeitig nach diesen Grössen und nach ξ, η, ζ, so kommt:

B) $$dt_2 \cos\xi + dt_1 \sin\xi = -i \operatorname{tg} i\eta (v\, d\xi + w\, d\eta),$$
$$dt_2 \sin\xi - dt_1 \cos\xi = u\, d\xi + v\, d\eta,$$
$$dx \cos i\eta = v\, d\xi + w\, d\eta,$$

wo gesetzt ist:

$$u = \zeta + i \operatorname{tg} i\eta \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}, \quad v = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\,\partial\eta}, \quad w = i \operatorname{tg} i\eta \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}.$$

Wenn man nach einander dt_1 und dt_2 gleich Null setzt, erhält man die partiellen Differenzialquotienten von ξ und η nach t_1 und t_2, und diese in die Gleichung A) setzend, hat man:

$$u + w = 0.$$

Aber die letzte der Gleichungen B) gibt:

$$v = \frac{\partial x}{\partial\xi} \cos i\eta, \quad w = \frac{\partial x}{\partial\eta} \cos i\eta.$$

Wegen der Werthe von u, v, w aber ist:

$$\frac{\partial u}{\partial\eta} = i \operatorname{tg} i\eta \left(i \operatorname{tg} i\eta \frac{\partial\zeta}{\partial\eta} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} \right) + \frac{\partial^3\zeta}{\partial\xi^2\,\partial\eta} = \frac{\partial v}{\partial\xi} + w\, i \operatorname{tg} i\eta = \frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} \cos i\eta + \frac{\partial x}{\partial\eta} i \sin i\eta.$$

Die Gleichung $u + w = 0$ nach η differenziirt, gibt also:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial\eta^2} = 0,$$

und für diese Gleichung ergibt sich bekanntlich das Integral:

$$x = \varphi(\xi + i\eta) + \psi(\xi - i\eta).$$

Uebrigens ist dies Integral allgemeiner als die gegebene Gleichung. Man muss daher noch setzen:

$$\zeta = \int x \cos i\eta\, d\eta,$$

und die durch diese Integration eingeführte willkürliche Function von ξ so bestimmen, dass $u + w = 0$ wird.

Sei z. B:

$$\varphi(\alpha) = \tfrac{1}{2}(a - i b)\alpha, \qquad \psi(\alpha) = \tfrac{1}{2}(a + i b)\alpha,$$

so ist:

$$x = a\xi + b\eta, \quad \zeta = \int (a\xi + b\eta) \cos i\eta + d\eta = -(a\xi + b\eta) i \sin i\eta - b \cos i\eta + \chi,$$

χ ist eine willkürliche Function von ξ.

$$u = -b \cos i\eta + \chi'' + \chi, \qquad w = b \cos i\eta,$$
$$u + w = \chi'' + \chi = 0, \qquad \chi = c \cos\xi + c_1 \sin\xi.$$

Setzen wir $c = c_1 = 0$, so ist:

$$\zeta = -(a\xi + b\eta) i \sin i\eta - b \cos i\eta,$$

also hat man:

$$t_1 = b \cos i\eta \sin\xi + a i \sin i\eta \cos\xi,$$
$$t_2 = b \cos i\eta \cos\xi - a i \sin i\eta \sin\xi,$$
$$x = a\xi + b\eta.$$

Bei Einführung von Polarcoordinaten:

$$t_1 = r \sin \vartheta, \qquad t_2 = r \cos \vartheta,$$
$$r \cos(\vartheta - \xi) = b \cos i \eta, \qquad r \sin(\vartheta - \xi) = a i \sin i \eta,$$
$$x = a\xi + b\eta.$$

Für $a=0$ hat man:

$$r = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

Es ist die durch eine Kettenlinie gebildete Umdrehungsfläche für $b=0$:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{a}.$$

Im allgemeinen Falle erhält man durch Elimination von ξ und η:

$$x - a\vartheta = a \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{r^2-b^2}{r^2+a^2}} + b \lg \frac{\sqrt{(r^2+a^2)} + \sqrt{(r^2-b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Ist die Projection der Begrenzung auf die Ebene $t_2\,t_1$ gegeben, also nach Gleichung 3):

$$k_1\,dt_2 - k_2\,dt_1 = 0,$$

oder:

$$x_1\,dt_2 - x_2\,dt_1 = 0,$$

d. h. die gesuchte Fläche schneidet unter einem rechten Winkel denjenigen Cylinder, welcher die Begrenzung auf die Ebene $t_2\,t_1$ projicirt.

Die Ebene, deren Gleichung $x=0$ ist, erfüllt diese Bedingung und zugleich die Minimumgleichung. Selbstverständlich ist dies die einzige Lösung.

Sei die Begrenzung auf gewissen Oberflächen, so gibt Gleichung 4):

$$1 + x_1 p_1 + x_2 p_2 = 0,$$

d. h. diese Grenzflächen werden von der gesuchten unter einem rechten Winkel geschnitten.

Wir beschränken aber jetzt dadurch die Aufgabe, dass wir diejenige Oberfläche suchen, die von allen, welche dasselbe körperliche Volumen einschliessen, den kleinsten Inhalt haben soll.

Es kommt hier die Bedingung hinzu, dass $\iint x\,dt_1\,dt_2$ constant ist, also:

$$f = a\sqrt{(1 + x_1^2 + x_2^2)} - x,$$

wo a ein constanter Factor ist. Wir erhalten:

$$k_1 = \frac{a x_1}{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}}, \qquad k_2 = \frac{a x_2}{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}},$$

und die Gleichung $C_0 = 0$ gibt:

$$(1+x_1^2)\frac{\partial x_2}{\partial t_2} - 2 x_1 x_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + (1+x_2^2)\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{t}{a}(1+x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Summe der Krümmungen constant ist.

Beispiel III. Diejenige Oberfläche bei gegebenem Inhalt zu bestimmen, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt.

Die Axe der x sei in der Richtung der Schwere, so ist der Inhalt:

$$\zeta = \iint \sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}\,dt_1\,dt_2,$$

und die Ordinate des Schwerpunktes:

$$\frac{1}{\zeta}\iint x\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}\,dt_1\,dt_2,$$

also:

$$f = (x-a)\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)},$$

wo a constant ist:

$$k_1 = \frac{(x-a)\,x_1}{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}}, \quad k_2 = \frac{(x-a)\,x_2}{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}}.$$

Die Differenzialgleichung ist:

$$1+x_1^2+x_2^2 = (x-a)\left[(1+x_1^2)\frac{\partial x_2}{\partial t_2} - 2\,x_1 x_2 \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + (1+x_1^2)\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right].$$

Diese Gleichung drückt aus, dass die Summe der Krümmungen gleich:

$$\frac{1}{(x-a)\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)}},$$

d. h. dass der mittlere Krümmungsradius doppelt so gross ist, als die Normale verlängert bis zu einer gegebenen Horizontalebene, deren Gleichung $z=a$ ist.

Ist nur die Projection der Begrenzung oder die Oberflächen, auf welchen sie sich befindet, gegeben, so findet Gleiches wie im vorigen Beispiele statt.

8) Historisches.

Die Erfindung der Variationsrechnung theilen Johann Bernoulli, Euler und Lagrange. Bernoulli stellte 1696 die erste hierher gehörige Aufgabe, die der Brachystochrone, und löste sie wie auch andere Mathematiker. Ihre Methode bestand darin, die Curve als ein Vieleck von unendlich viel Seiten zu betrachten, und auch das gewöhnliche Verfahren der Differenzialrechnung, dass nämlich die Differenzialquotienten nach allen Variablen verschwinden, auf unendlich viel Variable anzuwenden.

Euler gab zuerst eine allgemeine Methode für dergleichen Probleme, eine algorithmische Form verlieh ihr Lagrange. Um die Anwendung auf mehrfache Integrale haben sich namentlich Gauss und Poisson verdient gemacht. Sarrus brachte die Grenzbedingungen auf einfachere Formen durch Einführung des auch hier angewandten Substitutionszeichens. Die Theorie der Criterien rührt von Legendre her. Er führt sie auf die Betrachtung einer neuen Differenzialgleichung zurück, deren Lösung er jedoch — irriger Weise, wie Lagrange gezeigt hat — nicht verlangt, Jakobi hat gezeigt, dass diese Gleichungen ersetzt werden können durch die schon bekannten Integrale, welche das Verschwinden der ersten Variation gibt. Jakobi hat seinen Beweis (Crelle, Bd. 17) nur angedeutet, ausgeführt haben denselben andere Mathematiker, z. B. Hesse (Crelle, Bd. 54). Bei der Darstellung dieser Theorie (sowie bei den gegebenen Beispielen) ist von uns benutzt: „*Calcul de Variation par Moigno et Lindelöf. Paris* 1861.“

Noch erwähnen wir der Zurückführung der Maxima und Minima einfacher Integrale auf eine partielle Differenzialgleichung, einer Erweiterung, welche Jakobi der Hamilton'schen Theorie gegeben hat. Sie ist hier ebenfalls auseinandergesetzt.

Vat (Messkunde).

Niederländisches Hohlmaass, gleich 1 Hectoliter.

Ventil (Maschinenlehre).

Ein Verschluss, welcher zwei Räume A und B derart von einander trennt, dass zwar von A nach B, nicht aber von B nach A Flüssigkeit oder Luft entweichen kann. — Man unterscheidet Klappenventile, in einer nach einer Seite sich öffnenden Klappe bestehend, Kegelventile, abgestumpfte Kegel in kegelförmigem Gehäuse, welche vom Drucke nach der grössern Grundfläche zu gehoben werden können, nicht aber umgekehrt; zu ihnen gehören auch die Muschelventile, welche cylindrisch mit kegelförmigem Rande sind. Kugelventile, wo massive Kugeln in einem hohlkugelförmigen Absatze des zu verschliessenden Raumes enthalten sind. Ueberdruck hebt sie und gestattet der Flüssigkeit, durch die in obigen Raume enthaltenen Seitenöffnungen zu entweichen.

Scheibenventile sind platte Scheiben, welche den Oeffnungen des zu verschliessenden Raumes als Deckel dienen und durch Ueberdruck gehoben werden. Siehe auch die Artikel: Saugepumpe, Dampfmaschine.

Ventilation (angewandte Wärmelehre).

Mit dem Ausdrucke Ventilation kann man jede Fortschaffung der Luft von einem Punkte A zum andern B bezeichnen. Es geschieht dies auf zweierlei Arten, entweder indem man der Luft in A durch Zuführung von Wärme eine grössere Expansivkraft gibt, oder durch mechanische Verdichtung der Luft in A, bezüglich Verdünnung der in B. Dieses letztere Mittel liegt den Gebläsen (Ventilatoren) zu Grunde (vergleiche den be-

treffenden Artikel). Hier soll nur von dem ersteren die Rede sein.

Denke man sich eine gebogene Röhre mit zwei Oeffnungen A und B von ungleicher Höhe. Sei h die Höhendifferenz, t die Temperatur in B, t_1 die in A, v die Geschwindigkeit des Ausströmens, so hat man:

$$v = \sqrt{\pm \frac{\delta(t_1 - t)}{1+\delta t} 2gh},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem t_1 oder t grösser ist. Es ist hier zu setzen:

$$\delta = 0{,}00367.$$

(Vergleiche den Artikel: Wärme.) Hierbei ist auf die Widerstände jedoch keine Rücksicht genommen.

Sei l die Länge der ganzen Leitung, d ihre mittlere Weite, $\zeta = 0{,}024$ der Reibungscoefficient der Luft, ζ_1 die Summe aller übrigen Widerstandscoefficienten, so ist:

$$v = \sqrt{\frac{\delta(t_1 - t)}{1+\delta t} \frac{2gh}{1+\zeta \frac{l}{d} + \zeta_1}},$$

oder wenn man δt gegen 1 vernachlässigt:

$$v = 0{,}479 \sqrt{\frac{(t_1 - t)h}{1+0{,}024 \frac{l}{d} + \zeta_1}}.$$

Ist F der Röhrenquerschnitt, so ist die in einer Secunde durchströmende Luftmenge:

$$Q_1 = Fv.$$

Ist Q dies Quantum, auf die Dichtigkeit der äussern Luft reducirt, also:

$$Q = \frac{1+\delta t}{1+\delta t_1} Q_1,$$

oder annähernd:

$$Q = [1 - \delta(t_1 - t)]\, Q_1,$$

so kommt:

$$Q = 0{,}06058\, F\, [1 - 0{,}00367\,(t_1 - \tfrac{1}{2} t)] \cdot \sqrt{\frac{(t_1 - t)2gh}{1+0{,}024 \frac{l}{d} + \zeta_1}}.$$

Wenn aber, wie gewöhnlich, $t_1 - \frac{1}{2} t$ nur klein ist, so kann man setzen:

$$Q = Q_1 = 0{,}479\, F \sqrt{\frac{(t_1 - t)h}{1+0{,}024 \frac{l}{d} + \zeta_1}}.$$

Hieraus folgt auch, wenn die Luftmenge gegeben ist:

$$F = 2{,}088\, Q. \sqrt{\frac{1+0{,}024 \frac{l}{d} + \zeta_1}{(t_1 - t)h}}.$$

Sei jetzt F_1 der Querschnitt der Ausmündung, $\alpha = 0{,}60$ der Contractionscoefficient, so ist:

1) $$\zeta_1 = \left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

wenn die Luft durch eine Mündung in der dünnen Wand, etwa eine Thür, geht. Dagegen:

$$\zeta_1 = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^2 = 0{,}44,$$

oder nach der Erfahrung:

2) $$\zeta_1 = 0{,}50,$$

wenn die Luft in eine engere Leitung tritt, also $F = F_1$ ist. Ferner für den Eintritt in einen weiteren Canal:

3) $$\zeta_1 = \left(\frac{F}{F_1} - 1\right)^2,$$

wo F_1 sich auf den engern bezieht. Ist hierbei v die Geschwindigkeit der Luft in der engern, v_1 in der weitern Röhre, h_1 die Widerstandshöhe, so hat man:

$$h_1 = \frac{\zeta_1 v^2}{2g}, \quad \frac{v_1}{v} = \frac{F}{F_1}.$$

Für kleine Werthe von $\frac{F_1}{F}$ ist also:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}.$$

Bei Durchgang durch ein rechtwinkliges Knie kann man setzen:

4) $$\zeta_1 = 1, \quad h_1 = \frac{v^2}{2g}.$$

Für ein stumpfes Knie ist ζ_1 kleiner, für ein spitzes grösser. Ist der Ausmündungsquerschnitt F_1 von dem Querschnitt F der Leitung verschieden, die Ausströmungsgeschwindigkeit v_1, v die in der Leitung, so ist:

$$vF = \alpha F_1 v_1, \quad \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{\alpha F_1}{F}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g},$$

und da die Widerstände diesem letztern Ausdruck proportional sind:

$$v_1 = 0{,}479 \sqrt{\frac{(t_1 - t)h}{1+\left(\zeta \frac{l}{d} + \zeta_1\right)\left(\frac{\alpha F_1}{F}\right)^2}},$$

die in der Secunde ausströmende Luftmenge:

$$Q = \alpha F_1 v_1.$$

Sind zwei Röhren von den Temperaturen t_1 und t_2, den Höhen h_1 und h_2 verbunden mit einer dritten, deren Temperatur t ist, so ersetzt man $(t_1 - t)h$ durch $(t_2 - t)h_2 + (t_1 - t)h$ in diesen Formeln.

Beispiel.

Ein Zimmer von $h_1 = 20$ Fuss Höhe communicire durch eine Bodenöffnung von 24 □″, und eine senkrechte Röhre von $d = 6''$ Weite, $h_2 = 36'$ Länge mit der äussern Luft. Temperatur des Zimmers $t_1 = 20°$, der Röhre $t_2 = 25°$, äussere Lufttemperatur $t = 10°$. Welches Luftquantum wird in dem Zimmer stündlich circuliren?

Man hat:

$$(t_1 - t)h_1 + (t_2 - t_1)h_2 = 740, \qquad F = 24,$$

$$F_1 = \frac{36\pi}{4} = 28{,}274 \text{ (beides Quadratzoll)},$$

$$v = \frac{F_1}{F} v_1 = 1{,}178 v_1,$$

$$\frac{v^2}{2g} = 1{,}388 \frac{v^2}{2g}.$$

Ist $\zeta_1 = 0{,}5$ für die Oeffnung, so kommt die Druckhöhe für die Einführung:

$$1{,}5 \cdot 1{,}388 \frac{v_1^2}{2g} = 2{,}08 \frac{v_1^2}{2g}.$$

Sei $\zeta = 0{,}032$, so ist die Druckhöhe für die Abführung:

$$\left(1 + \zeta_1 + \zeta \frac{l}{d}\right) \frac{v_1^2}{2g} = 3{,}80 \frac{v_1^2}{2g},$$

$$v_1 = 0{,}479 \sqrt{\frac{740}{2{,}08 + 3{,}80}} = 5{,}437',$$

$$F_1 = \frac{28{,}274}{144} = 0{,}1963 \,\square',$$

$$Q_1 = F_1 v_1 = 5{,}437 \cdot 0{,}1963 = 1{,}055,$$

die stündliche Menge $= 3600\, Q = 3798$ Kubikfuss.

Jeder Mensch braucht etwa 200 Kubikfuss frische Luft. Das Zimmer eignet sich also etwa für 19 Personen.

In Schachten und Gruben bewirkt der Unterschied der Luftwärme unten und oben eine Ventilation. Hat man zwei Tageöffnungen von ungleicher Höhe, A tiefer als B, so tritt, da in der Tiefe im Sommer kühlere Temperatur, im Winter wärmere stattfindet, in ersterer Jahreszeit ein Strömen von B nach A, in letzterer in umgekehrter Richtung ein. Künstliche Ventilation durch Oefen muss eintreten, wenn der Höhenunterschied nicht hinreichend ist.

Ventilator (Maschinenlehre).

Siehe Gebläse.

Ventilhahn (Maschinenlehre).

Ein doppelspitziges Kugelventil, das man bei Saugepumpen anwendet (siehe den Artikel: Saugepumpe).

Ventilkolben (Maschinenlehre).

Ein durchlöcherter Kolben, wird bei Pumpen gebraucht (vergleiche den Artikel: Saugepumpe).

Ventilsteuerung (Maschinenlehre).

Eine der gewöhnlichsten bei Dampfmaschinen gebräuchlichen Steuerungen (vergleiche den Artikel: Dampfmachine).

Venus (Astronomie).

Von den Hauptplaneten derjenige, welcher der Erde am nächsten ist, daher das hellste und schönste Gestirn am Himmel (Sonne und Mond natürlich ausgenommen). Sie entfernt sich am Himmel bis auf 48° von der Sonne, ist daher nie um Mitternacht, wohl aber bald am Morgen-, bald am Abendhimmel sichtbar, oft so hell, dass sie einen Schlagschatten wirft. Aus Beobachtung von Flecken hat man eine Axendrehung ermittelt. Schon Dominiko Cassini (1668) legte ihr eine solche von etwa 24 Stunden bei, aber Bianchi (1726) behauptete, dass sie eine Rotationszeit von 24 Tagen 8 Stunden habe. Seit Vico, der in Rom 1840—42 schöne Versuche hierüber machte, ist Cassini's Ansicht bestätigt. Die Rotationszeit der Venus beträgt etwa 23½ Stunden, und wie in allen übrigen Verhältnissen zeigt sich also auch hier eine höchst merkwürdige Aehnlichkeit mit der Erde. Auch eine Atmosphäre kommt ihr zu. Als unterer Planet muss Venus Phasen haben, die aber nie bei Nacht das volle Gestirn zeigen können, weil um die Zeit desselben die gradlinige Stellung am Himmel entweder sein muss: Erde, Venus, Sonne, oder: Erde, Sonne, Venus, also Venus und Sonne gleichzeitig auf- und untergehen. Die Phasen entdeckte Galilei (1610) mit dem nach ihm benannten Fernrohr. Er verbarg seine Erfindung in dem veröffentlichten Satze: „*Haec immatura a me jam frustra leguntur. O. Y.*" Diese an sich keinen verständlichen Sinn gebenden Worte bilden nämlich ein Anagramm des folgenden: „*Cynthiae figuras emulatur mater amorum.*" — Die Mutter der Liebe ahmt die Gestalt der Mondgöttin nach.

Wenn Venus genau zwischen Erde und Sonne steht, so kann sie als schwarzer Fleck (man behauptet, selbst mit blossem Auge) auf der Sonne gesehen werden. Höchst wichtig sind diese Venusdurchgänge für die Bestimmung der Sonnenparallaxe (vergleiche den Artikel: Parallaxe). 1761 und 1769 wurden diese Durchgänge in der That zu diesem Zwecke benutzt.

Venus hat, soviel man bis jetzt weiss, keinen Trabanten. Ihre merkwürdige Uebereinstimmung in fast allen übrigen Verhältnissen mit der Erde ist bereits oben erwähnt. Die unten folgenden Elemente werden dies noch in helleres Licht setzen.

Je nach der Zeit des Erscheinens wird Venus in der Volkssprache als Morgen- und als Abendstern bezeichnet. Das astronomische Zeichen für die Venus ist ♀.

Wir wollen hier noch einiges Genauere über die Venusdurchgänge bringen. Ein solcher fand seit Erfindung der Fernröhre zum ersten Male statt am 4. December 1639. Es folgten die beiden erwähnten, 9. Juni 1761, 2. Juni 1769. Neue finden statt: 8. December 1874, 6. December 1882, dann 7. Juni 2004, 5. Juni 2012, 10. December 2117 und 5. December 2125.

Es ereignen sich im Jahrtausend dergleichen 16, je zwei sind durch einen Zeitraum von 8 Jahren getrennt, und dann tritt eine Pause von 105 Jahren ein.

Zahlenangaben für Venus.

Halbe grosse Axe
0,7233317

Excentricität	Jährl. Veränder. derselben
0,0068183	0,000062711 in hundert Jahren.

Länge des Perihels	Jährl. Veränderung
124° 14′ 25″,6	−3″,24

Länge d. aufst. Knotens	Jährl. Veränder.
75° 11′ 29″,8	−20″,50

Neigung der Bahn gegen die Ekliptik	Jährliche Veränderung
3° 23′ 31″,4	+ 0,07

Epoche
146° 44′ 56″

Umlaufszeit:

Siderische	Tropische
224 T. 16ʰ 49′ 3″	224 T. 16ʰ 41′ 25″

Synodische
583 Tage 23ʰ

Rotationszeit	Neigung des Aequators gegen die Bahn
23ʰ 21′ 21″	11°

Entfernung von der Sonne:

kleinste	grösste
0,7184002	0,7282636

Mittlere tägliche Bewegung	Durchmesser in Meilen
59′ 8″,3	1717

Scheinbare Grösse:

kleinste	mittlere	grösste
9″,3	17″,1	64″

Erleuchtung durch die Sonne:

kleinste	grösste
1,91	1,94

Volumen	Masse	Dichtigkeit
1	$\frac{1}{1{,}13}$	0,908

Schwere	Fallzeit
0,90	13,6

Die Epoche gibt die Länge 1. Januar 1800. Die halbe grosse Axe ist in Theilen der Erdaxe gegeben, wie auch die übrigen absoluten Zahlen als Theile der für die Erde geltenden ausgedrückt sind.

Veränderliche Grösse (Analysis).

Eine Grösse, der ein in gewissen Grenzen oder absolut beliebiger Werth gegeben werden kann. Z. B. in der Gleichung $x^2+y^2=r^2$ können den Grössen x und y alle reellen Werthe, die kleiner als r sind, gegeben werden, in der Gleichung der graden Linie $ax+by=c$ aber können x und y beliebige reelle Werthe haben. Der Ausdruck e^x hat einen Sinn, welchen reellen oder complexen Werth x habe. Die Reihe $1+x+x^2+x^3+\ldots$ aber nur dann, wenn x einen Werth hat, dessen Modul kleiner als Eins ist.

Verbesserter Kalender (Zeitmessung).

Derjenige Kalender, welchen die deutschen Protestanten im Jahre 1700 annahmen, und der sich von dem Gregoria-

nischen nur dadurch unterscheidet, dass in ihm der Ostervollmond durch astronomische Rechnung ermittelt werden sollte, während die Gregorianische Osterregel auf einer cyklischen Durchschnittsrechnung beruht. Da sonach beide Confessionen nicht immer zu gleicher Zeit Ostern feiern konnten, so wurde dies seit 1778 insoweit beseitigt, namentlich durch Friedrichs II. von Preussen Einfluss, dass ein allgemeiner Reichskalender nach Gregorianischen Prinzipien gemeingültig geworden ist (vergleiche die Artikel: Kalender und Osterregel, auch Zeitrechnung).

Verbindungsrente (Rentenrechnung).

Solche Renten, bei denen die Lebensdauer zweier oder mehrerer Personen in Rechnung kommt; z. B. Wittwenrenten, wo der Anfangspunkt der Auszahlung mit dem Tode des Mannes, der Endpunkt mit dem der Frau zusammenfällt (siehe den Artikel: Rente).

Verdoppelung des Cubus (Geometrie).

Jenes unter dem Namen des Delischen bekannte alte Problem: „Die Seite eines Würfels zu finden, der doppelt so gross ist, als ein gegebener.“

Ist a die Seite des gegebenen Würfels, so ist $2a^3$ der Inhalt des gesuchten, $\sqrt[3]{2a^3}$ die Seite. Eine Construction mittels der graden Linie und des Kreises allein ist unmöglich; aber es gibt sehr einfache Lösungen mit Hülfe der Kegelschnitte, z. B. zweier Parabeln.

Sei $\frac{a}{2}$ der Parameter einer solchen, also $y^2 = ax$ ihre Scheitelgleichung, so ist die Gleichung einer zweiten Parabel, mit gemeinschaftlichem Scheitel, darauf senkrechter Axe und doppeltem Parameter $x^2 = 2ay$. Für den andern Schnittpunkt beider gelten beide Gleichungen, also wenn man x eliminirt:

$$y^4 = 2a^3 y, \quad y = \sqrt[3]{2a^3},$$

y ist die gesuchte Seite. Also: Ziehe mit Parameter $\frac{a}{2}$ und a zwei Parabeln mit gemeinschaftlichem Scheitel und auf einander senkrechten Axen; die Ordinate des nicht in den Scheitel fallenden Schnittpunktes beider ist die gesuchte Linie.

An die Verdoppelung des Cubus kann man leicht die geometrische Construction derjenigen Aufgaben knüpfen, welche zu cubischen Gleichungen führen. — In der That führt die Auflösung der letztern, wenn nicht der sogenannte irreductible Fall eintritt, zu Cubikwurzeln. Dergleichen aber lassen sich immer nach der eben gegebenen Methode construiren.

Seien l, m, n Linien, und:

$$\sqrt[3]{lmn} = x,$$

so kann man zunächst $lm = a^2$ setzen, wo a eine gegebene Linie ist, die durch Verwandlung des Rechteckes lm in ein Quadrat gefunden werden kann, also:

$$x^3 = a^2 n.$$

Nimmt man nun ganz wie oben die beiden Parabeln mit auf einander senkrechten Axen:

$$x^2 = ay, \quad y^2 = nx,$$

so ist für deren nicht in den Scheitel fallenden Durchschnittspunkt:

$$x^4 = a^2 nx, \quad x^3 = a^2 n,$$

also die Abscisse desselben ist die gesuchte Linie x.

Was nun den irreductibeln Fall anbetrifft, so führt derselbe bekanntlich immer auf die Gleichung:

$$4 \cos \alpha^3 - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha$$

zurück, wo $\cos 3\alpha$ gegeben, $\cos \alpha$ gesucht ist. Mit andern Worten, diese Construction führt auf die Dreitheilung eines Winkels. Auch diese Aufgabe lässt sich mit Hülfe der Kegelschnitte lösen. Setzen wir, um Homogenität hervorzubringen:

$$\cos 3\alpha = \frac{a}{m}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{m},$$

so ist die betrachtete Gleichung:

$$4x^3 - 3m^2 x = am^2.$$

Setzen wir die bekannte Grösse:

$$\frac{a}{m} = b,$$

und verbinden die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel:

$$xy = c$$

mit der einer andern Hyperbel:

$$x^2 - \alpha xy = \beta y,$$

so ergibt sich für die Schnittpunkte durch Elimination von y:

$$x^3 - \alpha cx = \beta c,$$

also wenn diese Gleichung der gegebenen identisch sein soll:

$$4\alpha c = 3m^2, \quad 4\beta c = am^2,$$

also wenn $c = m^2$ gesetzt wird:

$$\alpha=\frac{3}{4},\quad \beta=\frac{a}{4},$$

die Gleichungen unserer beiden Hyperbeln sind also:

$$xy=m^3,\quad 4x^2-3xy=ay.$$

Die Schnittpunkte derselben, sind die drei Wurzeln unserer cubischen Gleichung, welche in diesem Falle alle drei reell sind.

Vereinsmünze (Metronomie).

So heissen die dem deutsch-österreichischen Münzverein in Währung und Gehalt gemeinsamen Münzen. Es sind der Thaler und das Zweithalerstück. 2 Thaler gleich 3 Gulden österreichisch gleich $3\frac{1}{2}$ Gulden süddeutsch. Der Gehalt ist $\frac{9}{10}$, d. h. $\frac{9}{10}$ fein Silber, $\frac{1}{10}$ Zusatz, der Werth: 30 Thaler, gleich 45 Gulden österreichisch, gleich $52\frac{1}{2}$ Gulden süddeutsch, gleich 1 neues Pfund (500 Grammes) fein.

Verfallzeit (kaufmännische Rechenkunst).

Die Zeit, wann ein Capital fällig ist. — Mittlere Verfallzeit ist die Zeit, wann man mehrere in ungleichen Zeiträumen fällige Capitale gleichzeitig zahlen kann, ohne dass Empfänger und Zahler einen Nachtheil haben (siehe den Artikel: Terminrechnung). — Verfallzeit der Wechsel, die Zeit, in der ein Wechsel fällig ist. Wegen der Respecttage ist dieses nicht immer der Zahltag. Es ist die Verfallzeit entweder auf einen bestimmten Tag, oder auf eine Zeit nach der Ausstellung, oder nach dem Präsentiren, oder nach Uso bestimmt (siehe den Artikel: Uso).

Verfinsterung (Astronomie).

Bedeckung eines Sternes durch ein anderes, namentlich des Mondes durch die Erde, oder der Sonne durch den Mond (siehe Finsternisse).

Verfolgungslinie (Geometrie).

Eine Curve, wo das von zwei beliebigen Tangenten abgeschnittene Stück der Abscissenaxe zum zugehörigen Bogen in constantem Verhältnisse steht.

Der Name kommt von folgender Betrachtung her. Bewege sich jemand auf der Graden AB (Fig. 24), und etwa sein Hund gehe von Punkt C immer nach der Richtung zu, in welcher sich der Herr befindet. Ist der Hund bezüglich in C und D, wenn der Herr in A und E ist, so sind CA und DE Tangenten an die Curve. Der Hund durchläuft Bogen CD, der Herr Linie AE, und wenn die Geschwindigkeit beider eine constante ist, hat man also die eben angeführte Linie. Was ihre Gleichung anbetrifft, so sei AB Abscissenaxe. Sind also C und D einander unendlich nahe, so ist $CD=ds$, AE gleich dem Differenzial der Subtangente, $=d\left(x-y\frac{dx}{dy}\right)$, also die Differenziale gleich:

$$ds+ay\,d\frac{dx}{dy}=0.$$

Setzt man für ds seinen Werth, so kommt:

$$\frac{dy}{y}=\frac{a\,d\frac{dx}{dy}}{\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}},$$

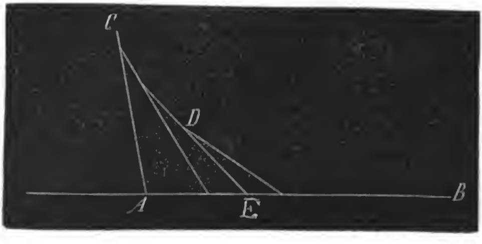
integrirt:

$$\lg y=a\lg\left(\sqrt{1+\frac{dx^2}{dy^2}}-\frac{dx}{dy}\right)+\lg C,$$

woraus sich ergibt:

$$dx=\tfrac{1}{2}\,dy\left\{\left(\frac{c}{y}\right)^{\frac{1}{a}}-\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{1}{a}}\right\},$$

Fig. 24.



$$x=\frac{a}{2}\left\{\frac{\sqrt[a]{cy^{a-1}}}{a-1}-\frac{\sqrt[a]{c^{-1}y^{a+1}}}{a+1}\right\}+c.$$

Für $a=1$ aber ist:

$$dx=\tfrac{1}{2}\,dy\left(\frac{c}{y}-\frac{y}{c}\right),$$

$$x=\tfrac{1}{2}\left(c\lg\,y-\tfrac{1}{2}\,\frac{y^2}{c}\right)+c.$$

Vergrösserung (Optik).

Beim künstlichen Sehen das Verhältniss der scheinbaren Grösse des durch die Vorrichtung erhaltenen Bildes, zu der des Gegenstandes, wie sie mit blossem Auge gesehen würde (vergleiche die Artikel: Fernrohr und Microscop).

Verhältniss (Arithmetik).

Aeltere Mathematiker unterscheiden arithmetische, geometrische und harmonische Verhältnisse, gleichbedeutend bezüglich mit Differenz, Quotient und Differenz der inversen Werthe zweier Zahlen. Im engern Sinne versteht man unter Verhältniss das geometrische $\frac{a}{b}$ oder $a:b$. Proportion heisst eine Verbindung zweier gleichen Verhältnisse, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ oder $a:b=c:d$, gelesen: a zu b wie c zu d. b und c heissen innere, a und d äussere Glieder, a und c Vorder-, b und d Hinterglieder.

Sind drei Glieder einer Proportion gegeben, so kann man immer das vierte finden. Z. B. $b=\frac{ad}{c}$. Setzt man $c=na$, so ist $d=nb$. Hieraus folgt leicht eine Reihe von Sätzen, die wir hier nur hinschreiben:

$$bc=ad,\quad a:c=b:d,\quad b:a=d:c,$$

$$\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b},\quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}.$$

Dieselben sind leicht auszusprechen. Sind die innern Glieder gleich, so heisst die Proportion stetig, z. B.:

$$a:b=b:c,\quad b^2=ac.$$

Eine Verbindung von mehr als zwei gleichen Verhältnissen heisst laufende Proportion. Z. B.:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{g}{h}=\ldots,$$

die man auch schreibt:

$$a:c:e:g=\ldots=b:d:f:h\ldots$$

Es folgt leicht aus einer solchen:

$$\frac{a+c+e+g}{a}=\frac{b+d+f+h}{b}.$$

Die ziemlich überflüssige Theorie der Verhältnisse und Proportionen nimmt in älteren Lehrbüchern lange Abschnitte ein, welche mit einer Unzahl Bezeichnungen und Definitionen angefüllt sind, welche gar keinen Nutzen gewähren. Anwendungen der Verhältnisse, statt deren man aber immer Quotienten setzen kann, bieten ausser der Aehnlichkeitslehre in der Geometrie die einfache und zusammengesetzte Regeldetri. Kosten z. B. a Pfund b Thaler und c Pfund d Thaler, so ist offenbar c so oft in a, als d in b enthalten, also $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, so dass aus drei Gliedern das vierte gefunden werden kann.

Bei andern Aufgaben, der sogenannten umgekehrten Regeldetri, stehen zwei Grössen im umgekehrten Verhältniss der beiden andern. Z. B. sind zu derselben Arbeit a Tage und an jedem b Stunden, andererseits c Tage und d Stunden zu verwenden, so ist $ab=cd$, also wenn man will: $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$. Der zusammengesetzten Regeldetri liegen in gleicher Weise mehrere Proportionen zu Grunde, von denen immer je ein Glied zwei Proportionen gemein ist.

Verifications-Basis (Geodäsie).

Diejenige Linie, welche bei grössern Triangulirungen ausser der Standlinie, welche mit Zuhülfenahme von Winkeln hinreichend ist, noch gemessen wird, um eine Probe der Richtigkeit zu haben. Man nimmt dieselbe so weit als möglich von der Standlinie entfernt.

Verjüngter Maassstab (Zeichenkunde).

Ein Maassstab für eine Zeichnung, welcher die Längen der Zeichnung auf die dem Object entsprechenden reducirt, also z. B. bei Landkarten diejenige Länge angibt, welche einer Meile entspricht.

Verkehrte Regeldetrie (angewandte Arithmetik).

Gleichbedeutend mit: Umgekehrte Regeldetri.

Verlorener Punkt (Markscheidekunst).

Ein Punkt über Tage, möglichst senkrecht über dem gesuchten Punkt.

Verlustrechnung (kaufmännische Arithmetik).

Die Berechnung des Verlustes, gewöhnlich von Hundert genommen. Z. B.: An 2000 Thalern sind 500 verloren gegangen; wieviel beträgt der Verlust vom 100?

$$2000 : 500 = 100 : x, \quad x = 25.$$

Verminderte Octave, Quarte, Quinte (Akustik).

Bezüglich das Verhältniss:

$$c : \widehat{ces}, \quad c : fes, \quad c : ges.$$

Vermischungsrechnung (practische Arithmetik).

Gleichbedeutend mit Alligationsrechnung. Sie gibt an, welchen Preis oder welchen Gehalt ein Gemisch von mehreren Sorten hat, deren Preis ungleich ist, oder auch, wie die Mischung zu machen sei, um einen gewissen Preis oder ein gewisses Verhältniss zu erreichen, z. B:

9 Pfund Silber Feingehalt $\frac{7}{10}$
8 „ „ „ $\frac{5}{10}$
12 „ „ „ $\frac{8}{10}$

werden zusammengethan; welchen Gehalt hat die Mischung?

9 Pfund zu $\frac{7}{10}$ enthalten $\frac{9 \cdot 7}{10} = \frac{63}{10}$ Pfund feinen Silbers; eben so hat man:

$$\frac{8 \cdot 5}{10} = \frac{40}{10}, \quad \frac{12 \cdot 8}{10} = \frac{96}{10},$$

also im Ganzen:

$$9+8+12 = 29 \text{ Pfund Brutto,}$$

worin:

$$\frac{63+40+96}{10} = \frac{199}{10} \text{ Pfund fein,}$$

also der Feingehalt x wird gefunden durch den Ansatz:

$$29 : \frac{199}{10} = 1 : x,$$

$$x = \frac{199}{290} = 0{,}686 \ldots$$

In welchem Verhältniss ist Silber vom Gehalt $\frac{8}{10}$ und $\frac{5}{10}$ zusammenzuschmelzen, um solches vom Gehalt $\frac{7}{10}$ zu haben?

Nimmt man z. B. ein Pfund der ersten Sorte, so hat man $\frac{1}{10}$ Pfund fein Silber zu viel, also da man Silber vom Gehalt $\frac{5}{10}$ zusetzt, so ist die Frage: Wieviel Pfund von $\frac{5}{10}$ Feingehalt werden durch $\frac{1}{10}$ Pfund fein Silber Zusatz auf $\frac{7}{10}$, also um $\frac{2}{10}$ erhöht? Offenbar:

$$\tfrac{1}{10} : \tfrac{2}{10} = \tfrac{1}{2} \text{ Pfund;}$$

Das Verhältniss der Mischung ist also 2 : 1.

Es ist leicht zu sehen, dass man bei Annahme von drei oder mehr Sorten zu einer unbestimmten Aufgabe kommt.

Z. B. Wein, das Quart bezüglich zu 1, $1\frac{1}{2}$ und 2 Thalern, soll so gemischt werden, dass das Quart $1\frac{2}{3}$ Thaler koste.

Seien x, y, z die Mischungszahlen, also der Preis des Ganzen:

$$x + \frac{3y}{2} + 2z,$$

und jedes Quartes:

$$\frac{x + \frac{3y}{2} + 2z}{x+y+z} = 1\tfrac{2}{3},$$

d. h.:

$$2x + 3y + 4z = \tfrac{10}{3}(x+y+z),$$
$$4x + y = 2z,$$

also wenn man:

$$\frac{y}{x} = u, \quad \frac{z}{x} = v$$

setzt:

$$u = 2v - 4.$$

v ist beliebig. Sei z. B. $v = 3$, so ist $u = 2$, also:

$$u : v = 3 : 2, \quad x : y : z = 1 : 3 : 2.$$

Vernier (Messkunst).

Siehe Nonius.

Versicherung (practische Arithmetik).

Die Bezahlung einer Summe in einem oder mehreren Terminen zum Zwecke, um für einen künftig eintretenden Nachtheil, sei derselbe unvermeidlich oder nur möglich, entschädigt zu werden. Ueber die Versicherungsrechnung siehe den Artikel: Rente.

Versicherungsfernrohr (Optik).

Dasjenige Fernrohr, welches an Messinstrumenten angebracht ist, um sich von dem unverrückten Standpunkte des Instrumentes überzeugen zu können.

Versetzungen (Combinationslehre).

Gleichbedeutend mit Permutationen. Siehe den Artikel: Combinationslehre.

Vertheilungsschieber (Maschinenlehre).

Diejenigen Schieber bei Dampfmaschinen, durch welche der Dampf nur abwechselnd zu beiden Seiten des Kolbens

geleitet wird, im Gegensatz zu den Expansionsschiebern, wo zugleich eine zeitweise Absperrung des Dampfes eintritt. (Vergleiche den Artikel: Dampfmaschine).

Vertikalkreis (Astronomie).

Jeder durch den Zenith gehende grösste Kreis, im Besondern aber derjenige, welcher auf dem Ortsmeridian senkrecht steht.

Vertikalkreis (Optik).

Beim Theodoliten derjenige Kreis, auf welchem man die Höhen abliest.

Vertikalprojection (Projectionslehre)

Gleichbedeutend mit Grundriss, also die Projection eines Gegenstandes auf eine Horizontalebene.

Vertikaluhr (Gnomonik).

Eine Sonnenuhr, auf irgend einer Vertikalebene gezeichnet. Dergleichen sind also Morgen-, Abend-, Mittags- und Mitternachtuhren (vergleiche den Artikel: Sonnenuhr).

Vertikalwinkel (Geometrie).

Gleichbedeutend mit Scheitelwinkel.

Verzahnung (Maschinenlehre).

Die Art und Weise, wie ein Stirnrad oder eine Stange mit Zähnen versehen wird (siehe den Artikel: Rad).

Verzugszinsen (practische Arithmetik).

Die Zinsen, welche bezahlt werden müssen, wenn der Schuldner nicht rechtzeitig seiner Verpflichtung nachkommt. Bei Wechseln werden sie vom Verfalltage, beim Acceptanten jedoch vom letzten Respecttage an gerechnet. Bei eingeklagten Schulden kommen rechtlich in Preussen dem Gläubiger 5 Procent Verzugszinsen vom Tage der Klagebehändigung an, zu.

Vesta (Astronomie).

Der vierte der Asteroiden oder kleinen Planeten, von Olbers entdeckt am 27. März 1807. Wir fügen die Elemente hinzu, wie sie von Enke (1859) berechnet sind.

Abstand von der Sonne:

kleinster	mittlerer	grösste
2,14801	2,36074	2,57347

Excentricität	Neigung gegen d. Ekliptik
0,090119	7° 8′ 17″, 4

Länge des Perihels 1860:	Länge des aufsteigenden Knotens
250° 20′ 45″, 4	103° 25′ 46″, 2

Umlaufszeit:

wahre	synodische
1324,84 Tage	504,29 Tage

Stärke des Sonnenlichtes:

Für die Erde 1000

kleinste	mittlere	grösste
217	180	151

Vibration (Optik und Dynamik).

Siehe Schwingungen.

Vieleck, Polygon (Geometrie).

Gewöhnlich wird mit diesem Ausdruck ein von einer Anzahl Seiten vollständig begrenzter Theil der Ebene verstanden. Im Allgemeinen aber ist unter diesem Namen eine Verbindung je zwei auf einander folgender von n Punkten, und des letzten wieder mit dem ersten durch grade Linien, zu verstehen. Ein n-Eck hat also n Seiten. Jedoch bezeichnet man zuweilen als vollständiges Vieleck eine Verbindung von n Punkten durch soviel Grade als möglich, d. h. durch $\frac{n(n-1)}{2}$, und dies ist die Anzahl der Seiten des n-Ecks, zum Unterschied vom vollständigen Vielseit, welches eine Verbindung von n Graden ist, die sich so oft als möglich schneiden, also $\frac{n(n-1)}{2}$ mal, und dies ist die Anzahl der Ecken des n-Seits. Jedes Vieleck lässt sich in ein vollständiges verwandeln, wenn man alle Verbindungslinien der Ecken zieht, welche nicht Seiten sind. Diese heissen Diagonalen. Das n-Eck hat also:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2} \text{ Diagonalen.}$$

Was die Anzahl der Diagonalen eines vollständigen n-Seits anbetrifft, so kann man die Anzahl der $\frac{n(n-1)}{2}$ Ecken sich zunächst so oft als möglich verbunden denken, d. h.:

$$\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right) \text{ mal.}$$

Von diesen Eckpunkten liegen jedoch

immer $n-1$ auf einer Seite, da diese sich so oft als möglich schneiden, und jeder Eckpunkt gehört zwei Seiten an, also jeder Punkt ist mit zweimal $n-2$ andern schon verbunden. Es fallen also von der Diagonalen-Anzahl für jeden Eckpunkt weg $2(n-2)$, da aber $\frac{n(n-1)}{2}$ dergleichen sind, mit Berücksichtigung, dass jede Linie Punkt A mit einem andern B und wieder B mit A verbindet, also die Anzahl auf die Hälfte zu reduciren ist, so fallen im Ganzen:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

aus der Anzahl der Diagonalen weg, welche somit beträgt:

$$\frac{n(n-1)}{4}\left[\frac{n(n-1)}{2}-1-(n-2)\right]$$
$$=\frac{n(n-1)}{8}[n^2-n-2-4n+8]$$
$$=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8},$$

also beim vollständigen Vierseit:

$$\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8}=3 \text{ Diagonalen.}$$

Beschränken wir uns jetzt auf ebene Vielecke. Es ist gleichgültig, in welcher Ordnung man die n Punkte verbindet. Jedoch muss man unterscheiden zwischen Vielecken, die einen einfach und einen mehrfach begrenzten Raum einschliessen. Nur bei den letztern können sich die Seiten durchkreuzen, gewöhnlich aber betrachtet man immer nur die ersten. Es ist leicht einzusehen, dass sich n Punkte entweder gar nicht oder nur auf eine Art so zu einem Vielecke verbinden lassen, dass die Seiten sich nicht durchkreuzen, und die nach dem innern Raume des Vielecks gekehrten Winkel je zweier Seiten (Polygonwinkel) alle hohl sind. Bei diesen letztern werden die von irgend einem Punkte im Innern nach den Ecken gezogenen Strahlen nie die Seiten durchkreuzen. Bei allen andern Vielecken ist dies fraglich. Sind solche Strahlen möglich, so theilen sie das Vieleck in n Dreiecke, welche also $2n$ Rechte enthalten. Diese bestehen aus allen Polygonwinkeln, und den um den innern Punkt herumliegenden vier Rechten. Daraus folgt der Satz:

„In jedem Vieleck, wo ein Punkt im Innern gefunden werden kann, von dem sich Strahlen ziehen lassen, welche die Seiten nicht kreuzen, ist die Summe aller Polygonwinkel gleich $2n-4$ Rechten."

Diesen Satz, den man gewöhnlich allgemein für Vielecke ausgesprochen findet, wollen wir so erweitern, dass er in der That für alle ebenen Vielecke gilt.

Seien zunächst α, β, γ die inneren Winkel eines Dreiecks. Wir wollen neben diesen als ein System von Dreieckswinkeln auch bezeichnen jeden hohlen Winkel, den zwei Dreiecksseiten machen, also z. B. $a=4\text{R}-\alpha$, in Verbindung mit zwei anderen Winkeln, die ihn zu zwei Rechten ergänzen. Man hat nun:

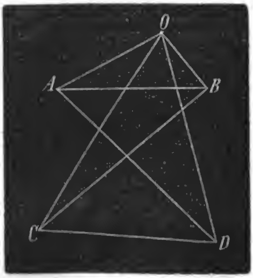
$$a-\beta-\gamma=4\text{R}-\alpha-\beta-\gamma=2\text{R},$$

also:

„Ein System von Dreieckswinkeln besteht entweder aus den drei hohlen oder aus einem erhabenen in Verbindung mit den beiden andern hohlen aber negativ genommen."

Sei jetzt ein beliebiges Vieleck $ABCDE$ gegeben. Man nehme einen Punkt O, gleichviel wo in der Ebene, und ziehe von ihm eine Grade nach der ersten Ecke A, Linie OA drehe man, bis sie in die Lage OB kommt, in demselben Sinne weiter, bis sie in Lage OC gelangt u. s. w. bis sie nach OA zurückkehrt. Es ist dann nicht nöthig, dass OA gerade 4 Rechte durchlaufen hat, sie kann ein beliebiges Vielfaches von 4 Rechten, also $4s$ Rechte durchlaufen haben. Z. B. in Viereck $ABCD$ (Fig. 25) ist Winkel BOC und DOA erhaben,

Fig. 25.



und die Summe der Drehungswinkel gleich 8 Rechten. Bei jeder Theildrehung von OA nach OB, von OB nach OC u. s. w. bilden nun die beiden Lagen der Drehungslinie mit einer Polygonseite ein Dreieck, das wir Centraldreieck nennen, und der Drehungswinkel ist ein Dreieckswinkel desselben im oben

angegebenen Sinne. — Polygonwinkel nennen wir den Winkel zweier auf einander folgenden Seiten, jedoch so genommen, dass er aus der Summe von n Dreieckswinkeln zweier auf einander folgenden Centraldreiecke besteht, die mit den Drehungswinkeln zu einem System gehören. Dies bestimmt, ob der Polygonwinkel erhaben oder hohl, positiv oder negativ ist. Z. B. Winkel OBA und $-OBC$ bilden zusammen den hohlen Polygonwinkel $-ABC$, da OBC mit dem erhabenen Winkel COB zu einem System gehört. Da man nun n Centraldreiecke hat, welche sämmtliche Polygonwinkel und ausserdem $4s$ Rechte um O herum umfassen, so hat man den Satz:

„Die Summe aller Polygonwinkel beträgt $2n-4s$ Rechte.“

In unserer Figur, wo $n=4$, $s=2$ ist, hat man also 0 Rechte. s kann immer so bestimmt werden, dass $2s=n$ bleibt, also im Viereck ist die Summe der Polygonwinkel 4 R oder 0, im Fünfeck 6 oder 2 R u. s. w.

Regelmässige Vielecke sind solche, worin alle Seiten und alle Polygonwinkel bezüglich gleich sind. Ueber dieselben siehe den Artikel: Raumlehre. Hier wollen wir jedoch auch solche in Betracht ziehen, wo die Seiten sich durchkreuzen können.

In der That, wenn man beim gewöhnlichen $(2n+1)$-Eck z. B. den 1ten und 3ten, 3ten und 5ten ... $2n$ten und 2ten, 2ten und 4ten ... Theilpunkt verbindet, bis man zum ersten zurückkommt, so hat man ein neues $(2n+1)$-Eck, dem alle Eigenschaften des regelmässigen zukommen.

Man hat für den Polygonwinkel des regelmässigen n-Eck den Ausdruck: $2-\frac{4s}{n}$ Rechte. Ist diese Summe gleich Null, so fallen alle Seiten zusammen.

Man hat also fürs regelmässige:

Dreieck: $\frac{2}{3}$ R,
Viereck: 1 R oder 0 R,
Fünfeck: $\frac{6}{5}$ R oder $\frac{2}{5}$ R,
Sechseck: $\frac{4}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ oder 0 R,
Siebeneck: $\frac{10}{7}$ oder $\frac{6}{7}$ oder $\frac{2}{7}$ R,

u. s. w.

Vieleckiger Körper (Geometrie).

Siehe Polyeder.

Vielfacher Punkt (Geometrie).

Derjenige Punkt einer Curve, worin sich zwei oder mehrere Zweige schneiden oder zusammentreffen. Man unterscheidet Doppelpunkte, dreifache u. s. w. In einem solchen hat die Curve bezüglich zwei, drei u. s. w. Tangenten, welche jedoch einen Winkel von 180 Grad machen können. Ueber die Berechnung der vielfachen Punkte siehe die Artikel: Besondere Punkte, und: Analytische Geometrie.

Vielfacher Stern (Astronomie).

Nahe neben einander stehende Sterne, die dem blossen Auge als ein einziger erscheinen, während das Fernrohr sie als mehrere (Doppelsterne, dreifache u. s. w.) ausweist. Man theilt sie in optische, d. h. solche, die, obgleich in sehr grosser Entfernung von einander, fast dieselbe Gesichtslinie, von der Erde aus gesehen, haben, und physische, bei denen man aus dem Grunde auf eine grössere Nähe schliessen kann, weil bei ihnen eine Bahn des einen um den andern beobachtet ist. Diese Bahn ist eine relative ellyptische, d. h. jeder macht um den andern als fest gedachten eine Ellipse, wenn die Vereinigung ein Doppelstern ist. Bei zweien hat man eine vollständige Revolution beobachtet, η in der Krone und ξ im grossen Bären, bei den andern ist die Bahn hypothetisch. Die Sternkataloge zeigen über 1000 vielfache Sterne. Wir fügen für die wichtigsten einige Zahlenangaben hinzu:

	Umlaufszeit	Halbe grosse Axe (senkrecht von der Erde gesehen).	Excentricität
ζ im Herkules	36 Jahr	1″, 2	0,44
η in der Krone	43 Jahr	—	—
ξ im grossen Bären	58 Jahr	3″, 8	0,42
σ in der Krone	287 Jahr	3″, 7	0,76
γ im Löwen	1200 Jahr	—	—

Vielfaches (Arithmetik).

Eine Zahl, in die mit einer andern gegebenen ohne Rest dividirt werden kann Z. B. 12 ist das 3fache von 4.

Vielseit (Geometrie).

Siehe Vieleck.

Viereck (Geometrie).

Im engern Sinne ein von vier Seiten begrenztes Ebenenstück, allgemeiner vier Punkte durch vier Grade verbunden. Vergleiche auch den Artikel: Vieleck, namentlich über den Unterschied von Viereck, Vierseit, vollständiges Viereck und Vierseit. Vergleiche auch den Artikel: Raumlehre.

Vierseit (Geometrie).

Siehe Viereck.

Vierling (Metronomie).

In Baden und Würtemberg wird so $\frac{1}{4}$ Pfund im gewöhnlichen Leben genannt.

Viertelkreis (Geometrie und Astronomie).

Gleichbedeutend mit Quadrant.

Vierung (Markscheidekunst).

Die Breite einer Zeche.

Vierweghahn (Maschinenlehre).

Der von Watt für die Dampfmaschine angegebene Hahn, welcher die Absperrung des Dampfes und den Eintritt desselben auf beiden Seiten des Kolbens bewirkt. Neuere Maschinen haben an dessen Stelle Schiebersteuerungen (vergleiche die Artikel: Wärme, und: Dampfmaschine).

Virtuelle Geschwindigkeit (Statik).

Die Geschwindigkeiten, welche gewisse mit einander verbundene Punkte gemäss den Bedingungen der Verbindung annehmen können. Ueber das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten vergleiche den Artikel: Statik.

Visiren (Geodäsie).

Die Bestimmung des Winkels, welchen die Gesichtslinien von zwei Punkten machen, mittels des Diopters, des Theodoliten oder durch andere optische Instrumente.

Visirkante (Geodäsie).

Die eine Kante des Diopterlineals, welche der Visirlinie parallel ist, oder in sie fällt.

Visirkunst (Messkunst).

Die Ausmessung der in Tonnen oder Fässern enthaltenen Flüssigkeit mittels des Visirstabes.

Man nimmt dabei an, das Fass sei gleich einem Cylinder von gleicher Höhe, dessen Grundfläche gleich $\frac{2}{3}$ der Bodenkreisfläche, $+\frac{1}{3}$ der Bauchfläche ist, welche letztere durch das Spundloch gemessen wird.

Ist das Fass am Halse weniger gewölbt, so gibt man dem Durchmesser des Cylinders $\frac{2}{3}$ des Bauchdurchmessers, $\frac{1}{3}$ des Bodendurchmessers. Der Visirstab gibt den Inhalt des gefüllten Theiles des Fasses in Flaschen oder Kannen durch blosses Eintauchen des Stabes und Ablesen von einer darauf gezeichneten Scala unmittelbar oder durch leichte Rechnung, natürlich nur annähernd.

Visirtafel (Geodäsie).

Gleichbedeutend mit Nivellirtafel.

Vistawechsel, Sichtwechsel (kaufmännische Rechenkunst).

Wechsel, deren Zahlungstag von dem der Präsentation abhängig ist, z. B. nach Sicht, *a vista* d. h. nach dem Vorzeigen zahlbar, 3 Tage nach Sicht u. s. w.

Vivianische (auch Florentinische) Aufgabe (Stereometrie).

Ein von Viviani in Florenz (1622 bis 1703) den Mathematikern im Jahre 1692 gestelltes Problem. „In einem hemisphärischen Gewölbe sollen vier Fenster so angelegt werden, dass der Rest des Gewölbes geometrisch quadrirbar ist." Da diese Aufgabe nur durch Curven doppelter Krümmung gelöst werden kann, so gab sie zuerst den Mathematikern Anlass, sich mit solchen Curven zu beschäftigen und hat insofern einige Berühmtheit in der Geschichte der Mathematik erhalten. Mit der Lösung haben sich beschäftigt Leibnitz (*Acta eruditorum*, 1692, S. 275), Jakob Bernoulli (ebendaselbst S. 363), Grandus und Wallis.

Völligkeitscoefficient (Hydraulik).

Das Verhältniss des Inhalts des Hauptquerschnitts eines Schiffes zu dem es umschliessenden Rechtecke, auch das Verhältniss des eingetauchten Volumens zu dem es umschliessenden Parallelepipedon.

Ist a der Tiefgang, b die grösste Breite, l die grösste Länge des eingetauchten Schifftheiles, F der Inhalt des eingetauchten Theiles des Hauptspanters, G der Inhalt der Schwimmfläche, V das Volumen des verdrängten Wassers, so sind die Völligkeitscoefficienten:

$$\alpha = \frac{F}{ab} = 0{,}82 \text{ bis } 0{,}92,$$

$$\lambda = \frac{G}{b\,l} = 0{,}80 \text{ bis } 0{,}65,$$

$$\eta = \frac{V}{ab\,l} = 0{,}60 \text{ bis } 0{,}45.$$

Die ersteren Zahlen beziehen sich auf Seeschiffe, die letzteren auf Flussschiffe.

Vogelperspective (Projectionslehre).

Gleichbedeutend mit: Orthographische Projection. Die Projection eines Gegenstandes auf eine Ebene mittels paralleler Linien, die durch jeden Punkt gehen.

Vollkommene Zahl (Arithmetik).

Eine Zahl, welche der Summe ihrer Factoren gleich ist, z. B.:

$$28 = 1+2+4+7+14.$$

Eine solche ist z. B. $(2^{n+1}-1)\,2^n$, wo n ganz beliebig, wenn $2^{n+1}-1$ eine Primzahl ist, denn dann hat diese Zahl die Factoren:

$$1,\ 2,\ 2^2\ \ldots\ 2^n,\ (2^{n+1}-1),$$
$$(2^{n+1}-1)2,\ (2^{n+1}-1)2^2\ \ldots$$
$$(2^{n+1}-1)\,2^{n-1},$$

und deren Summe ist:

$$2^{n+1}-1+(2^{n+1}-1)(2^n-1)$$
$$=(2^{n+1}-1)\,2^n.$$

Vollmond (Astronomie).

Der Mond zu der Zeit, wo sich die Erde zwischen ihm und der Sonne befindet. Er ist dann 180° von der Sonne entfernt, culminirt um Mitternacht und geht auf bei Sonnenuntergang. Die Sonne erleuchtet ihn dann vollständig.

Volumen (Geometrie).

Der Inhalt einer begrenzten Fläche oder eines Körpers.

Voraussetzung, Hypothesis (allgemeine Mathematik).

Bei einem mathematischen Satze das, was angenommen wird. Z. B. bei dem Satze:

„Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an den Grundlinien gleich,“

ist die Voraussetzung die, dass das Dreieck gleichschenklig ist.

Vorgelege (Maschinenlehre).

Eine Verbindung von Rädern, welche die Bewegung der Umtriebsmaschine abändern, und dann auf die Arbeitsmaschine übertragen.

Vorrücken der Nachtgleichen (Astronomie).

Siehe Präcession.

W.

Waage (Statik und Maschinenlehre).

Instrument zum Messen des Gewichts der Körper, ist im Wesentlichen ein zweiarmiger Hebel, an dessen einem Arme der seinem Gewichte nach zu bestimmende Körper P, am andern das Aequivalent Q in bekannten Gewichten angebracht wird. Sind a und b die Armlängen, so hat man bekanntlich: $aP = bQ$, damit Gleichgewicht stattfinde. Es ist also dann $P = \frac{bQ}{a}$. Man unterscheidet gleicharmige Waagen, wo $b = a$, also $P = Q$ ist, und ungleicharmige.

Die gleicharmige Waage besteht aus dem Waagebalken AB (Fig. 26), der Zunge CD, der Scheere CE, der Axe C, welche in einem scharfgeschnittenen dreiseitigen Stahlprisma besteht, und den mittels der Schnüre oder Ketten befestigten Waageschaalen, welche den zu wägenden Gegenstand und die Gewichte aufnehmen. Der Vereinigungspunkt der Kräfte P und Q geht durch die Verbindungslinie der Punkte A und B, also durch die Mittellinie des Waagebalkens, und wenn Gleichgewicht herrschen soll, muss, falls P und Q gleich sind, der Mittelpunkt von AB unterstützt sein, was nur möglich ist, wenn er sich unterhalb des Aufhängepunktes

Fig. 26.

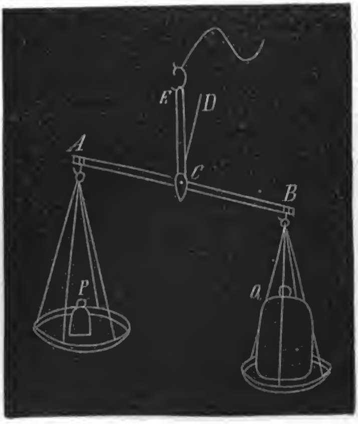
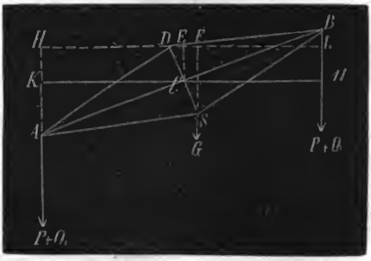


Fig. 27.



E der Scheere und der Axe C befindet, d. h. wenn der Balken horizontal ist, und die Zunge in der Scheere sich befindet (einspielt). Ist also in der That $P=Q$, so treten Schwingungen ein, bis diese Lage erreicht ist. Die Richtigkeit der Waage beruht zunächst auf der vollständigen Gleichheit der Arme *a* und *b*. Diese wird dadurch geprüft, dass man Kraft und Last *P* und *Q* vertauscht, wo sie dann immer noch einspielen muss.

Soll auf einer Waage, die nicht vollkommen richtig ist, doch genau gewogen werden, so bringe man zuerst den zu wiegenden Körper auf die Schaale *A*, und auf die Schale *B* eine Masse feinen Bleischrotes, bis Einspielen erfolgt. Dann vertausche man *P* mit den Gewichten *Q*, welche ebenfalls mit *P'* im Gleichgewicht sind; offenbar ist dann $P=Q$.

Die Axe besteht darum aus einem Prisma, welches auf hartem Metall- oder Stahllager ruht, damit die Waage sich frei bewege und die Axenreibung sehr klein sei. Auch die Schaalen müssen an schneidigen Axen aufgehängt sein.

Man verlangt von einer Waage aber auch Empfindlichkeit und Stabilität, d. h. wenn ein sehr kleines Gewicht beim Einspielen zugesetzt wird, so soll sie sogleich eine Neigung annehmen, und wenn dies Gewicht entfernt wird, sogleich wieder einspielen.

Erste Bedingung der Stabilität ist, dass der Schwerpunkt *S* sich unter dem Aufhängepunkt befinde. Sei also (Fig. 27) *D* die Drehaxe, *S* der Schwerpunkt des leeren Balkens, *C* der Durchschnittspunkt von *DS* mit der Verbindungslinie *AB* der Punkte, an welchen die Schaalen angebracht sind. Dann muss *D* immer über *S* und zum Mindesten nicht unter *C* sein, da man annehmen kann, dass die Gewichte in *A* und *B* wirken, also sich in *C* vereinen. Der Winkel, welchen der Waagebalken bei irgend einer Belastung mit der Horizontalen macht, heisst Ausschlag, er misst die Empfindlichkeit der Waage. Sei.

$$CA=CB=l,\quad CD=a,\quad SD=s,$$

der Ausschlagswinkel $=\varphi$, das Gewicht des leeren Waagebalkens $=G$, das Gewicht einer Schaale nebst Kette und Haken $=Q$, befinde sich in *A* das Gewicht $P+Z$, in *B* das Gewicht *P*, so ist das statische Moment auf der einen Seite:

$$(P+Q+Z)\,DH$$
$$=(P+Q+Z)(l\cos\varphi-a\sin\varphi)$$

und auf der andern (hierher stehenden):

$$(P+Q)(l\cos\varphi+a\sin\varphi)+Gs\sin\varphi.$$

Also für das Gleichgewicht sind diese Ausdrücke gleich zu setzen. Es ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Zl}{[2(P+Q)+Z]\,a+Gs}.$$

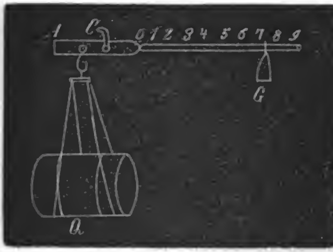
Der Ausschlag, also die Empfindlichkeit, ist der Länge des Balkens proportional; sie nimmt ab, wenn *a*, *G* und *s* zunehmen. Es muss also der Schwerpunkt des Waagebalkens und die Aufhängelinie *AB* dem Drehpunkte sehr nahe sein. Ist $a=0$, also die Waage in *C* aufgehängt, so hat man:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{Z\,l}{G\,s},$$

die Empfindlichkeit also von den aufgelegten Gewichten unabhängig. Solche Waagen sind also besonders brauchbar. Um die Empfindlichkeit zu reguliren, kann ein über *D* angeschraubtes Gewicht dienen.

Was die Stabilität anbetrifft, so hat man für dieselbe offenbar:

Fig. 28.



$$S = 2\,(P+Q)\,DE + G \cdot DF,$$

also:

$$S = [(P+P)\,2a + Gs]\sin\varphi.$$

Sie wächst mit den Gewichten und ist von der Länge des Balkens unabhängig.

Die ungleicharmigen Waagen, auch Schnellwagen genannt, werden getheilt 1) in solche mit Laufgewicht, 2) in solche mit verjüngtem, 3) mit festem Gewicht.

Die Waage mit Laufgewicht ist ein ungleicharmiger Hebel AB (Fig. 28). Am kürzeren Arme CA befindet sich die Schaale, am längeren mit einer Scala versehen das verschiebbare Gewicht G. Ist dasselbe gleich P, Q die Last an A. Befindet sich das Laufgewicht in 0, so ist die leere Schaale im Gleichgewicht. Sei $C_0 = l_0$, $CA = a$ und l diejenige Entfernung, in welcher das Gewicht der belasteten Schaale Gleichgewicht hält. Man hat dann offenbar:

$$G\,(l - l_0) = Qa.$$

Die Last Q ist also dem Wege $l - l_0$ des Laufgewichtes proportional. Als Einheit kann man die Last Q' nehmen, welche dem am Ende B angebrachten Laufgewicht das Gleichgewicht hält. Ist also $0B$ in n Theile getheilt, und Q befindet sich im $s$ten Theile, so ist:

$$Q'a = Gn, \qquad Qa = Gs,$$

$$Q = \frac{nQ'}{s}.$$

Bei der Schnellwaage mit verjüngtem Gewicht (Fig. 29) hängt die Last an einem kürzeren Arme CA als das Gewicht, welches den Arm CB hat. Das Verhältniss der Arme ist gewöhnlich 10 : 1. Die Waage wird dann Decimalwaage genannt. Die leere Waageschaale wird durch ein anderes Gewicht (Tarirgewicht) in Gleichgewicht gebracht. Ist dann wieder Q die Last,

Fig. 29.

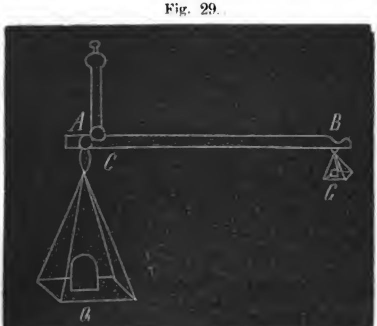
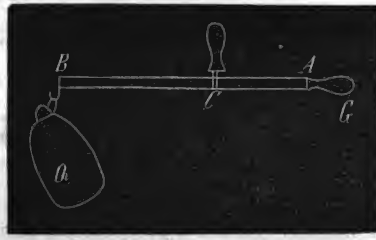


Fig. 30.



G das Gewicht, a und b die Arme, so hat man: $Q = \frac{bG}{a}$, also bei der Decimalwaage $Q = 10\,G$.

Die **Schnellwaage mit festem Gewicht** (dänische Waage) hat ein fest aufgehängtes Gewicht, aber eine veränderliche Drehaxe C (Fig. 30), welche mit einer Handhabe gehalten wird, während man den Arm so lange schiebt, bis Gleichgewicht erfolgt. Am Arme befindet sich eine ungleichtheilige Scala.

Sei G das Gewicht, $Q = nG$ die Last, l die Länge des Armes, a die Entfernung des Gewichtes vom Aufhängepunkt C, so ist:

$$nG\,(l - a) = Ga, \qquad a = \frac{nl}{n+1}.$$

Setzt man:

$$n = 1,\ 2,\ 3\ \ldots,$$

so hat man:

$$a = \frac{l}{2},\ \frac{2l}{3},\ \frac{3l}{4}\ \ldots$$

Setzt man:

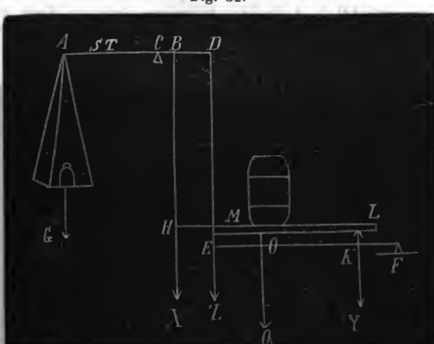
$$n = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4}\ \ldots,$$

so hat man:

$$a = \frac{l}{3},\ \frac{l}{4},\ \frac{l}{5}\ \ldots,$$

also trägt man von A an die Entfernungen $\frac{l}{2}, \frac{2l}{3}, \frac{3l}{4}$ . . . ab, und bezeichnet die Endpunkte mit 1, 2, 3 . . ., dagegen wenn man $\frac{l}{3}, \frac{l}{4}, \frac{l}{5}$ abträgt, die Theilpunkte mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, so gibt die Zahl beim Drehpunkte unmittelbar,

Fig. 31.



wievielmal grösser die Last als das Gewicht ist.

Von zusammengesetzten Schnellwaagen geben wir nur einige.

1) Die **Brückenwaage** des Quintenz besteht aus drei Hebeln, *ACD*, *EF* und *HK* (Fig. 31). In *A* hängt die Schaale für das Gewicht *G*, ausserdem am ersten Hebelarm noch die Stangen *BH* und *ED*, *DE* trägt den zweiten, um *F* drehbaren Hebel, *BH* den dritten, um Axe *K* drehbaren, welche auf *EF* aufsitzt. Diese beiden letzten Hebel sind gabelförmig und ihre Axen schneidig. Auf *HK* ist die Brücke *ML* befindlich, auf welcher die Last ruht. Vor dem Abwägen ruht der Hebel *HK* auf drei Stiften, und der Waagebalken wird durch eine Arretirung *S* gestützt. Diese wird nach Auflegen der Last ausgehoben, und Gewicht *G* aufgelegt, so dass *AD* zum Einspielen kommt. Vor dem Abnehmen der Last tritt wieder Arretirung ein. Zeiger Z gibt den Horizontalstand an. Ein verschiebbares Gewicht *T* tarirt die leere Waage.

Die Angabe der Waage muss von der Stellung des zu wägenden Körpers unabhängig sein. Dies wird erreicht, wenn das Verhältniss der Arme des zweiten Hebels $\frac{EF}{KF}$ dasselbe ist, als das der Arme des Waagebalkens $\frac{CD}{CB}$. Sei Q die Last auf der Brücke, X der Druck in B auf den Waagebalken, Y der in K auf EF, Z der in E, so ist:

$$Z \cdot EF = Y \cdot KF, \quad Q = X + Y.$$

Es wirken nun auf AD in A die Last G, in B Last X und in E Last Z, also:

$$G \cdot AC = \frac{Y \cdot KF}{EF} CD + X \cdot CB.$$

Damit nicht Y und X einzeln vorkommen, sondern nur $X + Y = Q$, muss sein:

$$KF \cdot CD = EF \cdot CB.$$

Diese Bedingung ist zu erfüllen, und dann ist:

$$G \cdot AC = Q \cdot CB,$$

wie bei der einfachen Waage.

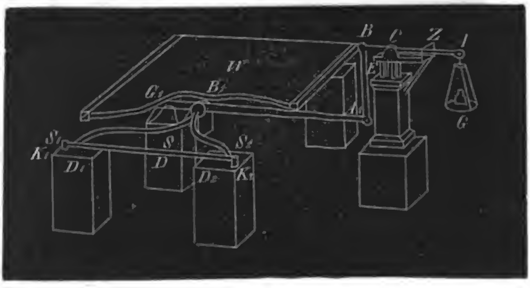
2) Die **Schwilguesche Waage** besteht in einem zweiarmigen Hebel *ACB* (Fig. 32), einem einfachen einarmigen $A_1B_1C_1$. und zwei gabelförmigen einarmigen $B_1S_1DS_2$ u. s. w. Die Drehaxen dieser vier Hebel sind C, C_1, D_1, D_2. Nur der eine gabelförmige Hebel ist hier sichtbar. Gewöhnlich ruht die Brücke auf vier Bolzen, K_1, K_2 . . ., während des Wägens aber auf vier Schneiden, S_1, S_2 . . . Es ist nämlich das Gestell E der Waage beweglich und kann durch eine Kurbel auf- und niedergestellt werden. Das Hebelverhältniss ist gewöhnlich:

$$\frac{CA}{CB} = 2, \; \frac{CA_1}{CB_1} = 5, \; \frac{DB_1}{DS} = 10.$$

Man tarirt die leere Waage. Die Kraft in B oder A_1 ist dann gleich dem doppelten Gewicht G, die in B_1 $= 5$ mal der in A_1, also $= 10\,G$, endlich die Last Q in S $= 10 \cdot 10\,G$, also $Q = 100\,G$.

3) Die **Schiffswaage** besteht aus zwei übereinander hängenden ungleicharmigen Waagebalken, so mit einander verbunden, dass die Kraft des untern als Last des obern wirkt. Sind bei bei-

Fig. 32



den Balken also die Kraftarme 10mal grösser als die Lastarme, so hat man $Q = 100\,G$.

Sehr schöne und höchst empfindliche Waagen hat nach einem eigenthümlichen Principe Schönemann in Brandenburg construirt. Bei dieser Gelegenheit erwähnen wir auch der Waagen desselben zum Messen horizontal wirkender Kräfte durch Gewichte.

Die Zeigerwaage ist ein ungleicharmiger Hebel ACB (Fig. 33). In A

Fig 33.



befindet sich ein festes Gewicht, in B die Schaale. Wird dieselbe belastet, so wird A eine gewisse Lage an der Scala einnehmen, welche das Gewicht Q der Last angibt.

Sei S der Schwerpunkt der unbelasteten Vorrichtung, so wird, wenn Gleichgewicht hergestellt ist, S unter C sich befinden. Möge Winkel $ACB = \varphi_0$ sein. Wird nun die Schaale belastet, so geht Winkel φ_0 in φ über, und Linie CS macht eine Drehung, die gleich $\varphi - \varphi_0$ ist. Sei $CB = a$, $CS = l$, so sind die statischen Momente von Kraft G, welche dem Gewichte der ganzen Vorrichtung gleich ist, also in S wirkt, und Q, welches in B wirkt, bezüglich:

$$Q a \sin\varphi \quad \text{und} \quad G \sin(\varphi - \varphi_0),$$

also:

$$Q = \frac{G \sin(\varphi - \varphi_0)}{a \sin\varphi},$$

Da Winkel φ_0 bekannt ist, so kann die Scala so gemacht werden, dass die Theilpunkte 1, 2, 3 den Werthen von $\frac{\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sin\varphi}$ entsprechen.

Ueber Federwaagen siehe den Artikel: Dynamometer, über Seilwaagen den Artikel: Seilcurven.

Waage (Astronomie).

Das siebente Sternbild des Thierkreises.

Waagerecht (Statik und Geodäsie).

Gleichbedeutend mit horizontal.

Waaren-Rechnung (kaufmännische Arithmetik).

Bestimmung des Kaufpreises einer Waare nebst allen Unkosten. Dem Princip nach ist die Rechnung natürlich höchst einfach, und es kommt eben nur darauf an, dass keine Bestimmung ausser Acht gelassen werde. Da in jedem Falle sich dies anders gestalten wird, so unterlassen wir hier, ein Beispiel zu geben.

Waaren-Scontro (kaufmännische Arithmetik).

Dasjenige Buch, welches ein Conto für jede Waare enthält, den Zu- und Abgang angibt, und so zur Controlle des Waarenlagers dient.

W'Adar (Chronologie).

Der jüdische Schaltmonat; er folgt dem Adar, und hat 29 Tage.

Währung (Metronomie).

Die Eintheilung der Münzen, seien es wirklich geprägte oder Rechnungsmünzen, z. B. der Thaler zu 30 Silbergroschen, der Francs zu 100 Centimes.

Wälzendes Pendel (Dynamik).

Siehe Wiege.

Wälzende Reibung (Statik).

Siehe Reibung.

Wärme (Mathematische Physik).

1) Einleitung.

Wir lernen die Wärme zunächst durch ihre Einwirkung auf die Gefühlsnerven kennen. Diese Wirkung in ihrer qualitativen Beschaffenheit ist, wie jede andere Empfindung, nicht zu definiren und eben nur als von jeder andern, z. B. Gesichtssinn, Gehörssinn verschieden hinzustellen. Die Einwirkung auf das Gefühl ist indess eine zu allgemeine, dem Ort und der Intensität nach zu wenig bestimmte, als dass sie zu wesentlichen Untersuchungen über die Natur der Wärme weiter benutzt werden könnte. Wichtiger sind zwei andere Einwirkungen, die uns allerdings nur mittelbar

bewusst werden. — Die Wärme ändert die Ausdehnung der Körper, und unter gewissen Bedingungen ihren Aggregatzustand, d. h. sie macht feste flüssig, flüssige luftförmig.

Wir haben uns hier zunächst an die erstere Eigenschaft, weil sie stets und bei allen Körpern stattfinden, zu halten, um das Wesen der Wärme näher kennen zu lernen.

Der Umstand, dass ein Körper sich immer mehr ausdehnen und auch wieder zusammenziehen kann, führt uns darauf, dass sein Wärmezustand sich verändern kann, der andere Umstand, dass unter dem Einflusse eines anderen Körpers der erstere an Ausdehnung gewinnen kann, während der letztere abnimmt, darauf, dass die Wärme von einem Körper zum andern überströmt. Findet eine solche Aenderung der beiden Körper nicht statt, so sagen wir, sie hätten gleiche Temperatur, ohne deshalb den jedenfalls falschen Schluss zu machen, dass ihr Wärmezustand derselbe sei. Dagegen kann von jedem Körper, so weit wir wissen, Wärme auf einen andern überströmen, falls die Wärmezustände angemessen sind. Demjenigen von beiden, dem hierbei Wärme zuströmt, schreiben wir die geringere, dem, von dem sie abströmt, die grössere Temperatur zu. Wir erkennen die erstere an dem Zunehmen, die letztere an dem Abnehmen des Volumens. Aus diesem Verhalten aber schliessen wir, dass die Wärme nicht absperrbar sei, und ihr Ueberströmen durch keine Kraft zu verhindern.

Dass die Temperatur nicht, wie es anfänglich scheinen möchte, mit der Wärme identisch sei, schliessen wir aus folgendem Verhalten.

Wir haben schon oben angeführt, dass die Wärme auch den Aggregatzustand der Körper verändere. Wasser z. B. bis zu einem gewissen Grad erwärmt, geht in Dampf über, wenn noch mehr Wärme zuströmt. Während dieses Uebergangs aber ändert die Temperatur des Wassers sich nicht, obgleich die des Körpers, welcher dem Wasser Wärme mittheilt, sich vermindert. Wir müssen also annehmen, dass dem Wasser eine gewisse Wärmemenge abgegeben ist, seine Temperatur sich aber nicht erhöht habe.

Ohne für jetzt eine Hypothese über das Wesen der Wärme sowie der Temperatur zu machen, bietet sich das Bedürfniss dar, zunächst die letztere, als dasjenige, dessen Aenderung uns zuerst in die Augen fällt, zu messen. Hierzu aber sind neue Principien nöthig.

2) Temperatur und Thermometer.

Mögen zwei Körper A und B gleiche Temperatur haben, also von keinem von beiden dem andern Wärme zuströmen. Setzen wir beide jetzt einer Wärmequelle aus, bis beide wieder in Temperaturgleichgewicht stehen; möge dabei das Volumen von A sich von 1 bis auf $1+\alpha$ vermehrt haben, das von B auf $1+\beta$, indem wir die anfänglichen Volumina mit 1 bezeichnen. Wir schliessen daraus, dass dieselbe Temperaturzunahme dazu gehöre, um den Körper A um α, als um den Körper B um β zu vergrössern. Diese Temperaturzunahme betrachten wir als Einheit.

Setzt man nun den Körper A wieder einer Wärmequelle aus, bis seine Zunahme $n\alpha$ beträgt. Es fragt sich, ob man dann sagen kann, seine Temperatur habe um n Einheiten zugenommen.

Das Criterium dafür ist leicht zu finden. Bringt man B mit A wieder in Wärmegleichgewicht, und beträgt dann die Volumenzunahme von B: $n'\beta$, so müsste B um n' Einheiten an Temperatur zugenommen haben. Da aber die Zunahme bei A und B gleich ist, muss $n=n'$ sein. Dies findet nun zwar nicht völlig genau statt, jedoch annähernd für die meisten Körper und bei denjenigen Temperaturen, in welchen sie von den Punkten, wo sie ihren Aggregatzustand ändern, einigermaassen entfernt sind. Also bei constanten Gasen, so weit wir beobachten können, immer, bei Dämpfen, die nicht der Temperatur, wo sie condensiren, nahe sind, bei flüssigen, die dem Erstarrungs- und Verdampfungspunkte nicht sehr nahe, und bei festen Körpern, wenn sie dem Schmelzpunkte sich nicht nähern.

Hieraus folgt also:

„Ein Körper hat eine Temperatur von n Einheiten, wenn sein Volumen um das $n$fache desjenigen gewachsen ist, um welches er bei einer Temperaturzunahme wächst, die wir als Einheit willkürlich annehmen, und von einer Temperatur aus, die wir ebenfalls willkürlich als den Nullpunkt bezeichnen."

Selbstverständlich aber muss sich der Körper in dem eben näher angegebenen Zustande befinden.

Es kommt jetzt zunächst auf Bestimmung des Nullpunktes und der Temperatureinheit an.

Wir haben schon oben der Eigenschaft

der Körper erwähnt, bei Aenderung ihres Aggregatzustandes keine Temperaturzunahme zu zeigen. Sie werden also beim Schmelzen und beim Verdampfen, wenn ihnen auch Wärme zuströmt, an einen Körper, der mit ihnen im Temperaturgleichgewicht ist, weder Wärme abgeben, noch ihm solche entnehmen. Man nimmt daher als Nullpunkt die Temperatur des schmelzenden Eises, als Einheit die Temperatur, welche das eben geschmolzene Wasser bis zum Verdampfen, also bis zum Siedepunkt erhitzt.

Thermometer heisst ein Instrument, welches zum Messen der Temperatur bestimmt ist. Das gewöhnlichste ist das Quecksilberthermometer, bekanntlich aus einer engen Glasröhre bestehend, die in ein weiteres Gefäss ausmündet, genau eingetheilt und mit Quecksilber gefüllt ist. Taucht man das Instrument in schmelzendes Eis, so wird die Quecksilbersäule bis zu einem Punkte sinken, den man als Nullpunkt der Scala (Gefrierpunkt) annimmt. Taucht man sie in siedendes Wasser, so hebt sich die Säule bis zu einem Punkte (Siedepunkt), der die Temperatureinheit abgibt.

Die Höhe der Säule vom Nullpunkt bis zum Siedepunkt heisst Fundamentalabstand; er wird nach der Celsius'schen (Centesimal-) Eintheilung in 100 Grade, nach der Réaumur'schen in 80 getheilt, derart, dass geringere Temperaturen als der Gefrierpunkt durch negative Zahlen bezeichnet werden. Nach Fahrenheit theilt man den Fundamentalabstand in 180 Grad, nimmt aber den Nullpunkt 32 Grad unter dem Gefrierpunkt, so dass der letztere mit +32, der Siedepunkt mit +212 bezeichnet wird.

Möge ein Körper bezüglich α, β, γ Grade nach Celsius, Réaumur und Fahrenheit haben, so hat man die Verwandlungsformeln:

$$\beta = \tfrac{4}{5}\,\alpha, \qquad \gamma = \tfrac{9}{5}\,\alpha + 32,$$
$$\alpha = \tfrac{5}{4}\,\beta, \qquad \gamma = \tfrac{9}{4}\,\beta + 32,$$
$$\alpha = \tfrac{5}{9}\,(\gamma - 32), \qquad \beta = \tfrac{4}{9}\,(\gamma - 32),$$

wo natürlich auf das Vorzeichen zu achten ist.

Quecksilber gefriert bei −40° C, und siedet bei 400° C, es ist also nur etwa von −36 bis +360° zum Messen der Temperatur zu gebrauchen. Für niedere Temperaturen gebraucht man Weingeistthermometer, die ganz wie die Quecksilberthermometer eingerichtet sind.

Die aus festen Körpern bestehenden Thermometer übergehen wir, da sie nicht als Präcisionsinstrumente zu betrachten sind. Eben so sind die meisten zum Messen hoher Wärmegrade dienenden Instrumente Pyrometer von geringer Genauigkeit. Nur das Luftthermometer kann zu diesem Zwecke mit einiger Sicherheit gebraucht werden. Ueberhaupt aber ist dies Instrument wichtig zum Vergleichen der übrigen Thermometer, da nur constante Luftarten, wie wir gesehen haben, sich in allen uns bekannten Grenzen der Temperatur proportional ausdehnen. Es muss aber zunächst auf das Verhalten der erwärmten Luft noch etwas genauer hier eingegangen werden.

Nach dem Mariotte'schen Gesetze verhalten sich die Volumina einer gegebenen Gewichtsmenge Luft V und V_0 umgekehrt wie die Druckkräfte p und p_0, welchen sie ausgesetzt ist, also die Dichtigkeiten γ und γ_0 direct wie diese Drucke, d. h.:

$$V = \frac{p_0 V_0}{p}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0 p}{p_0}.$$

Hierbei ist auf die Aenderung der Temperatur keine Rücksicht genommen. Setzen wir voraus, dass die Luft im Anfange 0 Grad Temperatur habe, und für jeden Grad Temperaturzunahme sich das Volumen von 1 auf $1+\alpha$ vermehre, so wird, wenn die Temperatur auf t Grade steigt, ohne dass der Druck sich ändert, V_0 übergehen in $V_0(1+\alpha t)$. Man hat also:

$$V = \frac{V_0\,(1+\alpha t)\,p_0}{p},$$

wo V_0 sich auf die Temperatur 0 bezieht. Beziehe sich aber V_0 auf die Temperatur t_0, und sei V_0' das auf die Temperatur 0 bezogene Volumen beim Drucke p_0, so ist:

$$V_0'(1+\alpha t_0) = V_0,$$

also wenn man in der obigen Formel V_0 mit $V_0' = \frac{V_0}{1+\alpha t_0}$ vertauscht:

$$V = \frac{V_0\,(1+\alpha t)\,p_0}{(1+\alpha t_0)\,p},$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0\,(1+\alpha t_0)\,p}{(1+\alpha t)\,p_0}.$$

Diese Formeln sind unter dem Namen des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes bekannt.

α heisst der Ausdehnungscoefficient. Wir beziehen ihn auf Centisimalgrade, und es ist nach Regnault und Magnus:

$$\alpha = \frac{11}{3000} = 0{,}003667$$

für alle constanten Gase. Derselbe ändert sich nach Regnault indess um ein Geringes bei sehr hohen Temperaturen, auch vom Drucke ist dieselbe einigermaassen abhängig. Die hier gegebene Zahl bezieht sich auf den Barometerstand 0,76 Meter. Jedoch ist diese Aenderung so gering, dass bei 0,1097 Metern $\alpha = 0{,}00365$, also fast unverändert, und erst bei 3,6556 Metern Druck $\alpha = 0{,}00371$ beträgt. Die Aenderung des Volumens für den ganzen Fundamentalabstand beträgt $100\,\alpha = \frac{11}{30}$. Für Réaumur'sche Grade würde sich:

$$\alpha = \frac{1}{80} \cdot \frac{11}{30} = 0{,}00459$$

ergeben. Wir setzen jedoch hier immer Centisimaltheilung voraus. Wird noch $p_0 = 0{,}76$ Meter gesetzt, und bemerken wir, dass bei Null Grad Wärme und diesem Barometerstande das Gewicht eines Cubikmeters atmosphärischer Luft gleich 1,2935 Kilogramm ist, so erhält man, wenn man $t_0 = 0$, $p_0 = 0{,}76$ setzt:

$$\gamma = \frac{1{,}702\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Kilogramme.}$$

Ist p in Theilen des mittleren atmosphärischen Druckes $p_0 = 0{,}76$ gegeben, so kommt:

$$\gamma = \frac{1{,}2935\,p}{1 + \alpha t};$$

gibt man aber p in Pariser Zoll, und setzt:

$$p_0 = 0{,}76 \text{ Meter} = 28{,}075 \text{ Zoll,}$$

so kommt:

$$\gamma = \frac{0{,}002849\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Pfund.}$$

Wasserdampf hat etwa $\frac{5}{8}$ der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, also für denselben ist:

$$\gamma = \frac{0{,}7821\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Kilogramme,}$$

$$\gamma = \frac{0{,}003539\,p}{1 + 0{,}00367\,t} \text{ Pfund,}$$

wo in der letzten Formel wieder p in Zollen gegeben ist.

Ein Luftthermometer besteht in der einfachsten Gestalt in einer gewöhnlichen, horizontal liegenden Thermometerröhre, welche calibrirt und an einem Ende offen ist. Sie ist mit Luft gefüllt, welche von der äussern Luft durch eine kleine Quecksilbersäule getrennt ist. Vernachlässigt man die Ausdehnung der letztern, ist V_0 das bekannte Volumen der abgesperrten Luft beim Barometerstande p_0 der äussern, und der Temperatur 0, so ist das Volumen beim Barometerstande p, und der Temperatur t:

$$V = V_0 (1 + \alpha t) \frac{p_0}{p},$$

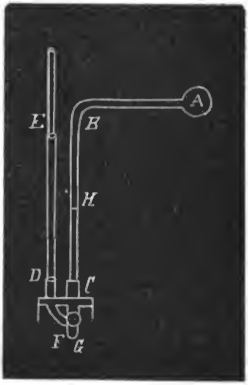
also die Volumenzunahme:

$$V - V_0 = V_0\,\alpha t + V_0 (1 + \alpha t) \frac{p_0 - p}{p}.$$

Das letzte, sehr kleine Glied rechts ist als Correction zu betrachten, und entspricht demnach das Volumen $V_0\,\alpha$ der Röhre einer Volumenzunahme um 1 Grad.

Luftpyrometer haben eine etwas complicirtere Einrichtung. Es ist (Fig. 34)

Fig. 34.



A eine hohle Platinkugel, woran sich eine enge Röhre AB setzt. Diese mündet in die weitere Röhre BC, welche mit einer anderen DE communicirt. Die Messingfassung CFD ist mit einem Hahn versehen, welcher nicht allein das Communiciren der Röhren unter einander bewirkt und aufhebt, sondern wodurch man auch Quecksilber ausfliessen lassen und eingiessen kann. AB ist mit Luft gefüllt, in BFE befindet sich Quecksilber. Führt man A in den Feuerraum, dessen Temperatur untersucht wird, so dehnt sich die Luft in AB aus. Sei V_0 das Volumen, γ_0 die Dichtigkeit derselben bei 0 Grad und dem Barometerstand p_0, sei V das Volumen bei Temperatur t und dem Drucke $p = p_0 + h$, wo h durch die Quecksilbersäule EH

gemessen wird, welche zum Drucke der äussern Luft p_0 hinzukommt, so wird die Dichtigkeit sein:

$$\gamma = \gamma_0 \frac{p_0 + h}{p_0 (1 + \alpha t)},$$

also da sich das Gewicht nicht ändert:

$$V_0 \gamma_0 = \frac{V \gamma_0 (p_0 + h)}{p_0 (1 + \alpha t)}.$$

Nehmen wir an, dass bei 0 Grad der Raum AB mit Luft gefüllt ist, so ist die Volumenzunahme $V_1 = BH$, also:

$$V = V_0 + V_1,$$

also:

$$V_0 p_0 (1 + \alpha t) = (V_0 + V_1)(p_0 + h)$$

und es ergibt sich für die Temperatur des Feuerraumes:

$$t = \frac{(V_0 + V_1)(p_0 + h) - V_0 p_0}{\alpha V_0 p_0}$$

$$= \frac{V_1 (p_0 + h) + V_0 h}{\alpha V_0 p_0},$$

Wenn man nach Pouillet das Instrument so einrichtet, dass so viel Quecksilber abfliesst, dass es in beiden Röhren gleich steht, so ist $h = 0$, also:

$$t = \frac{V_1}{\alpha V_0},$$

oder wenn so viel Quecksilber zugeleitet wird (nach Regnault), dass das Quecksilber in der Röhre BH auf derselben Höhe stehen bleibt, so ist $V_1 = 0$:

$$t = \frac{h}{\alpha p_0}.$$

Man kann die Kraft berechnen, welche ein fester Körper bei seiner Ausdehnung durch die Wärme auszuüben im Stande ist. — Ist E der Elasticitätsmodul des Körpers, F sein Querschnitt, l seine Länge und λ seine Ausdehnung, vorausgesetzt, dass der Körper prismatisch ist, so ist die Ausdehnungskraft $\frac{\lambda}{l} E \cdot F$, aber da:

$$\lambda + l = l (1 + \alpha t)$$

ist, hat man dafür:

$$\alpha t E \cdot F.$$

Die Metalle haben sehr grosse Elasticitätscoefficienten, und somit ist für sie die ausdehnende Kraft der Wärme sehr bedeutend. Crystalle, die nicht zum regelmässigen System gehören, dehnen sich auch nicht nach allen Richtungen gleichmässig aus, bei den andern Körpern aber ist dies der Fall, und somit, wenn l_1 und l_2 die Längen eines Körpers bei verschiedenen Temperaturen sind, so verhalten sich die entsprechenden Flächen wie die Quadrate, und die cubischen Inhalte wie die Cuben von l_1 und l_2. Sind also F_1 und F_2 die Flächeninhalte, V_1 und V_2 die cubischen Inhalte der Körper für die Temperaturen t_1 und t_2, so ist:

$$\frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 = \left(\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\right)^2,$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^3 = \left(\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}\right)^3.$$

Da α für feste Körper und auch für flüssige nur klein ist, kann man setzen:

$$\frac{l_1}{l_2} = (1 + \alpha t_1)(1 - \alpha t_2) = 1 + \alpha (t_1 - t_2),$$

$$\frac{F_1}{F_2} = (1 + 2\alpha t_1)(1 - 2\alpha t_2) = 1 + 2\alpha (t_1 - t_2),$$

$$\frac{V_1}{V_2} = (1 + 3\alpha t_1)(1 - 3\alpha t_2) = 1 + 3\alpha (t_1 - t_2).$$

Sonach wäre die Volumenzunahme dem Temperaturunterschiede proportional zu setzen, wenn derselbe nicht sehr gross ist.

Bei Flüssigkeiten in einem Gefässe muss man die wahre Ausdehnung von der scheinbaren, d. h. von der im Verhältniss zu dem Gefässe unterscheiden, da auch letzteres durch die Wärme ausgedehnt ist. Nehmen wir an, dass die Temperatur von t_0 in t übergehe, V_0 das anfängliche Volumen der Flüssigkeit und des Gefässes bis zum Spiegel derselben sei, V die schliessliche Temperatur der Flüssigkeit, w die des Gefässes, α, α_1 die bezüglichen Längenausdehnungscoefficienten. Es ist dann:

$$V = \left(\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0}\right)^3 V_0.$$

Sei G_0 der Querschnitt des Gefässes, h_0 die Höhe der Flüssigkeit für Temperatur t_0, G, h diese Grössen für Temperatur t, so ist:

$$V = Gh, \quad V_0 = G_0 h_0,$$

aber wegen der Ausdehnung des Gefässes:

$$G = G_0 \left(\frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha_1 t_0}\right)^2,$$

woraus sich ergibt:

$$h \left(\frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha_1 t_0}\right)^2 = \left(\frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0}\right)^3 h_0,$$

$$h = h_0 \frac{(1 + \alpha t)^3 (1 + \alpha_1 t_0)^2}{(1 + \alpha_1 t)^2 (1 + \alpha t_0)^3},$$

oder näherungsweise:

$$h = h_0 [1 + (3\alpha - 2\alpha_1)(t - t_0)].$$

Wenn aber die Scala sich auf dem Gefässe befindet, so wird die scheinbare Ausdehnung nicht in Theilen von h_0, sondern von h_1 gegeben, wo sich h_1 auf die Längenausdehnung des Gefässes bezieht. Es ist:

$$h_1 = h_0 \frac{1+\alpha_1 t}{1+\alpha_1 t_0},$$

also:

$$h = h_1 \left(\frac{(1+\alpha t)(1+\alpha_1 t_0)}{(1+\alpha t_0)(1+\alpha_1 t)}\right)^3,$$

oder näherungsweise:

$$h = h_1 [1+3(\alpha-\alpha_1)(t-t_0)],$$

so dass die wahre und scheinbare Längenausdehnung bezüglich betragen:

$$h - h_0 = (3\alpha - 2\alpha_1)(t-t_0),$$

$$h - h_1 = 3(\alpha-\alpha_1)(t-t_0).$$

Die Differenz beider:

$$h_1 - h_0 = \alpha_1 (t-t_0)$$

gibt also den Ausdehnungscoefficienten des Gefässes.

Für Quecksilber finden Dulong und Petit durch Vergleichung der Höhe zweier communicirenden Quecksilbersäulen von ungleicher Temperatur:

von 0 bis 100 Grad:

$$3\alpha = \tfrac{1}{5550} = 0{,}00018018,$$

von 100 bis 200:

$$3\alpha = \tfrac{1}{5425} = 0{,}00018433,$$

von 200 bis 300:

$$3\alpha = \tfrac{1}{5300} = 0{,}00018868.$$

Dagegen für die scheinbare Ausdehnung:

$$3(\alpha-\alpha_1) = \tfrac{1}{6480} = 0{,}00015432,$$

woraus sich der Ausdehnungscoefficient des Glases:

$$\alpha_1 = 0{,}00000862,$$

ergeben würde. Nach Regnault ist derselbe sehr unbestimmt, und man hat:

$$3\alpha_1 = 0{,}000019026 \text{ bis } 0{,}000026025.$$

Man kann aber auch eine Formel für Flüssigkeiten suchen, welche höhere Potenzen von t enthält, derart, dass sie in weitern Grenzen die Ausdehnung gibt. So findet Regnault fürs Quecksilber:

$$V = V_0 (1 + 0{,}000179007\, t + 0{,}0000000252316\, t^2)$$

wo V_0 sich auf die Temperatur Null bezieht.

Andere Flüssigkeiten dehnen sich noch weniger proportional der Temperaturzunahme aus.

Die ganze (cubische) Volumenzunahme von 0 bis 100 Grad beträgt für:

Oliven- nnd Leinöl	0,080
Schwefelsäure von 1,85 spec. Gewicht	0,060
Alkohol von 0,817 spec. Gewicht	0,1112
Schwefeläther	0,0700
Kochsalzlösung (gesättigt)	0,050
Quecksilber	0,018018
Wasser	0,04775

Am regelmässigsten ist die Ausdehnung des Wassers. Seine Dichtigkeit nimmt zwischen 0 und 4 Grad sogar zu.

Dieses Verhalten sucht man durch empirische Formeln auszudrücken. So findet Hellström für die Temperaturen von 0 bis 30 Grad das cubische Volumen:

$$V = V_0 (1 - 0{,}000057577\, t + 0{,}0000075601\, t^2 - 0{,}00000003509\, t^3),$$

dagegen zwischen 30 und 100 Grad:

$$V = V_0 (1 - 0{,}0000094178\, t + 0{,}00000533661\, t^2 - 0{,}0000000104086\, t^3),$$

wo V_0 auf 0 Grad geht.

Hiernach ist bei 3,9 Grad die grösste Dichtigkeit. Kopp findet dagegen zwischen 0 und 25 Grad:

$$V = V_0 (1 - 0{,}000061045\, t + 0{,}0000077183\, t^2 - 0{,}00000003734\, t^3),$$

nnd danach die grösste Dichtigkeit bei 4,08 Grad.

Für feste Körper ist die Volumenzunahme noch viel kleiner als bei flüssigen. Die folgende Tafel gibt die Längenzunahme einiger Körper, wenn die Temperatur von 0 auf 100 Grad steigt.

Platin, nach Borda	$\frac{1}{1167}$
„ nach Dulong und Petit	$\frac{1}{1131}$
Glas	$\frac{1}{1161}$
Stahl, ungehärtet	$\frac{1}{927}$
„ gehärtet	$\frac{1}{807}$
Gusseisen	$\frac{1}{901}$
Stabeissn	$\frac{1}{846}$
Gold	$\frac{1}{682}$
Kupfer	$\frac{1}{582}$
Messing	$\frac{1}{535}$
Silber	$\frac{1}{524}$
Blei	$\frac{1}{351}$
Zink	$\frac{1}{340}$

Zink hat also die grösste, Platina und Glas die kleinste Ausdehuung.

3) Wärme, specifische, gebundene und freie Wärme.

Bei den vielen Lücken, welche die Theorie der Wärme und namentlich die Definition der darin vorkommenden Ausdrücke bietet, scheint es gerathen, die Entstehung dieser Ausdrücke zu verfolgen.

Nach dem im vorigen Abschnitte Gesagten müssen wir, um die Temperatur scharf zu definiren, von einem ganz bestimmten Stoffe, am besten von einem luftförmigen, z. B. von der atmosphärischen Luft ausgehen. Wir bezeichnen also als Temperatureinheit der atmosphärischen Luft eine gewisse Volumenzunahme. Ein beliebiger Körper aber hat eine Temperatur von n Einheiten oder Graden, wenn er an atmosphärische Luft, welche vom Nullpunkt aus um n Einheiten ausgedehnt ist, weder Wärme abgibt, noch solche von ihr empfängt.

Es ist jetzt auf die Definition und Messung der Wärme selbst näher einzugehen.

Der früheren Vorstellung, dass die Wärme ein Stoff sei, schliesst sich die Betrachtung an, dass dieselbe zwar von Körper zu Körper über-, aber nie verloren gehen oder sich vermindern könne.

Man muss nun annehmen, dass, um einem Körper eine gewisse Temperaturzunahme zu geben, wenigstens in den Grenzen, wo er sich dieser Zunahme proportional ausdehnt, auch eine derselben und seiner Masse proportionale Wärmemenge nöthig sei, dass ferner, um eine gewisse Masse eines Körpers von dem festen in den flüssigen, und von dem flüssigen in den luftförmigen Zustand zu bringen, eine bestimmte Wärmemenge, die dieser Masse proportional ist, gehört. Dies ist folgendermaassen durch die Erfahrung zu begründen.

Um z B. eine gewisse Masse Eis zum Schmelzen zu bringen, verliert die Wärmequelle, welche die dazu nöthige Wärme abgibt, eine gewisse Anzahl von Temperaturgraden, welche ihrer eigenen Masse umgekehrt, der des schmelzenden Eises also direct proportional ist. Das schmelzende Eis aber erhält dabei keine Temperaturzunahme. Ist m die Temperatur des Eises, M die der Wärmequelle, t die anfängliche, t_1 die schliessliche Temperatur, so ist immer $\frac{m}{M}(t-t_1)$ eine constante Grösse, also, wenn M gleich der Einheit, $m(t-t_1)$. Wir schliessen, dass $m(t-t_1)$ das Maass der auf das Schmelzen verwendeten Wärme, die man gebundene Wärme nennt, ist. In der That wissen wir, dass wenn eine Gewichtseinheit Wasser friert, der Masse m die Temperatur $t-t_1$ wieder zugeführt werden kann, was man auch ausdrückt, die gebundene Wärme sei wieder frei geworden. Ferner weiss man, dass wenn diese Wärmemenge $m(t-t_1)$ einem andern Körper von der Gewichtseinheit zugeführt wird, er um eine gewisse Anzahl von Graden r erwärmt wird, wobei r von der Natur des erwärmten Körpers abhängt, Wenn derselbe aber weder seinen Aggregatzustand ändert, noch sich anders als der Temperatur proportional ausdehnt (womit wir jetzt eine bestimmte Vorstellung nach dem Vorigen verbinden), so wird die αfache Wärmemenge $\alpha m(t-t_1)$ (d. h. diejenige, welche die Temperatur der Masse m um $\alpha(t-t_1)$ Grad erniedrigt, oder die der Masse αm um $t-t_1$ Grad steigert) seine eigene Temperatur um αr Grad erhöhen.

Hieraus ist zu folgern:

„Die einem Körper in den Grenzen, wo er sich der Temperatur proportional

ausdehnt, zugeführte und von ihm abgegebene Wärme ist seiner Masse und seiner Temperaturänderung proportional."

Die einem schmelzenden oder verdampfenden Körper zugeführte gebundene Wärme, welche seine Temperatur nicht ändert, ist der Masse des in seinem Aggregatzustande veränderten Körpers proportional und gleich derjenigen, welche, wenn der Körper seinen alten Aggregatzustand wieder annimmt, wieder frei wird, also die Temperatur eines anderen Körpers erhöhen kann.

Da gleiche Wärmemengen die Temperaturen verschiedener Körper verschieden erhöhen, so müssen wir uns, um die Wärmemengen zu messen, auf einen ganz bestimmten Körper beziehen. Gewöhnlich nimmt man dazu Wasser (also im flüssigen Zustande). Die Wärmemenge, welche ein Pfund Wasser um 1 Grad erhöht, ist die Wärmeeinheit (Caloric). Sei m eine Gewichtsmenge Wasser, die von t auf t_1 Grad sinkt, und während dessen also die Wärmemenge $m(t-t_1)$ an einen Körper abgibt, der dabei von τ auf τ_1 Grade steige, und die Masse μ habe, so braucht man also eine Wärmemenge $\frac{m}{\mu}(t-t_1)$, um die Masseneinheit dieses Körpers von τ auf τ_1 Grad, folglich die Wärmemenge $\frac{m}{\mu}\frac{(t-t_1)}{(\tau-\tau_1)}$, um diese Masseneinheit um einen Grad Temperatur zu erhöhen. Diese Wärmemenge nennen wir specifische Wärme oder Wärmecapacität des bezeichneten Körpers. Die specifische Wärme des Wassers ist also gleich 1. Ein Beispiel wird dies klar machen.

Man mische 1 Pfund Wasser von 10 Grad mit 2 Pfund Eisen (in der Gestalt von Eisenfeile) von 36 Grad. Nach Herstellung des Temperaturgleichgewichts möge das Gemenge die Temperatur von 15 Grad haben. Es soll die specifische Wärme des Eisens bestimmt werden.

Sei dieselbe gleich x, so hat das Eisen die Wärmemenge $2x(36-15)$ verloren, dagegen hat das Wasser die Wärmemenge $15-10$ gewonnen, also:

$$2x(36-15) = 15-10,$$

$$x = \frac{15-10}{2(36-15)} = \frac{5}{42} = 0{,}12.$$

Im Allgemeinen seien a und α die specifischen Wärmen zweier Körper, m und μ ihre Gewichte, habe der erste die Temperatur t, der andere die Temperatur τ, und sei T die gemeinschaftliche Temperatur nach Herstellung des Temperaturgleichgewichts, wobei Abgabe von Wärme an einen dritten Körper ausgeschlossen ist, so hat man:

$$m\,a(T-t) = \mu\,\alpha(\tau-T).$$

Offenbar kann auf diese Weise die specifische Wärme der Körper sowohl bestimmt werden, als auch die Temperatur der Körper von hohen Wärmegraden untersucht werden.

Man tauche z. B. eine glühende eiserne Stange von 1 Pfund, in 100 Pfund Wasser von 0 Grad Wärme. Habe nach Herstellung des Temperaturgleichgewichtes beides 4 Grad Temperatur, so ist:

$$m=100,\quad a=1,\quad T=4,\quad t=0,$$
$$\alpha=0{,}12,\quad \mu=1,$$

also:

$$100\cdot 80 = 0{,}12(\tau-80),$$

$$\tau = \frac{400+9{,}6}{0{,}12} = 3413.$$

Es ist so möglich, wenigstens annähernd sehr hohe Temperaturgrade durch das gewöhnliche Quecksilberthermometer zu bestimmen.

Ein ähnliches Verfahren gibt auch diejenige Wärmemenge, welche zum Schmelzen der Körper nöthig ist.

Seien m, a, t, t_1 Masse specifischer Wärme und anfängliche und schliessliche Temperatur des Körpers, welcher die Wärme zum Schmelzen abgibt, μ die Masse, welche also keine Temperaturveränderung leidet, so ist die verbrauchte Wärmemenge:

$$m\,a(t-t_1) = \mu\,w,$$

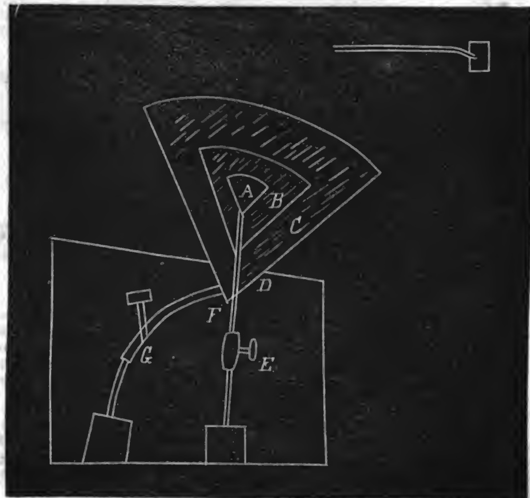
wenn w die zum Schmelzen der Gewichtseinheit nöthige Wärmemenge ist.

Fürs Wasser ist $a=1$, so z. B. erhält man für schmelzendes Eis $w=79$ Grad, d. h. soviel Wärme, als die Gewichtseinheit Wasser um 79 Grad erhöht. Diese Wärmemenge heisst latente Wärme des Wassers. Man kann aber auch die Masse μ des schmelzenden Körpers von Temperatur τ und specifischer Wärme α (im flüssigen Zustande) mit der obigen Masse mengen, welche die Wärme abgibt, und warten, bis sowohl die ganze Masse geschmolzen, als auch das Temperaturgleichgewicht hergestellt sei. Sei T die gemeinschaftliche Temperatur, dann ist offenbar:

$$m\,a(t-T) = \mu\,\alpha(T-\tau) + \mu\,w.$$

Zur wirklichen Ermittelung der specifischen Wärme der Körper kann man sowohl das Mischungsverfahren anwenden, als auch die Schmelzmethode, wel-

Fig. 35.



che auf den zuletzt angeführten Prinzipien und Formeln beruht.

Zu dem Ende dient das Calorimeter, welches von Laplace und Lavoisier eingeführt ist. — Von zwei Gefässen *C* und *B* (Fig. 35) steckt das letztere innerhalb des ersteren. In *B* liegt der zu untersuchende Körper *A* und eine Quantität Eis, in *C* eine andere Quantität Eis, welche eben nur die Erwärmung durch die äussere Umgebung verhindern soll. Mit *B* steht unten ein kleines, durch einen Hahn verschlossenes und durch ein Sieb getrenntes Behältniss *D* in Verbindung, welches das abfliessende Wasser aufnimmt. *B* und *C* werden mit kleingestossenem Eise von 0 Grad gefüllt, Körper *A* hineingethan (in einer Büchse, wenn er flüssig ist), der Deckel wird auch mit Eis belegt. Nun geht *A* von Temperatur *t* auf 0 über, und dabei fliesst Schmelzungswasser in das Gefäss *D*. Sei *a* die Capacität, *m* die Masse von *A*, μ die geschmolzene Eismasse, so ist:

$$79\mu = m\,a\,t, \quad a = \frac{79\mu}{mt},$$

Ist der Körper in einem Gefässe, so muss auch dessen Wärme in Rechnung gebracht werden. Ist *M* seine Masse, *T* seine Temperatur, *b* seine Capacität, so ist:

$$79\mu = m\,a\,t + MBT,$$

$$a = \frac{79\mu - MBT}{mt}.$$

Die Mischungsmethode gibt jedoch die sichersten Resultate. Regnault findet auf diese Weise folgende specifischen Wärmen:

Eisen	0,11379
Zink	0,09555
Kupfer	0,09515
Messing	0,09391
Silber	0,05701
Blei	0,03140
Wismuth	0,03084
Antimon	0,05077
Zinn	0,05623
Platin	0,03243
Gold	0,03244
Schwefel	0,20259

Kohlen	0,24111	
Koaks	0,20307	
Graphit	0,20187	
Marmor	0,20989	
Kalk (ungelöscht)	0,2169	nach Lavoisier
Alkohol von 0,81 spec Gewicht	0,700	nach Dalton
Eichenholz	0,570	nach Mayer
Glas	0,19768	
Quecksilber	0,03332	
Terpentinöl	0,42593	

Die festen Körper haben also geringere specifische Wärme als Flüssigkeiten, die geringsten die Metalle. Uebrigens ändert sich das specifische Gewicht der festen und flüssigen Körper mit der Dichtigkeit, unh also auch mit der Temperatur, und zwar nimmt sie zu, wenn die Dichtigkeit abnimmt. So findet für Wasser von *t* Grad Temperatur Regnault den Ausdruck für die specifische Wärme:

$$a = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2.$$

Die specifische Wärme der Gase kann durch ein auf anderen Prinzipien beruhendes Calorimeter gemessen werden, durch welches man das Gas strömen lässt. Man muss hier unterscheiden zwischen specifischer Wärme unter constantem Druck, d. h. wenn das Gas in einem Gefäss sich befindet, wo es einen gewissen Druck erleidet, sich also mit zunehmender Temperatur ausdehnen kann, und specifischer Wärme unter constantem Volumen, d. h. wenn das Gas sich in einem fest verschlossenen Gefässe befindet, sich also nicht ausdehnen kann.

Bei constanten Gasen und Dämpfen, die fern von dem Punkte sind, wo sie flüssig werden, ist die specifische Wärme unabhängig von der Temperatur. Man bezieht aber auch die specifische Wärme zuweilen nicht aufs Gewicht, sondern aufs Volumen, d. h. man versteht die Wärmemenge darunter, welche die Volumeneinheit des Gases um 1 Grad erwärmt.

Regnault findet für verschiedene Gase unter constantem Drucke die specifische Wärme:

	Specifische Wärme:		
	nach Gewicht	nach Volumen	Dichtigkeit
atmosphärische Luft	0,2377	0.2377	1,0000
Sauerstoff	0,2182	0,2412	1,1056
Stickstoff	0,2440	0,2370	0,9713
Wasserstoff	3,4046	0,2356	0,0692
Kohlensäure	0,2164	0.3308	1,5290
Kohlenoxyd	0,2479	0.2399	0,9674
Wasserdampf	0,4750	0,2950	0,6210

Die Zahlen in der zweiten Rubrik entstehen selbstverständlich durch Multiplication derer in der ersten und dritten. Auffallend ist, dass bei den constanten Gasen die nach Volumen berechnete specifische Wärme fast gleich ist. Wäre dies vollständig der Fall, so könnte man den Satz aussprechen:

„Um ein gewisses Volumen eines constanten Gases von beliebiger Beschaffenheit um eine gewisse Temperatur zu erhöhen, ist immer dieselbe Wärmemenge nöthig.“

Will man diesen Satz für die aufs Gewicht bezogene specifische Wärme anwenden, so ist, wenn *s* dieselbe, *d* die Dichtigkeit vorstellt, das Product *sd* nahezu constant. Bei Gasen verhalten sich bekanntlich die Dichtigkeiten wie die Atomgewichte. Dies Gesetz spricht sich also in seiner Erweiterung so aus:

„Bei allen einfachen und bei allen ähnlich chemisch zusammengesetzten Körpern ist das Product aus Atomgewicht und specifischer Wärme fast constant.“

Für einfache Körper ist dies Gesetz von Dulong und Petit ausgesprochen.

Der constante Werth des Productes ist im mittleren Werthe etwa 40. Die Ausdehnung auf zusammengesetzte Körper rührt von Neumann und Regnault her. Man findet für Oxyde etwa 72, wenn die Zusammensetzung $R\,O$ ist (R stellt die Basis vor). Ist sie $R_2\,O_3$, so erhält man 170, für $R\,O_2$: 86; bei Schwefelmetallen von der Form RS: 74 u. s. w.

Das Calorimeter für Gase ist folgendermaassen beschaffen. Das Gas wird auf 100 Grad gebracht, und in einem Rohr mit vielen Windungen durch einen Wasserbehälter geleitet; am andern Ende entweicht es wieder. Die Temperatur des Wassers erhöht sich so lange, bis es eine constante Temperatur annimmt, d. h. so viel Wärme vom Gas erhält, als es an die Umgebung abgibt. Wenn verschiedene Gase hierbei mit gleicher Schnelligkeit strömen, so werden die Temperaturerhöhungen den specifischen Wärmen der Gase proportional sein. Dasselbe Mittel findet für Dämpfe Anwendung.

Was die specifische Wärme bei constantem Volumen anbetrifft, so lässt sie sich wegen der geringen Leitung der Gase nicht direct finden. Es ist das Verhältniss beider specifischen Wärmen $\frac{c}{c_1}$ daher auf verschiedenen Wegen gefunden, von denen weiter unten die Rede sein wird.

Nach Masson und Regnault ist für atmosphärische Luft:

$$\frac{c}{c_1} = 1{,}41, \quad c_1 = 0{,}1687,$$

also auch c_1 constant.

Gehen wir jetzt zum Schmelzen und Verdampfen der Körper über.

Feste Körper gehen in den flüssigen Zustand über, wenn sie eine bestimmte Temperatur erreicht haben. Diese Temperatur ist von der Natur des Körpers, also auch seiner chemischen Beschaffenheit, in sehr geringem Maasse auch vom Drucke abhängig, unter welchem das Schmelzen vorgeht. Sie heisst Schmelzpunkt, beim Wasser auch Gefrierpunkt. Die Schmelzpunkte verschiedener Körper sind:

Platin	+2500°
Schmiedeeisen	+1500° - 1600°
Stahl	+1300° - 1400°
Gusseisen	+1050° - 1200°
Kupfer	+1100° - 1200°
Silber	+1000°
Bronze	+ 900°
Antimon	+ 500°
Zink	+400°
Blei	+330°
Wismuth	+260°
Zinn	+230°
Schwefel	+109°
Gelber Wachs	+ 61°
Phosphor	+ 43°
Seife	+ 33°
Eis	0°
Terpentinöl	− 10°
Quecksilber	− 39°
Schwefeläther	− 44°
Kohlensäure	−100°

Bei einigen Metallen geht dem Schmelzen das Glühen, Roth- und Weissglühen vorher. Pouillet findet beim Eisen für diese Zustände folgende Temperaturen:

Beginnendes Rothglühen	525°
Dunkles Rothglühen	700°
Beginnendes Kirschroth	800°
Kirschroth	900°
Helles Kirschroth	1000°
Dunkles Orangeglühen	1100°
Helles Orangeglühen	1200°
Weissglühen	1300°
Helles Weissglühen	1400°
Blendendes Weissglühen	1500°

Bei Legirungen ist je nach der Mischung der Schmelzpunkt verschieden. Da man denselben kennt, kann man behufs pyrometrischer Messungen sich eine Schmelzbarkeitsscala anfertigen. Leichtflüssige Legirungen erhält man aus Blei, Zinn, Wismuth, schwerflüssige aus Gold und Platin. Die ersteren schmelzen leichter als einfache Metalle, die letzteren schwerer als Gold.

Es folgen hier die Schmelzpunkte einiger Legirungen der ersteren Art.

Theile:	Blei	Zinn	Wismuth	Schmelzpunkt
	1	1	4	94°
	5	3	8	100°
	2	3	5	100°
	1	4	5	118°,9
	1	0	1	141°,2
	1	1	0	241°
	0	2	1	167°,7
	1	3	0	167°,7
	0	3	2	200°

Die zweite Mischung ist das sogenannte Rose'sche Metall.

Wasser mit Salzen gemischt hat einen niedrigeren Schmelz- oder Getrierpunkt als 0 Grad, Meerwasser gefriert aus diesem Grunde erst bei −2,5 Grad. Mischt man Schnee von geringerer Kälte mit Salz, so tritt also ein Schmelzen und durch die hierdurch gebundene Wärme eine Erkältung ein. Hierauf beruhen die Kältemischungen.

Die meisten Körper dehnen sich beim Schmelzen aus und ziehen sich beim Gefrieren zusammen. Umgekehrt verhalten sich Wismuth, Gusseisen, namentlich aber Eis, das beim Gefrieren sein Volumen um $\frac{1}{13}$ vermehrt.

Nicht alle festen Körper schmelzen, sondern ändern stark erhitzt ihre chemische Beschaffenheit (oxydiren, oder zersetzen sich). Von einfachen kommen z. B. Kohle und Kiesel nicht im flüssigen Zustande vor.

Was die beim Schmelzen gebundene und beim Erstarren wieder freiwerdende Wärme anbetrifft, so beträgt diese beim Wasser, wie schon angedeutet, 79 Grad. Bei anderen Körpern mangeln genaue Untersuchungen. Es wird angegeben fürs Quecksilber 86¾ Grad, für Blei 90 Grad.

Wir haben schon der Kältemischungen erwähnt. 3 Theile Schnee von 0 Grad und 1 Theil Kochsalz binden beim Schmelzen 17,7 Grad, da −17,7 Grad die Temperatur der Mischung ist. 2 Theile Schnee und 3 Theile salzsauren Kalkes haben −28 Grad.

In den luftförmigen Zustand, Dampf, gehen die Körper aus dem flüssigen bei allen Temperaturen, so viel man weiss, über. Bei einigen Körpern, z B. beim Eise, ist ein solcher Uebergang in den luftförmigen Zustand auch vom festen aus nachgewiesen. Bei einer gewissen Temperatur, dem Siedepunkte, erfolgt diese Verwandlung aber von allen Theilen des Körpers aus, und mit grosser Schnelligkeit, während sie bei niedrigeren Temperaturen nur von der Oberfläche, und um desto langsamer, je geringer die Temperatur ist, eintritt. Diese Verwandlung nennt man Verdunsten, und die beim Siedepunkt eintretende Verdampfen. Im letztern Falle sagt man, dass die Flüssigkeit siede. Der Siedepunkt ist nicht allein von der Beschaffenheit des Körpers, sondern auch vom Drucke, den die Flüssigkeit leidet, abhängig, so dass die Temperatur des Siedepunktes mit letzterem zunimmt. — Die bei niedrigeren Temperaturen gebildeten Dämpfe haben auch geringere Spannkraft. Der Siedepunkt tritt ein, wenn diese Spannkraft der des Druckes auf die Flüssigkeit gleich ist, und eben darum erfolgt das Sieden von der ganzen Flüssigkeit aus, da der Druck überwunden ist. — Umgekehrt ist mechanischer Druck ebenso wie Wärmeabnahme im Stande, Dämpfe flüssig zu machen (zu condensiren) Wie beim Verdampfen oder Verdunsten Wärme gebunden wird, so wird sie beim Condensiren wieder frei. Diese gebundene Wärme hängt von der Temperatur ab, unter welcher das Verdunsten erfolgt.

Man nahm früher an, dass die Summen der latenten und freien Wärme bei allen Dämpfen, die aus derselben Flüssigkeit entstehen, constant sei. Wenn also z. B. Wasser im Siedepunkt von 100 Grad, 531 Grad latente Wärme, also 100+531=631 Grad Gesammtwärme habe, so müsste demnach dies Quantum allen Wasserdämpfen zukommen. Wenn sie also unter t Grad Wärme verdampfen, wo dann t die freie Wärme ist, so müsste die latente Wärme $631-t$ betragen. — Regnaults neuere Untersuchungen haben dies jedoch nicht bestätigt; derselbe gibt als Gesammtwärme des Wasserdampfes die Grösse:

$$U = 6.065 + 0{,}305\,t.$$

Was seine latente Wärme anbetrifft, so kommt es hierbei auf die Bildungsart des Dampfes an. Nehmen wir an, derselbe bilde sich unter constantem Drucke derart, dass Wasser von 0 Grad erst bis t Grad erwärmt wird, was ein Wärmequantum v erfordert, und dass dann dies Wasser (dem wir die Gewichtseinheit geben) verdunste, was die gebundene Wärme w erfordert. Dann ist $w = U - v$.

Ist C die specifische Wärme des Wassers, so hatten wir:

$$C = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}0000009\,t^2.$$

Offenbar ist nun:

$$v = \int_0^t c\,dt,$$

da dem Zuwachs dt der Temperatur die Wärmemenge $c\,dt$ entspricht, also:

$$v = t + 0.0002\,t^2 + 0{,}0000003\,t^3,$$

und die latente Wärme:

$$w = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3,$$

wofür Clausius abgekürzt setzt:

$$w = 607 - 0{,}708\,t.$$

Also die latente Wärme des im Siede-

punkte gebildeten Dampfes, wo $t=100$, ergibt sich:

$$w = 606{,}5 - 69{,}5 = 537$$

Die latente Wärme einiger anderen Dämpfe im Siedepunkt bestimmt Brix: Alkoholdampf 219 Grad, Terpentinöldampf 74 Grad.

Es ergibt sich durch Vergleiche das Gesetz, dass die latente Wärme der Dämpfe den Dichtigkeiten derselben fast umgekehrt proportional sind; da z. B. Alkoholdampf $\frac{1}{2{,}58}$ mal so dicht als Wasserdampf, so ist die latente Wärme des ersteren gleich.

$$\frac{537}{2\,58} = 208,$$

was nahe der Erfahrung entspricht.

4) Verbreitung der Wärme durch Strahlung und Leitung.

Wir haben bisher uns jeder Hypothese über die Natur der Wärme enthalten, und nur bei Definitionen auf die Vorstellungen der Emanationstheorie, der sie ihr Entstehen verdanken, hingewiesen. Die hier folgenden Verbreitungsgesetze schliessen sich aber so genau der Verbreitung des Lichtes an, dass es unumgänglich nöthig wird, beide Erscheinungen derselben Ursache, der Wellenbewegung des Aethers zuzuschreiben. Wir werden dies hier thun.

Es ist also anzunehmen, dass die Wärme in Wellenbewegungen des Aethers bestehe. Dieselben bringen auf die Gefühlsnerven wirkend Wärmeempfindung hervor, wie sie auf das Auge wirkend die Lichtempfindung erregen. Sonach muss sich die Wärme auch strahlenförmig von der Wärmequelle aus verbreiten, von den Körpern theilweise gebrochen, theilweise reflectirt werden. Die Körper sind der Wärme gegenüber also diatherm (d. h. sie lassen die Wärme gut durchstrahlen), oder reflectiren sie vorzugsweise. Ein drittes Verhalten wird gleich erwähnt werden.

Die Brechung der Wärmestrahlen ist eine verschiedene, d. h. ein einfallender Wärmestrahl wird beim Brechen zerlegt, und man muss aus diesem Grunde wie beim Lichte „Farben" annehmen. Alles dies ist durch Versuche bestätigt, namentlich durch Melloni, welcher sich bei den Messungen der Thermosäule bedient hat. — Aber nicht dieselben Körper, welche Licht gut durchlassen, thun dies auch mit der Wärme. Der Grund ist folgender.

Die Lichtstrahlen haben eine ungleiche wärmende Kraft, die von grösserer Schwingungsdauer, also namentlich die rothen, eine grössere, als die schneller schwingenden violetten. Die wärmende Kraft also verhält sich entgegengesetzt der chemischen. Ferner gibt es Strahlen, die noch langsamer schwingen, und keine Licht-, wohl aber Wärmewirkungen ausüben.

Dem Lichte gleich verhält sich die Wärme auch in folgender Beziehung.

Bekanntlich ist die Summe der Intensität des gebrochenen und reflectirten Lichtes der des einfallenden nicht gleich, und man nimmt daher an, dass ein Theil des letztern von den Körpern absorbirt wäre. Genau dasselbe tritt bei der Wärme ein. Während aber das absorbirte Licht als solches nicht bei den Körpern nachzuweisen ist, verbleibt die absorbirte Wärme als solche dem absorbirenden Körper; derselbe erscheint mit ihr als ein solcher, von dem selbst Wärmestrahlen ausgehen. Das Verhalten hierbei ist also folgendes. Wenn ein Körper, etwa eine Metallplatte, einer Wärmequelle, z. B. einem Ofen, gegenübergestellt wird, so wird man hinter derselben stehend die gebrochene, vor derselben die reflectirte Wärme empfinden. Beide verschwinden, wenn man die Platte von der Wärmequelle entfernt. Ist sie aber der letzteren längere Zeit ausgesetzt gewesen, so wird die Platte nicht auf ihren früheren Zustand erkaltet sein, sondern sich die Temperatur durch absorbirte Wärme in einer Weise gesteigert haben, dass sie selbst die Temperatur der Wärmequelle angenommen haben kann. Das Verhalten der Körper der Wärme gegenüber ist also das der sogenannten Lichtmagnete in Bezug aufs Licht, und somit auch hier nichts specifisch Verschiedenes bei beiden Erscheinungen.

Die Absorption erklärt auch die Wärmeleitung der Körper. Ein Körper, der an seiner Oberfläche erwärmt ist, wird ins Innere und zu den ihn etwa berührenden Körpern durch Strahlung Wärme senden. Nehmen wir nun an, dass diese Körper nur sehr wenig Wärmestrahlen brechen, so wird sich die Wärme einzig durch Absorption verbreiten können, d. h. der der Oberfläche nächste Körpertheil absorbirt von den Wärmestrahlen derselben, von diesem Theile geht Wärme aus, welche der nächste absorbirt, und so fort durch den ganzen Körper, bis Temperaturgleichgewicht stattfindet.

Die Leitungsfähigkeit der Körper, d. h. ihre Fähigkeit, die Wärme durch Absorption von Punkt zu Punkt zu verbreiten, wird natürlich eine grössere oder geringere sein, und wir unterscheiden daher gute und schlechte Leiter. Es folgt hieraus auch, dass die Wärme nicht absperrbar ist, selbst wenn man einen Körper mit andern umgeben könnte, die gar keine Wärmestrahlen durchlassen, würde die Absorption, d. h. die Leitung hier eintreten.

Was das Verhalten der einzelnen Körper in Bezug auf diese Erscheinungen anbetrifft, so sind darüber vielfache Untersuchungen angestellt. Als treffliches Mittel, kleine Temperaturänderungen zu messen, dient die oben erwähnte Thermosäule, der Ausschlag einer damit verbundenen Magnetnadel gibt die Temperaturänderung hierbei an.

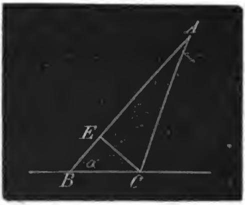
Zunächst zeigen sich hier selbstverständlich wiederholt die beim Lichte hervortretenden Gesetze. Die Intensität der Strahlen nimmt ab, wie das Quadrat der Entfernung vom wärmegebenden Punkte zunimmt.

Die Ausstrahlung von einem Körper geschieht wenigstens, wenn der Körper nicht diatherm ist, nur von der Oberfläche, richtet sich nach der Natur derselben und nimmt mit der Temperatur des Körpers zu, ist aber von der der Umgebung unabhängig. Metalle haben das Ausstrahlungsvermögen im höheren Maasse, als deren Oxyde, Wasser mehr als Glas, rauhe Oberflächen mehr als glatte, was sich daraus erklärt, dass die Rauhheit in der That die Oberfläche vergrössert. Nach Meloni ist das Ausstrahlungsvermögen am grössten beim Kiehnruss. Setzt man dasselbe gleich 100, so ist das von Bleiweiss auch 100, Hausenblase 91, Tusche 85, Gummilack 72, Metall 12.

Nicht alle Strahlen haben gleiche Intensität, und zwar die schief austretenden die geringere. Dies erklärt sich dadurch, dass die senkrecht austretenden keine Interferenz durch die nächsten erleiden. Tritt aber Strahl *AB* (Fig. 36) unter Winkel α aus, so wird der nächste *AC* in *A* Interferenz bewirken, wenn der Längenunterschied $BE = BC \cdot \cos\alpha$ gleich der halben Wellenlänge ist, und die Interferenz ist desto vollständiger, je geringer der Richtungsunterschied, d. h. je kleiner *BC* oder jemehr sich α der Null nähert, also je schiefer der Strahl austritt.

Die Durchstrahlung ist, wie schon oben gesagt, nicht mit der Durchsichtigkeit übereinstimmend. Am diathermsten verhält sich Steinsalz, Kiehnruss ist sehr diatherm, obgleich es kein Licht hindurchlässt, Metalle sind atherm. Uebrigens hängt die Diathermität von der Schwingungsdauer (Farbe) der Wärmestrahlen ab.

Fig. 36.



Dass bei der Brechung die Wärmestrahlen weniger als das Licht gebrochen werden, folgt aus der geringeren Schwingungsdauer derselben.

Die Absorption ist natürlich grösser bei den athermen Körpern, als bei den diathermen, sie ist aber auch proportional dem Ausstrahlungsvermögen, und zwar findet dies sogar für die Strahlen von einer gewissen Schwingungsdauer einzeln statt. Es erklärt sich dies leicht dadurch, dass die Absorption als ein Mitschwingen des absorbirenden Körpers aufzufassen ist. Wie aber eine Saite vermöge ihrer Länge und Beschaffenheit nur für gewisse Töne, die sich zu ihr verbreiten, in Mitschwingung geräth, ist dies auch in Bezug auf Licht- und Wärmeschwingungen vermöge der Beschaffenheit der Körper der Fall, und es ist klar, dass die Körper, welche direct in gewisse Schwingungen versetzt werden können (ausstrahlen), eben so leicht in Mitschwingung der sich um sie verbreitenden Wellen gerathen, was ja eben die Absorption ist. — Steinsalz absorbirt, wie es scheint, alle Wärmestrahlen gleichmässig.

Die Reflection ist regelmässig bei glatten, unregelmässig bei rauhen Körpern, ganz wie das Licht; am grössten ist sie bei den Metallen. Sei das Reflexionsvermögen des polirten Stahls $=100$, so ist das des Silbers 90, des Stahls 70, des Glases 10, des Kiehnrusses 0.

Fügen wir endlich noch hinzu, dass man sich von der Polarisation der Wärme durch Hindurchlassung derselben durch eine Schicht dünner Glimmerblättchen

überzeugt hat. Zur Concentrirung der Wärmestrahlen dienen Linsen von Steinsalz, welches die Wärme besser als Glas hindurchlässt.

Da die Ausstrahlung, wie wir gesehen haben, ganz unabhängig von der Temperatur der Umgebung geschieht, so kann nur dann Wärmegleichgewicht, also Gleichheit der Temperatur stattfinden, wenn der Körper soviel Wärme von der Umgebung zurückerhält, als er ausstrahlt. Dies Gleichgewicht ist also immer ein bewegliches.

Die Wärmeleitung findet ebenfalls fortwährend statt, und bei gleicher Temperatur ist also auch das Gleichgewicht ein bewegliches. Gute Wärmeleiter sind Metalle, schlechte Holz, Stroh, Asche u. s. w. Lockere Körper leiten schlechter als feste, der Grund liegt in der Zurückstrahlung von den verschiedenen Oberflächen; durch Pulverisiren eines Körpers wird also seine Leitungsfähigkeit vermindert. Ueber die Gesetze, wie sich die Wärme im Innern eines Körpers verbreitet, siehe den Artikel: Wärmeverbreitung.

Das Leitungsvermögen ist die Geschwindigkeit, mit der ein Körper Wärme von den nächsten Theilen absorbirt. Setzt man nach Desgretz die des Goldes gleich 100, so ist sie für Platin 981, für Silber 973, Kupfer 898, Eisen 374, Zink 363, Zinn 303, Blei 180, Marmor 23, gebrannte Steine 12. Ganz andere Zahlen aber finden Wiedemann und Franz. In den Flüssigkeiten und Luftarten verbreitet sich die Wärme nicht nur durch Leitungen, sondern auch vermöge der Beweglichkeit dieser Körper. Wärmere, also specifisch leichtere Theile heben sich, kältere sinken. Das Wasser verhält sich eigenthümlich hierbei vermöge seines Dichtigkeitsmaximums. Man nimmt an, dass die Wärmemenge, welche ein Körper durch Leitung abgibt, der Temperaturdifferenz proportional ist. Wenigstens ist dies für geringe Temperaturen der Fall.

Die Abkühlung der Körper in kältern Mitteln erfolgt durch Leitung und Strahlung, verbunden mit der Bewegung der einzelnen Theile des Mittels. Nach Newton wäre die Abkühlungsgeschwindigkeit der Temperaturdifferenz des Körpers und des Mittels proportional, jedoch ist dies nur für kleine Differenzen richtig. Nach Dulong und Petit theilt sich die Abkühlungsgeschwindigkeit, d. h. der Gesammtwärmeverlust in der Zeiteinheit v in die durch Strahlung v_1 und durch Leitung v_2 an die Umgebung, welche ein Gas sein möge. — Die Erfahrung gibt:

$$v_1 = m\,a^t\,(a^\vartheta - 1),$$

wo m und a Erfahrungszahlen sind, von denen die erstere von der Grösse der Erkaltungsfläche und der Natur des Körpers abhängt, $a = 1,0077$ zu setzen, t die Temperatur der Umgebung, ϑ der Temperaturunterschied ist. Es misst nämlich $m\,a^{t+\vartheta}$ die ausstrahlende, $m\,a^t$ die zurückgestrahlte Wärme. Dagegen ist:

$$v_2 = n\,p^c\,\vartheta^{1,233}.$$

n ist abhängig von der Natur des Körpers und der Grösse seiner Oberfläche, c eine nur vom ersteren Umstande abhängige Constante, p die Elasticität des Mittels, also:

$$v = m\,a^t\,(a^\vartheta - 1) + n\,p^c\,\vartheta^{1,233}.$$

5) Quellen der Wärme.

Die Hauptquelle der Wärme ist für uns die Sonne; ausserdem entsteht Wärme beim Stosse, durch Reibung und Druck, Electricität, durch chemische Wirkung, namentlich bei chemischen Verbindungen; diesen ist auch die Entstehung von Wärme durch den Lebensprozess der Thiere und Pflanzen beizuzählen, und die, welche entsteht, wenn flüssige Körper fest, luftförmige flüssig werden, also wenn Wärme frei wird. Bemerken wir hierbei schon vorläufig, dass auch, wenn Körper zusammengedrückt, also auch gestossen werden, Wärme frei wird, und dieselbe gebunden wird beim Losreissen und Ausdehnen. Fügen wir hinzu, dass man auch zu sagen pflegt, dass bei chemischen Verbindungen Wärme frei, bei Zersetzungen gebunden wird, so können wir die meisten hier angegebenen Wärmequellen eliminiren, und auf das Verhalten der gebundenen und freien Wärme zurückführen.

Das Verbrennen ist den chemischen Verbindungen, namentlich der Kohle mit Sauerstoff, beizuzählen; beim Lebensprozess tritt durch das Athemholen ebenfalls Verbindung von Kohle und Sauerstoff ein. Gewöhnlich nennt man Verbrennung eine von Lichterscheinung begleitete chemische Verbindung, und in der That tritt Lichterscheinung fast immer bei starken Wärmegraden ein, ein Umstand, welcher durch das Obengesagte leicht erklärt wird. Wahrscheinlich entsteht jedoch die Helligkeit einer Flamme nicht aus dem Glühen der Gase, sondern

aus dem der von ihnen mitgeführten Theilchen fester Körper.

6) **Erklärung der Eigenschaften der Wärme durch die Wellenlehre.**

Wir fassen jetzt immer die Wärme als von Schwingungen ausgehend auf, es ist sonach Wärmemenge mit lebendiger Kraft dieser Schwingungen als identisch zu nehmen.

Was die Temperatur anbetrifft, so ist deren Deutung in der Sprache der Wellenlehre nicht so einfach. Es lässt sich indess leicht einsehen, dass von zwei Systemen dasjenige dem andern lebendige Kraft mittheilen wird, dessen Theile die grössere Geschwindigkeit haben, und diese Wirkung wird so lange dauern, bis diese Geschwindigkeit bei beiden gleich ist, dass sie also dann gleiche Temperatur haben. Indess entsteht die Frage, durch welche Function dieser Geschwindigkeit die Temperatur gemessen wird, mit andern Worten, welcher Function der Schwingungsgeschwindigkeit proportional sich die Körper und namentlich die Gase ausdehnen. Sei m die Masse der in der Einheit eines Körpers enthaltenen Aethertheile, v die mittlere Geschwindigkeit derselben, so ist mv^2 die dem Körper zukommende Wärmemenge, $\varphi(v)$ seine Temperatur, also $\frac{mv^2}{\varphi(v)}$ seine specifische Wärme. Nimmt man an, dass die Temperatur der Wärmemenge proportional ist, wie dies ja sich in gewissen Grenzen zu bestätigen scheint, so ist $\varphi(v) = v^2$, also m die specifische Wärme, und diese würde somit die Dichtigkeit des Aethers in dem betreffenden Körper vorstellen.

Die Ausdehnung der Körper durch die Einwirkung der Wärme lässt sich nun folgendermaassen erklären.

Schon andere Betrachtungen haben darauf geführt, sich einen Körper zusammengesetzt zu denken aus Atomen, die von einander getrennt sind. Jedes dieser Atome, nimmt man nun an, ist wolkenartig umgeben von Aether. Während die Körperatome einander anziehen, und zwar nach dem Newton'schen Gesetze, findet zwischen den Aetheratomen wahrscheinlich eine Abstossung statt, zwischen Körper- und Aetheratomen jedenfalls eine Einwirkung, aber nur in sehr geringer Entfernung, was durch die geringe Dichtigkeit des Aethers erklärt wird. Ob diese Einwirkung abstossend oder anziehend sei, dafür ergibt sich kein vollständiges Criterium. Die Undurchdringlichkeit der Körper scheint für ersteres zu sprechen, indess kann die Abstossung zweier Körper bei der Berührung auch von der Einwirkung ihrer Aetherhüllen auf einander ausgehen. Für eine Anziehung aber spricht der Umstand, dass die Aetherhülle dem Körper verbleibt, jedoch ist auch die Möglichkeit vorhanden, dass die Abstossung der in der Umgebung (Luft oder leerer Raum) vorhandenen Aethertheile dies bewirkt. Wie dem aber auch sei, enthält der Körper eine gewisse Wärmemenge, d. h. haben die Schwingungen des ihn umhüllenden Aethers eine gewisse lebendige Kraft, so bedingt die Stabilität dieses Zustandes eine gewisse Lage der Körperatome. Vermehrt sich die Wärme, so treten bei den intensiveren Schwingungen die Aetheratome den Körperatomen näher, wodurch eine Erhöhung der Wechselwirkung eintritt, und die Stabilität des neuen Zustandes bedingt dann eine Veränderung, in der Regel eine grössere Entfernung dieser Atome von einander, also eine Ausdehnung. Dass das Umgekehrte auch eintreten kann, lehrt z. B. das Dichtigkeitsmaximum des Wassers.

Eine ganz neue Seite dieser Betrachtungen eröffnet uns aber die Stellung, welche die Aenderung des Aggregatzustandes und die latente Wärme zur Wellenlehre einnimmt.

Die stoffliche Wärmetheorie muss annehmen, dass Wärme nie verloren ginge. Wirkt sie also nicht mehr auf Temperaturerhöhung, so denkt man sie sich, allerdings nicht sehr verständlich, gebunden oder latent. Anders bei der Wellenlehre.

Sei v_0 die Geschwindigkeit eines Aetherpunktes zu irgend einer Zeit, v zu irgend einer andern, m seine Masse, so hat man für ein System, dessen Punkte lebendige Kraft einander mittheilen, bekanntlich immer die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \tfrac{1}{2}\Sigma mv_0^2 - A,$$

wo A die in der Zeit zwischen beiden Zuständen geleistete Arbeit ist.

Man kann den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\Sigma mv^2$$

(statt wie früher in der Regel Σmv^2), als lebendige Kraft definiren, und unser Satz heisst dann in der Sprache der Wärmelehre:

„Bei der Mittheilung von Wärme geht so viel Wärme verloren, als die während der Mittheilung geleistete Arbeit beträgt.“

Es wird also, wenn Wärme zu einem Körper von geringerer Temperatur überströmt, gewissermaassen Wärme in Arbeit verwandelt, d. h. aus der verlorenen lebendigen Kraft entsteht Arbeit.

Da A auch negativ sein kann, so wird auch $\frac{1}{2}\Sigma m v^2$ grösser sein können als $\frac{1}{2}\Sigma m v_0^2$, d. h. es wird Wärme entstehen; dann aber muss eine gleiche Quantität Arbeit verloren gehen: es wird Arbeit in Wärme verwandelt. — Die Eigenschaft der Wärme, sich auszugleichen, also dem kälteren Körper zuzuströmen, lehrt ferner:

Jede Arbeit ist begleitet von Ausgleichung der Temperatur, und wenn die Wärme vom kältern zum wärmern Körper strömen soll, so kann dies nur mittelbar geschehen, indem die aus Arbeit entstandene Wärme durch den kältern zum wärmern Körper strömt, aber auch hierbei tritt eine Ausgleichung ein, d. h. der kältere Körper nimmt einen Theil der entstandenen Wärme an.

Es ist nun für uns latente Wärme überhaupt nicht vorhanden, und dieser Ausdruck eben nur der Bequemlichkeit wegen ab und zu anzuwenden. Gebundene Wärme ist für uns ferner identisch mit in Arbeit verwandelter, frei werdende mit aus rückgängiger Arbeit entstandener Wärme. Jede Arbeit ist nun ein Losreissen von Kräften, d. h. eine Bewegung der Atome den auf sie wirkenden Kraftrichtungen entgegen.

Geht ein Körper von dem festen in den flüssigen Zustand über, so ist keine Frage, dass ein solches Losreissen stattfinde; es werden die sich anziehenden Theile getrennt. Wahrscheinlich ist der einzige Grund, dass ein Körper durch mechanische Arbeit, also durch Ausdehnen, nicht flüssig gemacht werden kann, der, dass diese Ausdehnung nicht nach allen Seiten gleichmässig erfolgen kann. — Es ist also klar, dass beim Flüssigwerden eine gewisse Wärmemenge in Arbeit verwandelt, Wärme gebunden werden muss. Genau dieselbe Arbeitsmenge geht verloren, wird also in Wärme verwandelt (Wärme wird frei), wenn der flüssige Körper wieder fest wird.

Gleiches Verhalten findet beim Verdampfen der flüssigen Körper und beim Condensiren der luftförmigen statt. In der That kann man durch Druck luftförmige Körper flüssig machen, und man sieht, dass hierbei ein Freiwerden von Wärme erfolgen muss.

Chemische Zersetzungen sind Losreissungen, es wird also bei denselben ein gewisses Quantum Wärme gebunden, welches bei chemischen Verbindungen frei wird.

Druck und Stoss, also Verdichtung, auf einen Körper führen die Theile desselben einander zu, es geht Arbeit verloren, und Wärme wird somit frei.

Was die Reibung anbetrifft, so wird durch sie bekanntlich eine zu leistende Arbeit beträchtlich vermindert, und somit auch eine angemessene Menge Wärme erzeugt. — Was die Erzeugung der Wärme durch Licht und Electricität anbetrifft, so sind dies Erscheinungen, die im Aether selbst vorgehen, Schwingungen einer gewissen Art verändern ihre Beschaffenheit und nehmen die Art der Wärmeschwingungen an.

7) Grundzüge der mechanischen Wärmelehre.

Die mechanische Wärmelehre stützt sich auf die eben angeführten Betrachtungen. Es folgt aus denselben zunächst:

Eine gegebene Wärmemenge kann unter Umständen eine gewisse und genau zu bestimmende Arbeitsmenge geben, und umgekehrt.

Die Zahlenbeziehung, die hier obwaltet, ist die folgende:

Eine Wärmeeinheit (Caloric), d. h. diejenige Wärmemenge, welche 1 Kilogramm Wasser um 1 Grad erwärmt, ist im Stande, 1 Kilogramm 423,55 Meter zu heben, also 423,55 Kilogrammmeter Arbeit zu leisten. Nimmt man das Kilogrammmeter zur Arbeitseinheit, so nennt man die Grösse $A = \frac{1}{423{,}55}$ das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, $B = 423{,}55$ das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, oder das mechanische Wärmeäquivalent.

Als Arbeitseinheit pflegt man auch die Arbeit zu nehmen, welche ein Milligramm um ein Millimeter der Krafteinheit entgegenbewegt. Nimmt man 9810 (in Milligrammen) als Intensität der Schwere, so ist dann $B = 415 \cdot 10^{13}$.

Bezieht man die Wärmeeinheit auf 1 Pfund und 1 Fuss, so ist $B = 1344$ in Fusspfunden.

Wie dies Wärmeäquivalent aus der bei der Compression der Luft entstehenden Wärme zu bestimmen ist, soll später gezeigt werden.

Joule hat nachgewiesen, dass das Wärmeäquivalent ganz unabhängig sei von der Art der Verwandlung der Wärme in Arbeit. So stellte er ein Schaufelrad in ein mit Wasser gefülltes Gefäss, drehte das erstere durch einen Mechanismus und verglich die geleistete Arbeit mit der Temperaturzunahme des Wassers.

Da bei der Drehung der alte Zustand des Rades wieder hergestellt wird, so gab das Verhältniss der Arbeit zur entstandenen Wärme das mechanische Wärmeäquivalent. Derselbe liess ein eisernes Rad sich in Quecksilber bewegen und fand für die durch Reibung entstandene Wärme, ebenso bei der Reibung zweier gusseisernen Platten, auch für die mittels eines electromagnetischen Rotationsapparates behufs der Wärmeerzeugung aufzuwendende Arbeit den entsprechenden Ausdruck mit grösserer oder geringerer Genauigkeit.

Wie auch der Körper beschaffen sei, dessen Wärmezustand man untersucht, so hängt das Volumen v und die Dichtigkeit ϱ desselben einerseits von seiner Temperatur t, andererseits von dem darauf ausgeübten Drucke p ab. Es wird also zwischen t, p und v eine Gleichung stattfinden, welche die Natur des Körpers definirt.

Die zur Temperaturerhöhung von Null auf t gebrauchte Wärme Q zerfällt in zwei Theile, die Wärme U, die dem Körper verbleibt, und in diejenige, welche in Arbeit verwandelt ist.

Habe der Körper die Masseneinheit, zu einer unendlich kleinen Temperaturzunahme werde die Wärmemenge $\triangle Q$ gebraucht, von dieser verbleibt die Menge dU dem Körper. Die Volumenzunahme ist dv, und da der Druck p war, so wird $p\,dv$ die auf diese Zunahme verwandte Arbeit sein, welche einer Wärmemenge $Ap\,dv$ äquivalent ist. Man hat also:

$$\triangle Q = dU + Ap\,dv.$$

Es ist zu bemerken, dass die Grösse U nicht blos die Temperaturzunahme des Körpers bewirkt, sondern auch theilweise zu innern Arbeiten. (Veränderungen der Anordnung der Molekule) verwendet wird, während $Ap\,dv$ die äussere Arbeit anzeigt; daher hat Thomson der Grösse U den Namen „Energie" des Körpers gegeben. Sie ist durch den Zustand des Körpers völlig bestimmt, da dU ein vollständiges Differenzial ist, $p\,dV$ aber hängt vom Wege ab.

Das Zeichen $\triangle$ ist genommen, weil $\triangle Q$ kein vollständiges Differenzial zu sein braucht.

U wird nur von t, p und v abhängig sein, und wegen der zwischen diesen Grössen stattfindenden Gleichung eine von p und v, also:

$$dU = X\,dp + \alpha\,dv,$$

und somit:

1) $$\triangle Q = X\,dp + Y\,dv,$$

wo zu setzen ist:

2) $$X = \frac{\partial U}{\partial p}, \quad Y = \alpha + Ap = \frac{\partial U}{\partial v} + Ap.$$

Differenziirt man X und Y, so folgt die wichtige Beziehung:

I) $$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = A.$$

Man kann aber auch setzen:

3) $$\triangle Q = Z\,dt + U\,dv,$$

und:

4) $$\triangle Q = M\,dt + N\,dp.$$

Denkt man sich p als Function von t und v, so kommt:

a) $$dp = \frac{\partial p}{\partial t}\,dt + \frac{\partial p}{\partial v}\,dv.$$

Ist die Temperatur constant, so hat man:

b) $$\frac{\partial t}{\partial p}\,dp + \frac{\partial t}{\partial v}\,dv = 0.$$

Ist aber das Volumen constant, so wird

c) $$dt = \frac{\partial t}{\partial p}\,dp.$$

Im ersten Falle aber gibt die Gleichung a):

$$dp = \frac{\partial p}{\partial v}\,dv,$$

und die zweite:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t}\,dt.$$

Diese Werthe in b und c gesetzt, geben:

d) $$\frac{\partial t}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial t}{\partial v} = 0,$$

e) $$\frac{\partial t}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = 1,$$

Gleichungen, welche zur Elimination dienen. Wegen 1) und 3) aber hat man:

$$Z\frac{\partial t}{\partial p} = X, \quad U + Z\frac{\partial t}{\partial v} = Y,$$

und wegen 1) und 4):

$$M\frac{\partial t}{\partial p} + N = X, \quad M\frac{\partial t}{\partial v} = Y,$$

also:

5) $$Z = \frac{X}{\frac{\partial t}{\partial p}}, \quad U = \frac{Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v}}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

und:

6) $$M=\frac{Y}{\frac{\partial t}{\partial v}},\ N=\frac{X\frac{\partial t}{\partial y}-Y\frac{\partial t}{\partial p}}{\frac{\partial t}{\partial v}}.$$

Aber wenn man setzt:

7) $$C=Y\frac{\partial t}{\partial p}-X\frac{\partial t}{\partial v},$$

so folgt mit Hülfe der Bezichnngen aus 5) nnd 6) noch:

8) $$\triangle Q=\frac{X\,dt+C\,dv}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

9) $$\triangle Q=\frac{Y\,dt-C\,dp}{\frac{\partial t}{\partial v}};$$

auch hat man:

10) $$U=\frac{C}{\frac{\partial t}{\partial p}},\ N=\frac{C}{\frac{\partial t}{\partial v}}.$$

Was die Bedentung dieser Coefficienten anbetrifft, so ist Z das Verhältniss der bei constantem Volumen verwandten Wärme zur Temperaturerhöhung, d. h. die specifische Wärme bei constantem Volnmen, M aber ist die specifische Wärme bei constantem Druck. Dass diese Grössen bei Gasen verschieden sind, ist in den vorigen Abschnitten gezeigt. Dies gilt aber jedenfalls, wenn auch in geringerem Maasse, auch für die übrigen Körper.

8) Uebergang der Wärme in Arbeit dnrch Kreisprozesse.

Auf nnendlich viel Arten kann ans Wärme Arbeit erzeugt werden. Immer ist es aber hierbei nöthig, dass gleichzeitig Wärme von einem wärmern nach einem kältern Körper hinströme. Denken wir nns z. B. ein Gas, welches etwa in einem durch einen verschiebbaren Kolben geschlossenen Gefässe sich befindet, der dnrch ein Gewicht belastet ist. Wenn dieses Gas durch Berührung eines wärmeren Körpers erwärmt wird, nnd somit sich ausdehnt, so ist damit einerseits ein Heben des Gewichtes, also eine Arbeit, nnd andererseits ein Ueberströmen der Wärme verbunden. Es könnte möglicherweise die Ausdehnung des Gases selbst eine Arbeit sein, wenn nämlich eine Anziehung der Theile desselben unter sich stattfände, welche zu überwinden wäre. Die Erfahrung scheint dies für Gase zu widerlegen. Diente ein fester Körper zur Vermittelnng der Arbeitserzengung, so würde in der That zu dessen Ansdehnung Arbeit erforderlich sein. Auf diesen Gegenstand ist später znrückzukommen.

Bei Maschinen, welche mittels der Wärme arbeiten, wird es nun nöthig sein, dass diese Wärmeübertragung durch Körper geschieht, welche periodisch zu denselben Zuständen zurückkehren, weil nur auf diese Weise eine gleichmässige und dauernde Uebertragung stattfinden kann. Betrachten wir in dieser Beziehnng z. B. die erste und fast noch immer einzige practische Maschine, welche direct vermittels der Wärme arbeitet, die Dampfmaschine. Wir haben hier:

1) Eine Wärmequelle, die Feuernng,

2) Einen vermittelnden Körper, das Wasser.

Demselben wird von der erstern Wärme mitgetheilt. Diese dient zunächst, das Wasser in Dampf zu verwandeln, welches in den Cylinder tritt nnd hier den belasteten Kolben hebt, also Arbeit erzeugt, wobei sich der Dampf nothwendig abkühlt.

3) Einen Wärmereceptor, das im Condensator befindliche Kühlwasser, oder wenn ersterer fehlt, die atmosphärische Luft.

Durch sie wird der Dampf abgekühlt, der Kolben senkt sich; da er belastet ist, geht allerdings ein Theil der erzeugten Arbeit wieder verloren. Endlich wird der Dampf bei diesem Prozesse ganz entfernt. Neuer Dampf von derselben Temperatur wie im Anfang tritt in den Cylinder, und der Zustand der Wärmeqnelle, des vermittelnden Körpers nnd des Receptors sind dann wie im Anfange. Jedoch ist zu bemerken, dass der vermittelnde Körper jetzt ein anderer geworden ist, es ist nämlich neuer Dampf gebildet.

Dieser letztere Umstand bedingt vom rein theoretischen Standpunkte, abgesehen von anderen Umständen, einen wesentlichen Fehler der Dampfmaschine. Es muss mit Aufwand von Kraft v der Dampf entfernt und Wärme ausserdem nnbenutzt fortgeführt werden. Man kann also die Frage stellen: Wie würde sich Wärme, ohne dass der vermittelnde Körper wechselt, am vortheilhaftesten zur Arbeitserzengung verwenden lassen? Mit dieser Frage hat sich zuerst der jüngere Carnot beschäftigt (*Sur la puissance motrice du feu*), nnd zu dem Ende die folgende Vorrichtung angegeben, selbstverständlich, ohne dabei an practische Ausführung zu denken.

Wir denken uns wieder eine Wärmequelle A, einen vermittelnden Körper B, z. B. ein Gas in einem Gefässe, welches

einen belasteten Kolben hebt, es kann dies aber auch ein fester oder flüssiger Körper sein, der mit Ueberwindung eines Druckes sich ausdehnt. Vorausgesetzt wird, dass *B* eine geringere Temperatur als *A* habe, absolut leicht die Wärme von *A* annehme (ein absoluter Leiter sei), aber keine Wärme an den Aussenraum abgebe, d. h. in absolut isolirender Hülle sich befinde. Die Temperatur von *A* bleibe constant, was ja immer bewirkt werden kann durch Erneuerung der abgegebenen Wärme. Es kann dies aber auch so ausgedrückt werden, dass man sich die Dimensionen von *A* unendlich gross denkt, in welchem Falle die an *B* abgegebene Wärme nur eine unendlich geringe Temperaturabnahme bewirkt. *B* wird nun nach und nach die Temperatur von *A* annehmen; ist dies geschehen, so denke man sich die Wärmequelle *A* entfernt. *B* kann sich dann noch weiter ausdehnen und Arbeit verrichten, z. B. wenn der Druck vermindert wird, dann wird aber diese Arbeit nur auf Kosten der von *B* aufgenommenen Wärme verrichtet, und dieser Körper muss sich abkühlen Nachdem auch dies geschehen, nähern wir dem Vermittler *B* einen dritten Körper *C*, den Receptor, welcher kälter sein muss, als *B* in seinem Schlusszustande. Auch bei *C* setzen wir wie bei *A* voraus, dass seine Temperatur veränderlich sei, also die Dimensionen unendlich gross. Es gibt nun der Körper *B* an *C* Wärme ab, bis beide gleiche Temperatur haben. Nun soll sich der Körper *B* zusammenziehen, was etwa durch Vermehrung des Druckes erreicht wird. Während dieses Theiles des Prozesses wird also Arbeit in Wärme verwandelt, diese erzeugte Wärme aber an *C* abgegeben. Nun wird der Körper *C* entfernt, das Zusammendrücken aber fortgesetzt; hierbei wird Wärme aus Arbeit ebenfalls erzeugt, da sie aber nicht abgegeben werden kann, so nimmt die Temperatur von *B* zu. Dies wird fortgesetzt, bis die Temperatur von *B*, Druck und Volumen wieder wie im Anfang ist, und dann die Wärmequelle wieder zugeführt wie im Anfang, womit die Sache von vorn beginnt. Damit Arbeit wirklich verrichtet werde, muss die in den zwei ersten Theilen des Prozesses erzeugte Arbeit grösser sein, als die in den beiden letzten in Wärme verwandelte.

Eine solche Uebertragung, wobei drei Körper, Wärmequelle, Vermittler und Receptor, thätig sind, keiner wechselt und alle drei periodisch zu denselben Zuständen zurückkehren, heisst Kreisprozess. Ein solcher kann auch umgekehrt werden, d. h. es kann Wärme aus Arbeit entstehen, und zwar in folgender Weise: *B* wird ausgedehnt und dabei also Wärme in Arbeit verwandelt, der Körper also abgekühlt, da er mit keiner Wärmequelle in Verbindung steht. Dann nähern wir den Körper *C*, der aber jetzt wärmer sein muss, als *B* in seinem Schlusszustande; die Ausdehnung wird fortgesetzt, und dabei *C* Wärme entzogen. Nun wird *C* entfernt und *B* zusammengedrückt, also Arbeit in Wärme verwandelt, dann der Körper *A*, der aber kälter sein muss als *B* im Schlusszustande, genähert und das Zusammendrücken fortgesetzt, wobei Wärme an *A* abgegeben wird. Das Schlussresultat ist hier, dass Wärme in Arbeit verwandelt wird.

Beim erst beschriebenen Prozesse strömte zugleich vom wärmeren Körper *A* Wärme nach dem kälteren *C* über, während Arbeit aus Wärme erzeugt wurde, und dies ist immer gleichzeitig der Fall. Beim letztbeschriebenen wird Arbeit in Wärme verwandelt, zugleich aber strömt Wärme vom kälteren Körper *C* nach dem wärmeren *A* über, und immer ist dies Zurückströmen von der Verwandlung von Arbeit in Wärme begleitet,

Carnot sah sogar die Sache in folgender Weise an. Da ihm die Principien, wonach Arbeit und Wärme aus einander entstehen, unbekannt waren, so fasste er das Ganze so auf, als wenn das Ueberströmen von Wärme vom wärmeren zum kälteren Körper ohne Verlust von Wärme Arbeit erzeugen kann, und er erklärte beides für äquivalent, also ebenso wie das Fallen des Wassers vom höhern zum tiefern Orte ein Rad treiben und eine gewisse Arbeitsmenge erzeugen kann, ohne dass Wasser verloren geht.

Uebrigens ist zwischen den beiden beschriebenen Kreisprozessen der Unterschied, dass im erstern der kältere Körper *C*, wenn er sich *B* nähert, geringere Temperatur hat als *B*, im letztern höhere, bei *A* ist das Umgekehrte der Fall. Man nennt einen Kreisprozess nun umkehrbar, wenn bei der Erzeugung von Wärme aus Arbeit dieselben Zustände von den Körpern *A*, *B*, *C* durchlaufen werden, wie bei der Erzeugung von Arbeit aus Wärme. Nach dem Obigen kann dies genau nicht stattfinden, aber annähernd desto mehr, je weniger sich die Temperatur von *B* von der der be-

rührenden Körper A und C bei ihrer Berührung nnterscheidet. Die Temperaturverhältnisse wären bei beiden Prozessen ganz dieselben, wenn in beiden Zuständen B bezüglich mit A und C gleiche Temperatur haben könnte. Dies ist streng genommen nicht möglich, indess kann man ja eine unendlich geringe Temperaturdifferenz, die gleich Null zu setzen ist, annehmen, und eine Bedingung für die Umkehrbarkeit eines Kreisprozesses ist somit:

„Dass Wärmeabgabe von einem der drei Körper an den andern nur bei gleicher Temperatur stattfindet."

Diese Bedingung aber ist nicht ausreichend, denn die Umkehrbarkeit setzt auch die Gleichheit des Druckes in jeder Stellung voraus. Da nun bei dem einen Prozesse in den Stellungen Ausdehnen erfolgt, wo im andern Zusammendrücken entsteht, also im ersten Falle die innere Spannung grösser, im zweiten kleiner sein müsste, als der äussere Druck, wenn beide ungleich sind, so folgt als zweite in Gemeinschaft mit der ersten ausreichende Bedingung für umkehrbare Kreisprozesse:

„Dass der äussere Druck immer gleich der inneren Spannung sein muss."

Wir haben vorhin gesehen, dass immer beim Uebergang von Wärme in Arbeit gleichzeitig Wärme vom wärmeren zum kälteren Körper strömt. Da nun diese Wärmemenge als ein Verlust an Arbeit zu betrachten ist, so ist derjenign Prozess der vortheilhafteste, wo diese Wärmemenge ein Minimnm ist. Wir zeigen, dass dies beim umkehrbaren Kreisprozess stattfindet.

In Bezug auf die Drnckverhältnisse folgt dies aus allgemein mechanischen Prinzipien. Ist die innere und äussere Spannung ungleich, so erfolgt die Ausgleichnng stossweise, nnd bekanntlich bringt der Stoss gegen den Druck einen Verlust an lebendiger Kraft, also auch von Wärme, hervor (vergleiche den Artikel: Stoss). Was die Temperaturverhältnisse anbetrifft, so ist augenscheinlich, dass wenn B und C sich nähern, und B wärmer als C ist, nicht allein die aus Arbeit erzeugte, sondern auch die in B überschüssig vorhandene Wärme an C abgegeben wird, dass aber bei Gleichheit der Temperaturen nur das erstere geschieht.

Wenn aber A an B genähert wird, ist auch die Gleichheit der Temperaturen das vortheilhafteste Verhältniss. Denn angenommen, es gäbe ein vortheilhafteres, wobei B kälter als A wäre, so könnte man ja durch Arbeitserzeugung B von der Temperatur von A bis zu dieser vortheilhaftesten abkühlen, und dann A annähern, wodurch also nach der Annahme das Arbeitsvermögen vermehrt worden wäre. Es ist jedoch ein Widerspruch, dass dies durch die Verrichtung von Arbeit geschehen kann, wodurch das erstere vermindert werden muss.

Jetzt wollen wir bei irgend einem Kreisprozess das Verhältniss der übergeführten und der in Arbeit verwandelten Wärmemenge ermitteln.

Sei, wenn A mit B in Verbindnng ist, t die Temperatur von A, τ die von B, wenn B mit C in Verbindung ist, τ' die von B, t' die von C, also:

$$t > \tau > \tau' > t'.$$

Im ersten Theile des Prozesses nimmt B die Temperatur t an, wobei eine gewisse Wärmemenge α zur Temperaturerhöhung, eine andere β zur Verwandlung in Arbeit dient. Im zweiten Theile, wo B ausser Verbindung ist, nimmt B die Temperatur τ' an, wobei die Wärmemenge γ in Arbeit verwandelt wird. Nähert man nun im dritten Theile C, so wird B von Temperatur τ' auf t' sinken, dabei die Wärmemenge α' von B selbst, und die aus Arbeit während dieser Zeit erzeugte Wärmemenge β' an C abgegeben. Endlich im vierten Theil, wo C entfernt ist, entsteht Wärmemenge γ' aus Arbeit, wobei die Temperatur von C von τ' bis τ steigt.

Die in Arbeit verwandelte Wärmemenge ist also während der ganzen Periode:

$$\beta - \beta' + \gamma - \gamma'.$$

Während dessen hat A abgegeben die Wärmemenge:

$$\alpha + \beta,$$

C angenommen:

$$\alpha' + \beta',$$

Der Rest:

$$\alpha - \alpha' + \beta - \beta',$$

dient zur Arbeitserzeugung, woraus sich ergibt:

$$\alpha - \alpha' = \gamma - \gamma'.$$

Ist der Kreisprozess aber umkehrbar, so findet während des ersten und dritten Zeittheils keine Temperaturerhöhung statt; es ist also:

$$\alpha = \alpha' = 0, \quad \gamma = \gamma',$$

also die in Arbeit verwandelte Wärme beträgt:

$$\beta - \beta'.$$

und ebenso gross ist bei der Umkehrung des Kreisprozesses die aus Arbeit gewonnene Wärme.

Wir schreiten nun zum Beweise des folgenden wichtigen Satzes:

Bei jedem Kreisprozess ist das Verhältniss der von A abgegebenen und von C angenommenen Wärmemenge nur von den Temperaturen beider Körper, also weder von der verrichteten Arbeit, noch von der Natur des vermittelnden Körpers abhängig.

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es seien zwei vermittelnde Körper B und B_1 vorhanden, der eine B_1 möge Wärmemenge Q von A erhalten, Q' an C abgeben, der andere B wie oben Wärmemenge β erhalten und β_1 abgeben. Setzen wir zunächst voraus, die Arbeitsmengen seien bei beiden Körpern B und B_1 gleich, also:

$$Q - Q' = \beta - \beta'.$$

Es kann dann nicht $Q \lesseqgtr \beta$ sein. Denn angenommen, Q sei die grössere abgegebene Wärmemenge, so könnte man mittels des Vermittlers B den Kreisprozess verrichten, dann würde Arbeitsmenge $\beta - \beta'$ erzeugt, Wärmemenge β dem Körper A entzogen. Nun könnte man, indem man den Körper B_1 anwendet, den Kreisprozess umkehren, dann würde die ganze verrichtete Arbeit:

$$\beta - \beta' = Q - Q',$$

wider in Wärme verwandelt, aber dem Körper A die Wärme Q zurückgeführt, also ohne Arbeitsverrichtung, denn beide heben sich ja auf, Wärme vom kältern zum wärmern Körper geführt, was als unmöglich zu betrachten ist, also Q nicht grösser als β, und aus eben dem Grunde β nicht grösser als Q, d. h.:

$$Q = \beta.$$

Sei jetzt $Q - Q'$ nicht gleich $\beta - \beta'$, so kann man setzen:

$$\frac{Q - Q'}{\beta - \beta'} = \frac{n}{p},$$

wo n und p genau oder auf jeden Grad der Annäherung als ganze Zahlen zu betrachten sind. Man kann dann die Arbeit $Q - Q'$ in n Theile, $\beta - \beta'$ in p Theile theilen, die unter einander gleich sind, und nach dem Vorigen ist dann für:

$$\frac{Q}{n} - \frac{Q'}{n} = \frac{\beta}{p} - \frac{\beta'}{p},$$

auch:

$$\frac{Q}{n} = \frac{\beta}{p},$$

also:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{\beta}{\beta'}.$$

Also das Verhältniss $\frac{Q}{Q'}$ ändert sich weder mit dem Vermittler, noch mit der Arbeitsmenge, es kann also nur von den Temperaturen t und t' abhängen. Man hat somit:

$$\frac{Q}{Q'} = \varphi\,(t, t'),$$

wo φ eine noch zu bestimmende Function von t und t' ist.

Um diese näher zu bestimmen, denken wir uns durch einen Kreisprozess Wärmemengen Q und Q' bezüglich von A abgegeben und von C aufgenommen und Q', Q'' bezüglich von C abgegeben und von einem andern Körper D durch einen zweiten Prozess aufgenommen. Mögen die Körper A, C, D bezüglich die Temperaturen t, t', t'' haben, so ist also:

$$\frac{Q}{Q'} = \varphi\,(t,\ t'),\quad \frac{Q'}{Q''} = \varphi\,(t',\ t''),$$

aber da auf diese Weise auch die Wärmemenge Q'' von D aufgenommen und Q abgegeben wird, und zwar durch einen aus zwei andern zusammengesetzten Kreisprozess:

$$\frac{Q}{Q''} = \varphi\,(t,\ t''),$$

also:

$$\varphi\,(t, t')\,\varphi\,(t', t'') = \varphi\,(t, t'').$$

Denken wir $t'' = \alpha$ constant, so ist:

$$\varphi(t,\ t') = \frac{\varphi\,(t,\ \alpha)}{\varphi\,(t',\ \alpha)},$$

also wenn man unter T eine bis jetzt noch unbestimmte Function von t, unter T' dieselbe von t' versteht:

$$\varphi\,(t,\ t') = \frac{T}{T'},$$

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'}.$$

Ist die geleistete Arbeit gleich f, so hat man noch:

$$Q - Q' = A f,$$

und:

$$11)\qquad Q - Q' = \frac{Q\,(T - T')}{T} = A f.$$

Im folgenden Abschnitt wird die Function T vollständig bestimmt werden. Wir bemerken schon hier, dass es die Temperatur selbst jedoch von einem bestimmten, später anzugebenden Nullpunkt an ist. Man nennt diese Temperatur die absolute.

Wir haben oben der Schwierigkeiten erwähnt, welche die theoretische Definition der Temperaturen und der Vergleich derselben mit einander macht. Die Gleichung 11) würde dazu ein Mittel geben. Es handelt sich nämlich um die Frage:

Ein Körper A habe eine Temperatur T, die wir als willkürlichen Anfangspunkt nehmen; um wieviel Grad ist die Temperatur eines andern C von ihm verschieden?

Diese soll beantwortet werden, unabhängig von den Ausdehnungsverhältnissen irgend eines Körpers. Die Gleichung 11) lehrt dies in folgender Weise.

Man übertrage durch einen umkehrbaren Kreisprozess Wärme von A nach C. Diese Wärme lässt sich calorimetrisch messen; ist dann Q die von A abgegebene, Q' die von C aufgenommene Wärme, so ist:

$$T-T'=\frac{Q-Q'}{Q}T$$

der Temperaturunterschied beider Körper. Sei der erste Körper z. B. siedendes Wasser, so ist für T die Temperatur desselben zu setzen. An practische Anwendung dieses Verfahrens kann jedoch natürlich nicht gedacht werden.

Wir haben bis jetzt die Wärmemengen Q und Q' als positiv betrachtet. Denken wir jetzt diejenige Wärmemenge als positiv, welche der Vermittler empfängt, als negativ die, welche er abgibt, dann ist Q' mit $-Q'$ zu vertauschen, also:

$$\frac{Q}{T}+\frac{Q'}{T'}=0.$$

Sollte der Kreisprozess aber nicht umkehrbar sein, so ist die abgegebene, also negative Wärme Q' grösser, und somit:

$$\frac{Q}{T}+\frac{Q'}{T'}<0.$$

Möge nun Wärmeaustausch zwischen mehreren Körpern $A_1, A_2 \ldots A_n$ durch Kreisprozesse stattfinden, möge irgend einer davon, A_p, abgeben die Wärmemengen:

$$q_{p,1}\; q_{p,2} \ldots q_{p,p-1}\; q_{p,p+1} \ldots \ldots q_{p,n},$$

an die Vermittler bezüglich an:

$$A_1, A_2 \ldots A_{p-1}, A_{p+1} \ldots A_n,$$

und seien:

$$t', t'' \ldots t^{(n)}$$

die Temperaturen sämmtlicher Körper. $q_{p,s}$ ist negativ, wenn der Körper Wärme vom Vermittler empfängt. Also:

$$\frac{q_{p,s}}{T^{(s)}}+\frac{q_{s,p}}{T^{(p)}}=0,$$

vermöge der Wechselwirkung zwischen A_p und A_s, und wenn man alle so entstehenden Gleichungen addirt:

$$\sum_s\sum_p\frac{q_{p,s}}{T^{(s)}}\leqq 0,$$

je nachdem der Kreisgang nicht umkehrbar ist, oder umkehrbar.

Bezeichnen wir jetzt die Summe sämmtlicher von A_s abgegebenen Wärmemengen mit $Q^{(s)}$, so ist:

$$Q^{(s)}=\sum_p q_{p,s},$$

also:

$$\sum_s\frac{Q^{(s)}}{T^{(s)}}\leqq 0.$$

$$\frac{Q'}{T'}+\frac{Q''}{T''}+\ldots+\frac{Q^{(n)}}{T^{(n)}}\leqq 0.$$

Sind aber die Temperaturunterschiede unendlich klein, so kann man für $Q'Q''$ schreiben $\triangle Q$, ganz in der Bedeutung des vorigen Abschnittes, die Summe aber verwandelt sich in ein Integral, also:

$$\int\frac{\triangle Q}{T}\leqq 0,$$

d. h.:

$$\int\frac{X\,dp+Y\,dv}{T}\leqq 0,$$

wo der Weg des Integrals ein geschlossener ist, da er sich auf einen Kreisprozess bezieht.

Setzen wir jetzt Umkehrbarkeit voraus. Den beim Kreisprozess durchschrittenen Weg kann man in zwei andere, α und β zerlegen. Dann ist:

$$\int_\alpha\frac{\triangle Q}{T}+\int_\beta\frac{\triangle Q}{T}=0,$$

oder wenn man statt des Weges β den in umgekehrter Richtung zurückgelegten, den wir mit γ bezeichnen wollen, nimmt, wo dann:

$$\int_\beta = -\int_\gamma$$

ist:

$$\int_\alpha \frac{\triangle Q}{T} = \int_\gamma \frac{\triangle Q}{T}.$$

α und γ sind zwei sonst beliebige Wege zwischen denselben Grenzen; vorausgesetzt ist hierbei, dass die Wärmebewegung nur zwischen Körpern von gleichem Druck und gleicher Temperatur erfolgt, was ja im Verein mit der eben gegebenen Bedingung macht, dass beide Wege zusammen einen umkehrbaren Kreisprozess geben. Die letzte Gleichung drückt aus, dass (immer Umkehrbarkeit angenommen) das Integral $\int \frac{\triangle Q}{T}$ nur von seinen Grenzen, nicht vom Wege abhängig ist, und dies ist bekanntlich die Bedingung dafür, dass der Ausdruck:

$$\frac{\triangle Q}{T} = \frac{X\,dp + Y\,dv}{T}$$

ein vollständiges Differenzial ist, eine Bedingung, die man auch schreiben kann:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{Y}{T}\right),$$

oder:

$$T\left(\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial p}\right) = X\frac{\partial T}{\partial v} - Y\frac{\partial T}{\partial p}$$

$$= \frac{\partial T}{\partial t}\left(X\frac{\partial t}{\partial v} - Y\frac{\partial t}{\partial p}\right).$$

Mittels der Gleichungen I) und 7) ergibt sich hieraus:

$$\text{II)} \qquad AT = C\frac{\partial T}{\partial t}.$$

(Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass $\frac{\partial T}{\partial t} = 1$ ist.)

Das hier vorkommende Integral $\int \frac{\triangle Q}{T}$ nennt Clausius Entropie der Körper.

Wir wollen jetzt noch einen zweiten Beweis der Formel II) geben, der unmittelbar an den Kreisprozess anknüpft. Derselbe zerfällt in vier Theile.

Im Anfange des ersten soll der vermittelnde Körper die Temperatur t haben, sein Volumen sei v, der Druck p. Wir setzen aber immer unendlich kleine Differenzen zwischen den auf die verschiedenen Körper bezogenen Grössen voraus. Dann werden am Schluss des ersten Zeittheils diese Grössen bezüglich zugenommen haben um 0, dp, dv. Die geleistete Arbeit kann, da die Ausdehnung unendlich klein ist, gemessen werden durch die halbe Summe der Drucke an beiden Endpunkten multiplicirt in die Volumenänderung, das ist:

$$dv\left(p + \frac{dp}{2}\right).$$

Im zweiten Theile möge das Volumen um $d_1 v$ zunehmen, und die Temperatur um ∂t abnehmen. Es wird dann am Schlusse p sich ändern um die Grösse:

$$d_1 p - \partial p,$$

deren erstes Glied von der Volumenänderung, das zweite von der Temperaturänderung abhängt. Die verrichtete Arbeit ist dann:

$$d_1 v\left(p + dp + \frac{d_1 p}{2} - \frac{\partial p}{2}\right).$$

Im dritten Zeittheile wird nun die Temperatur $t' = t - \partial t$ sein, und da der unendlich kleinen Temperaturänderung wegen die Volumenänderung nur ein unendlich Kleines zweiter Ordnung beträgt, so ist diese gleich $-dv$, am Schlusse also der Druck:

$$p + d_1 p - \partial p,$$

also die in Wärme verwandelte Arbeit:

$$dv\left(p + \frac{dp}{2} + d_1 p + \partial p\right).$$

Im letzten Zeittheile ist die Volumenänderung wieder $-d_1 v$, die Temperaturänderung ∂t, und am Schlusse desselben ist der Druck wieder gleich p, also die Wärme, welche aus Arbeit entsteht:

$$d_1 v\left(p + \frac{d_1 p}{2} - \frac{\partial p}{2}\right),$$

also die ganze verrichtete Arbeit:

$$dv\left(p + \frac{dp}{2}\right) + d_1 v\left(p + \frac{\partial p}{2} + \frac{d_1 p}{2} - \frac{\partial p}{2}\right) -$$

$$- dv\left(p + \frac{dp}{2} + \frac{d_1 p}{2} - \frac{\partial p}{2}\right)$$

$$- d_1 v\left(p + \frac{d_1 p}{2} - \frac{\partial p}{2}\right)$$

$$= \frac{dp}{2} d_1 v - \frac{d_1 p}{2} dv + dv\,\partial p.$$

Offenbar aber ist:

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d_1 p}{d_1 x},$$

also:

$$dp\, d_1 v - d_1 p\, dv = 0,$$

also der Gesammtbetrag der Arbeit gleich $dv\,\partial p$. Die hierzu gebrauchte Wärme war nach Formel 11):

$$\frac{Q\,(T-T')}{T}.$$

Da aber die Grössen Q, $T-T'$ unendlich klein sind, vertauschen wir sie mit dQ und dT. Das Zeichen ∂ geht wie oben auf den Wärmeunterschied, während dQ die vom wärmeren Körper abgegebene Wärmemenge ist. Nun ist also:

$$A\,dv\,\partial p = dQ\,\frac{\partial T}{T}.$$

Das Zuströmen der Wärme geschah unter constanter Temperatur. Formel 8) des vorigen Abschnitts gibt dann:

$$dQ = \frac{C\,dv}{\frac{\partial t}{\partial p}}.$$

∂p rührt nur von der Temperaturabnahme her, und nach Formel c) des vorigen Abschnittes:

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial t}}.$$

Ebenso ist:

$$\partial T = \frac{\partial T}{\partial t}\,\partial t,\quad \partial p = \frac{\partial p}{\partial t}\,\partial t,$$

also:

II) $$C\,\frac{\partial T}{\partial t} = AT,$$

wo:

$$C = Y\,\frac{\partial t}{\partial p} - X\,\frac{\partial t}{\partial v}$$

war, ganz wie oben. Diese Gleichung nebst I) des vorigen Abschnittes gelten als Grundformeln der mechanischen Wärmelehre.

9) Anwendung der mechanischen Wärmelehre auf Gase.

Bei den constanten Gasen, bei welchen die Gleichung zwischen t, p und v gegeben ist, sowie auch die zwischen u, p und v, lassen sich die obigen Gesetze weiter verfolgen. Es war nämlich:

$$vp = A\,(1+\alpha\, t),$$

wo A eine für jedes Gas zu bestimmende Constante, $\alpha = 0{,}00365 = \frac{11}{3000}$ ist. Hierfür kann man auch schreiben:

$$vp = r\,(a+t),$$

und es ist:

$$a = \frac{1}{\alpha} = 273^\circ.$$

Für atmosphärische Luft findet Regnault:

$$r = 29{,}272,$$

wo die Grössen in französischem Maasse (p in Kilogramms) gegeben sind.

Man kann -273° als den Nullpunkt einer neuen Thermometerscala betrachten, die auf ihn bezogene Temperatur nennen wir absolut, und demnach ist:

1) $$vp = rt.$$

Die physikalische Bedeutung der absoluten Temperatur ist übrigens folgende. Könnte man sich ein Gas denken, welches in jeder Temperatur dem Gay-Lussac'schen Gesetze folgte, ein sogenanntes absolutes Gas, so müsste für $t=0$ also bei -273° C für jedes endliche p sein $v=0$. In der That möchte dies der Fall sein, wenn man annimmt, dass nur die Wärme der Anziehung der Körperatome entgegenwirkt, für jedes endliche v dagegen müsste bei -273° der Druck gleich 0 sein. Die wirklichen Gase und die Dämpfe, welche dem Siedepunkte nicht nahe sind, können indess nur annäherungsweise durch die Formel 1) bestimmt werden, jedoch in den Grenzen, welche wir betrachten, ist dieser Unterschied sehr gering.

Bekanntlich ist eine Temperatur von -273° nicht zu erreichen. Es lässt sich natürlich auch annehmen, dass, selbst wenn dies gelingen sollte, eben nicht das Volumen der Gase, sondern das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz aufhören wird zu existiren. Und wirklich geschieht dies bei den nicht constanten Gasen nicht allein dann, wenn sie flüssig werden, sondern selbst in der Nähe der Temperaturen und Druckverhältnisse, wo dies geschieht. Wasserdämpfe also folgen diesem Gesetze in der Nähe des Thaupunktes nicht, bei der Kohlensäure, bekanntlich ebenfalls einem condensirbaren Gase, ist dies ebenfalls nachgewiesen. Bei der atmosphärischen Luft ist bekanntlich noch kein Thaupunkt ermittelt, und in der That kann hier und bei den andern sogenannten constanten Gasen das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz als ziemlich genau richtig für alle Temperaturen angenommen werden, bei denen wir operiren.

Bezeichnen wir jetzt noch mit c die specifische Wärme bei constantem Druck, mit c_1 die bei constantem Volumen, und nehmen an, dass diese beiden Grössen

in den Grenzen, wo die Formel 1) gilt, von der Temperatur unabhängig sind, wie dies die Erfahrung zu bestätigen scheint, so haben wir nach Abschnitt 7):

$$c_1 = \frac{X}{\frac{\partial t}{\partial p}}, \quad c = \frac{Y}{\frac{\partial t}{\partial v}},$$

also wegen unserer Formel 1):

$$c_1 = \frac{Xr}{v}, \quad c = \frac{Yr}{p}.$$

Die Formel 1) des Abschnittes 7) aber gibt:

$$\begin{aligned}\triangle Q &= \frac{1}{r}(c_1 v\, dp + cp\, dv) \\ &= \frac{1}{r}\left[(c-c_1)p\, dv + c_1 d(vp)\right] \\ &= \frac{1}{r}\left[c\, d(pv) - (c-c_1)v\, dp\right].\end{aligned}$$

Ausserdem gibt Formel I) nämlich:

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{\partial X}{\partial v} = A,$$

in unserem Falle:

2) $$A = \frac{c-c_1}{r}.$$

Aus der bekannten Grösse r und den schon früher gegebenen specifischen Wärmen:

$$c = 0{,}2377, \quad c_1 = 0{,}1687,$$

lässt sich also leicht das mechanische Wärmeäquivalent theoretisch ermitteln.

Es war ferner:

$$C = Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v},$$

also in unserem Falle:

$$C = Y\frac{pv(c-c_1)}{r^2},$$

also mit Benutzung von 1) und 2):

$$C = At.$$

Setzt man dies in die Gleichung II) des vorigen Abschnittes, so ergibt sich für Gase:

$$AT = At\frac{dT}{dt},$$

oder durch Integration:

$$\lg t = \lg \alpha T, \quad \frac{t}{\alpha} = T,$$

wo α eine willkürliche Constante ist. Dieselbe spielt in der Gleichung II) durchaus keine Rolle, da sie auf der linken und rechten Seite vorkommt, man kann also $\alpha = 1$ setzen, und T ist die absolute Temperatur, wie dies bereits bemerkt wurde. Natürlich gilt dies nicht nur für Gase, sondern für alle Körper, da die Function T von der Beschaffenheit der Körper unabhängig war. Die Gleichung II) nimmt also die Gestalt an:

II a) $$At = C,$$

unter t die absolute Temperatur verstanden, oder auch:

$$Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v} = At.$$

Wenn man in dem hier gegebenen Werthe von $\triangle Q$ für pv noch seinen Werth aus 1), und für $c-c_1$ aus 2) setzt, so kommt übrigens:

$$\triangle Q = Ap\, dv + c_1\, dt,$$
$$\triangle Q = c\, dt - Av\, dp.$$

Der erste Werth mit den Formeln:

$$\triangle Q = dU + Ap\, dv$$

verglichen, gibt:

$$dU = c_1\, dt,$$

also U vom Volumen v unabhängig:

$$U = c_1 t + \text{const.}$$

Also wenn ein Körper von der Temperatur t_0 auf die Temperatur t steigt, so ist die dazu nöthige Wärmemenge oder Energie (abgesehen vom Drucke:

3) $$U = c_1(t - t_0),$$

welches auch das Volumen sei.

Die Function U ist im Allgemeinen nicht allein von der Temperaturerhöhung, sondern auch vom Volumen des Körpers abhängig. Man muss dies so ansehen, dass diese Grösse, wie schon früher gezeigt, in zwei Theile zerfällt, die zur Temperaturerhöhung und die zur Volumenänderung oder inneren Arbeit verbrauchte Wärme. Für absolute Gase zeigt aber diese Formel, dass die Volumenänderung keinerlei Einwirkung ausübt. Es findet also innere Arbeit dabei nicht statt. Daraus folgt der Satz:

„Wenn ein Gas ohne einen Druck zu überwinden, also in den leeren Raum ausströmt, so findet dabei keine innere Arbeit statt."

Alle Wärme U wird also lediglich zur Temperaturerhöhung verwandt. Diese Betrachtung hat zu eigenthümlichen Ansichten über die Structur der Gase geführt, die wir hier füglich übergehen können.

Wenn eine Volumenänderung bei Ueberwindung von Druck stattfindet, so gibt der Werth von $\triangle Q$ noch durch Integration:

4) $$Q = c_1(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\, dv,$$

wenn v_1 das anfängliche Volumen ist, v_2 das schliessliche, t_1, t_2 die entsprechenden Temperaturen.

Um die Arbeit $\int_{v_1}^{v_2} p\,dv$ zu bestimmen, muss man den Weg aber kennen. Wir thun dies für die Hauptfälle.

A) Das Volumen sei constant.

Dann ist die Arbeit Null und:

5) $$Q = U = c_1 (t_2 - t_1).$$

B) Der Druck sei constant.

Die Formel:

$$\triangle Q = c\,dt - Av\,dp$$

gibt dann:

$$\triangle Q = c\,dt,$$

also:

6) $$Q = c(t_2 - t_1).$$

In diesem Falle gibt das Grundgesetz $vp = rt$:

$$(v_2 - v_1)p = r(t_2 - t_1),$$

oder:

7) $$Ap(v_2 - v_1) = (c - c_1)(t_2 - t_1).$$

Dies ist offenbar die zur äussern Arbeit verwandte Wärmemenge, und diese Arbeit selbst beträgt:

8) $$F = p(v_2 - v_1) = r(t_2 - t_1).$$

C) Sei die Temperatur constant.

Also:

$$dt = 0,\ dU = 0,$$

$$\triangle Q = Ap\,dv = Art\frac{dv}{v}.$$

Hier muss die ganze Wärmemenge $\triangle Q$ zur äussern Arbeit verwandt werden. Integration gibt, da man hat:

9) $$p_2 v_2 = p_1 v_1 = rt,$$

10) $$Q = Art \lg\frac{v_2}{v_1} = Ap_1 v_1 \lg\frac{v_2}{v_1} = Ap_2 v_2 \lg\frac{v_2}{v_1}.$$

Die Arbeit selbst ist:

11) $$F = p_1 v_1 \lg\frac{v_2}{v_1}.$$

D) Die gesammte Wärme sei constant.

Also:

$$\triangle Q = 0,$$

d. h. es wird keine Wärme zugeleitet. Dann hat man:

$$c_1 v\,dp + cp\,dv = 0,$$

also:

12) $$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^k,$$

wo:

$$k = \frac{c}{c_1}$$

gesetzt worden ist. Also auch:

13) $$\frac{t_2}{t_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

$$A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv = c_1(t_1 - t_2),$$

also:

14) $$F = \frac{c_1}{A}(t_1 - t_2) = \frac{p_1 v_1}{k-1}\left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right] = \frac{p_1 v_1}{k-1}\left\{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right\}.$$

Diesen Betrachtungen lässt sich auch ein Mittel entnehmen, die Constante $k = \frac{c}{c_1}$, also da c bekannt ist, die specifische Wärme c_1 bei constantem Volumen zu messen. Die Temperatur t hier ist immer die absolute, es ist dafür $a + t$ zu setzen, wenn man die gewöhnliche Scala nimmt.

In ein Gefäss mit verdünnter Luft von der Temperatur der äusseren t_1 lasse man mittels eines Hahnes Luft einströmen, wobei dieselbe bis zur Temperatur t_2 erhöht wird. Nachdem der Hahn verschlossen ist, wird dieselbe bis zur Temperatur t_1 sich wieder abkühlen. Die Drucke p_1, p_2, p_3, welche die Luft in diesen drei Zuständen trägt, werden durch ein Monometer gemessen. Betrachten wir nun eine constante Gewichtsmenge der Luft im Gefässe. Da die äussere und innere Luft gleiche Temperatur haben, so erfolgt die Verdichtung beim Einströmen ohne Wärmezuleitung, und man hat daher:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Diese Formel würde schon k geben, wenn man t_2 direct messen könnte, es geschieht aber die Abkühlung zu schnell, als dass dies geschähe. Da aber diese Abkülung ohne Volumenänderung vor sich geht, hat man nach Formel 1):

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{t_2}{t_1},$$

also lassen sich die Temperaturen elimi-miniren, und man hat:

$$\frac{p_2}{p_3} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}},$$

$$k = \frac{\lg p_2 - \lg p_1}{\lg p_3 - \lg p_1}.$$

Unterscheiden sich die Grössen p_1, p_2, p_3 nun von einander, so kann man annäherungsweise setzen:

$$k = \frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_1}.$$

Erfolgt irgend eine Condensation ohne Wärmezuführung, so ist auch nach 13):

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1},$$

oder wenn δ_1 und δ_2 die bezüglichen Dichtigkeiten bezeichnen, die dem Volumen umgekehrt proportional sind:

$$\frac{t_2}{t_1} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{k-1}.$$

Unter γ wollen wir jetzt die Condensation verstehen, so dass:

$$\delta_2 = \delta_1 (1+\gamma)$$

ist, also:

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = (1+\gamma)^{k-1} - 1 = \frac{\vartheta}{t_1},$$

wenn ϑ die Temperaturerhöhung ist. Für die gewöhnliche Scala ist zu vertauschen t_1 mit:

$$a + t_1 = \frac{1}{\alpha}(1 + \alpha t_1).$$

Ist nun die Verdichtung gering, und die Temperatur nicht sehr weit vom Nullpunkte, so kann:

$$1 + \alpha t_1 = 1, \quad (1+\gamma)^{k-1} = 1 + (k-1)\gamma$$

gesetzt werden, und es ergibt sich:

$$\alpha \vartheta = \gamma (k-1).$$

Diese Formel wird bei den Schwingungsgleichungen der Luft angewandt (vergl. den Artikel: Schwingungen der Luft), und es ergibt sich daraus, dass:

$$a = \sqrt{\frac{g h k}{D}}$$

die Geschwindigkeit des Schalles ist, wo g die Beschleunigung der Schwere, h die Höhe des Quecksilberbarometers, D die Dichtigkeit des Gases ist. Da man nun a kennt, so gibt auch dies ein Mittel, und zwar das beste, die Grösse k zu bestimmen. Dasselbe ist von Poisson vorgeschlagen worden

Man kann aber auch annehmen, dass ohne Zuführung von Wärme der Druck sich plötzlich ändere. Sei z. B. die Luft unter einem Kolben bei Druck p im Gleichgewicht, v und t bezüglich Volumen und Temperatur der Luft. Werde nun plötzlich der Kolben bis zum Drucke p_1 belastet, so tritt eine Abkühlung auf Temperatur t_1 beim Volumen v_1 ein, die Wärmeabnahme ist dann:

$$U = c_1 (t - t_1)$$

die Arbeit:

$$p_1 (v_1 - v),$$

also:

$$c_1 (t - t_1) = A p_1 (v_1 - v)$$
$$= A r t_1 - \frac{p_1}{p} A r t,$$

so dass man hat:

15) $$t - t_1 = \frac{Ar}{c} \frac{p - p_1}{p} t,$$

16) $$F = \frac{c_1}{A}(t - t_1) = \frac{r}{k} \frac{p - p_1}{p} t$$
$$= \frac{p - p_1}{k} v.$$

Nehmen wir noch an, beim umkehrbaren Kreisprozesse sei der vermittelnde Körper ein Gas. Es war bei demselben:

$$AF = \frac{Q(t - t_1)}{t},$$

unter t immer die absolute Temperatur verstanden. Da während des Zuströmens die Wärmemenge Q, und während des Abströmens von Q' die Temperatur constant bleibt, so ist nach Formel 10):

$$Q = A r t \lg \frac{v_1}{v}, \quad Q' = A r t_1 \lg \frac{v_3}{v_2},$$

unter v, v_1 die Volumina der Luft beim Anfange und beim Ende des Zuströmens Q, und unter v_2, v_3 die beim Abströmen Q' verstanden. Aber wegen $\frac{Q}{t} = \frac{Q'}{t'}$ ist:

17) $$\frac{v_1}{v} = \frac{v_3}{v_2},$$

und ausserdem:

18) $$F = r(t - t_1) \lg \frac{v_1}{v}.$$

Diese Verwendung der Wärme wäre die vortheilhafteste, welche sich bei Anwendung eines Gases erreichen lässt.

Untersuchen wir jetzt diejenige, welche sich für die Calorische Maschine ergibt.

Abgesehen von der speciellen Einrichtung dieser Maschine beruht sie auf folgendem Prinzip. — Der Gewichtseinheit Luft mögen die Grössen v_1, p_1, t_1 für Volumen, Druck und Temperatur zukommen. Es wird Wärme bei constantem Volumen zugeführt, bis die Temperatur t_2 erreicht ist. Dann ist die zugeführte Wärme:

$$Q_1 = c_1 (t_2 - t_1).$$

Sei p_2 die Endspannung. Nun wird ohne Zuführung von Wärme das Volumen auf v_2, die Temperaturabnahme auf t_3 gebracht, wobei die Wärmemenge $c_1 (t_2 - t_3)$ in Arbeit verwandelt wird. Jetzt wird die Wärmemenge Q_2 abgegeben, bis Temperatur t_4 eintritt. Es ist dann:

$$Q_2 = c_1 (t_3 - t_4).$$

Endlich wird das Gas auf den Anfangszustand zusammengedrückt, wobei Wärmemenge $Q_3 = c_1 (t_1 - t_4)$ aus Arbeit entsteht. Die geleistete Arbeit ist somit:

$$F = \frac{c_1}{A} (t_2 - t_3 - t_1 + t_4).$$

Da im zweiten Zeittheile keine Wärme hinzutritt, so hat man:

$$\frac{t_3}{t_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1},$$

und ebenso im vierten:

$$\frac{t_4}{t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1},$$

also:

$$F = \frac{c_1}{A} (t_2 - t_1) \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}\right].$$

10) Theorie der Dämpfe, besonders der Wasserdämpfe.

Man unterscheidet bei Dämpfen, wie bei den constanten Gasen, zunächst Temperatur, Dichtigkeit und Spannung (Druck). Dieselben stehen zu einander in gewisser Beziehung, von der später die Rede sein soll.

Was zunächst die Spannung anbetrifft, so kann diese für jede Temperatur ein gewisses Maximum nicht übersteigen. Ist dies erreicht, so werden die Dämpfe wieder flüssig, wenn man neuen Dampf zuführt (sie condensiren).

Dalton gibt über die Expansivkraft im Maximum folgendes Gesetz: Alle Dämpfe haben gleiche Expansivkraft, wenn sie eine gleiche Anzahl von Graden, positiv oder negativ, von ihrem Siedepunkte entfernt sind. Da also Alkohol bei 78°, Wasser bei 100° sieden, so hat Alkohol von $78 \pm t$ Grad die Spannkraft des Wasserdampfes von $100 \pm t$ Grad.

Nach Versuchen von Regnault ist dies Gesetz indess nur annähernd richtig.

Rudberg folgert aus Versuchen, dass die aus siedenden Salzauflösungen sich entwickelnden Dämpfe bei gleichen Temperaturen gleiche Expansivkraft haben, obgleich die Siedepunkte verschieden sind. Dies Gesetz widerspricht also dem Dalton'schen.

Was die Dichtigkeiten der Dämpfe anbetrifft, so verhalten dieselben sich (für verschiedene Dämpfe) nach Versuchen nahe umgekehrt, wie die latenten Wärmen. Die mechanische Wärmelehre zeigt, dass dies Gesetz dann nur für bestimmte Temperaturen richtig sein kann, wenn man die zu Arbeit verwandelte Wärme nicht mitrechnet, da letztere vom Drucke abhängig ist.

Um die Dichtigkeit der Dämpfe zu ermitteln, ist ausser dem eben oben beschriebenen Verfahren von Gay-Lussac noch das von Dumas zu erwähnen. Derselbe bringt eine angemessene Menge der zu untersuchenden Flüssigkeit in einen Glasballon, der in eine feine Spitze ausläuft, und erhitzt letztere in einem Bade von Wasser, Oel, Chlorzink u. s. w., bis das Ausströmen der Flüssigkeit ganz aufgehört hat, und der Rest in Dampf verwandelt ist, worauf dann die Spitze eingeschmolzen wird. Bekannt ist das Gewicht G_1 des Ballons mit der Flüssigkeit, das Volumen V derselben, und das Gewicht G des Ballons mit trockener atmosphärischer Luft gefüllt, deren Dichtigkeit γ sei. Offenbar ist dann die Dichtigkeit δ des Dampfes bei der Temperatur und unter dem Drucke der Flüssigkeit, in welcher er sich befindet:

$$\delta_1 = \frac{G_1 - G + V\gamma}{V}.$$

Man erhält für einige Dämpfe, die nahe dem Siedepunkte sind, folgende Zahlen:

Atmosphärische Luft	1,000
Wasserdampf	0.6235
Alkoholdampf	1,6138
Schwefelätherdampf	2,5860
Terpentinöldampf	3,0130
Quecksilberdampf	6,976

Lässt man eine Flüssigkeit verdampfen in einem Raume, der mit Gas angefüllt

ist, also z. B. in der atmosphärischen Luft, so wird die Verdampfung zwar desto langsamer erfolgen, je dichter das Gas ist, aber die Menge und Spannkraft des Dampfes ist gerade so wie im leeren Raume.

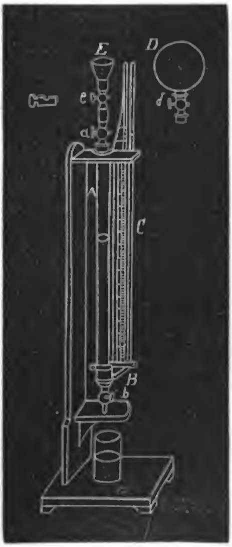
Auch verhalten sich Dämpfe ganz so wie Gase, derart, dass ein Gemenge derselben sich nicht so lagert, dass das specifisch schwerere das untere ist, sondern sie durchdringen sich und ihre Spannung ist gleich der Summe derjenigen, welche die Gase einzeln haben.

Diese beiden Gesetze rühren auch von Dalton her.

Bestätigen kann man sie durch folgendes Experiment.

Die Glasröhre *AB* (Fig. 37) communicirt unten mit einer engern Glasröhre

Fig. 37.



BC, an den Enden befinden sich die Hähne *a* und *b*. Es wird *a* geöffnet, *b* verschlossen, und der Apparat von oben her mit Quecksilber gefüllt, dann *a* verschlossen und *b* geöffnet, so dass Quecksilber abfliesst und oberhalb desselben in *AB* ein leerer Raum entsteht. Dann wird auch *b* geschlossen. Der Niveauabstand *h* zwischen *AB* und *BC* ist dann gleich dem Drucke der äussern Luft, da der Apparat ein Heberbarometer bildet. Ueber *a* wird nun ein mit trockener Luft gefüllter Ballon *D* mit Hahn *d* angeschraubt, alle drei Hähne geöffnet, so dass der obere Theil von *AB* mit Luft gefüllt wird; das Quecksilber sinkt dann; hierauf wird *b* verschlossen, h_1 sei dann der Niveauabstand in *AB* und *CB*, es ist also die Spannung der Luft in *D* und *A* gleich:

$$x = h - h_1.$$

Jetzt wird auch der Hahn *a* geschlossen, und statt des Ballons *D* ein Trichter *E* mit Hahn *e* angeschraubt, mittels desselben die Flüssigkeit, deren Dämpfe man untersuchen will, eingefüllt, so lange als die Dämpfe derselben das Quecksilber in *AB* herabdrücken. Geschieht dies nicht mehr, so ist die Luft mit Dampf gesättigt. Durch *B* wird nun so viel Quecksilber zugefüllt, bis dasselbe in *AB* wieder seinen vorigen Stand hat. Der Niveauunterschied in beiden Röhren sei dann h_2, die Spannung der mit Dampf gesättigten Luft ist dann:

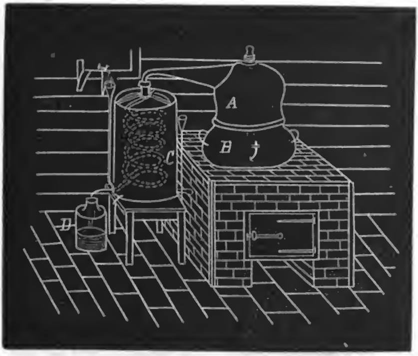
$$y = h - h_2 = x + h_1 - h_2.$$

Nun zeigt sich, dass $h_1 - h_2$ gleich der Spannung des gesättigten Dampfes für die angegebene Temperatur ist, und somit hat man die Summe der Spannungen der Luft und des Dampfes in der Röhre *AB*, womit die obigen Gesetze bestätigt sind.

Wenn zwei communicirende Gefässe *A* und *B* dieselbe Flüssigkeit enthalten, und ungleich erhitzt werden, so nimmt der sich bildende Dampf nur die Spannkraft an, welche als Maximum der niedern Temperatur entspricht, weil der von der einen Röhre ausgehende sonst wieder flüssig werden müsste. — Hierauf beruht die Destillation.

Es kommt bei derselben darauf an, die in einer Blase *B* (Fig. 38) enthaltene Flüssigkeit durch Erhitzen in Dampf zu verwandeln, um sie von darin aufgelösten, nicht flüchtigen Substanzen zu befreien. Die Dämpfe werden durch den Helm *A* eines vielfach gewundenen Rohres in den Behälter *C* geleitet, wo sie durch Abkühlung von aussen wieder flüssig gemacht werden, und in ein Gefäss *D* strömen. Der Condensator der Dampfmaschine beruht auf denselben Betrachtungen.

Fig. 38.



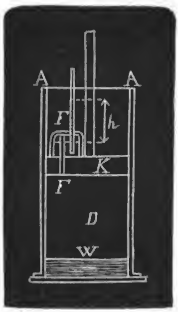
Beschäftigen wir uns jetzt mit den Wasserdämpfen.

Für jede gegebene Temperatur kann in einem gegebenen Raume ein gewisses Quantum Wasserdampf enthalten sein. Ist eine hinreichende Quantität Wasser vorhanden, so wird demgemäss sich Dampf bilden, und derselbe dann im Maximum seiner Spannkraft sein. Dieser Dampf heisst gesättigt. Ist Wasser in ein Gefäss eingeschlossen, welches mit einem belasteten Stempel versehen ist, so wird der Dampf immer gesättigt sein, und seiner Spannkraft gemäss den Stempel heben. Wird aber der Stempel mehr belastet, so wird derselbe sich senken, und da die Spannkraft des Dampfes sich nicht mehr erhöhen lässt, ein Theil davon sich condensiren. Hieraus folgt, dass, wenn Dampf gesättigt ist, sein Druck, sein Volumen und seine Dichtigkeit nur von der Temperatur abhängig sind.

Wenn man gesättigten Dampf unter einem Stempel weiter erwärmt, ohne dass Wasser vorhanden ist, so wird er sich ausdehnen, dabei seine Spannkraft, die durch das Kolbengewicht bestimmt ist, zunehmen, also derselbe aufhören, gesättigt zu sein. Der Dampf heisst dann überhitzt. Seine Spannung hängt dann nicht allein von der Temperatur, sondern auch vom Volumen ab.

Man kann diese Betrachtungen auch durch folgendes Experiment bestätigen. Ueber einem Wasserquantum *W* im Gefäss *AB* (Fig. 39) befinde sich unmittelbar ein Kolben *K*. Zieht man denselben empor, so wird ein Theil der Flüssigkeit *D* sich in Dampf verwandeln, und wenn die Flüssigkeitsmenge nicht sehr gross ist, wird sie beim Aufziehen des Kolbens fast ganz Dampfgestalt an-

Fig. 39.



nehmen, da ein luftleerer Raum über derselben ist. Aendert sich hierbei die Temperatur der Flüssigkeit nicht, so wird sich auch die Expansivkraft des Dampfes nicht ändern, der Dampf ist also immer im Maximum. Zieht man aber, nachdem das Wasser ganz in Dampf verwandelt ist, den Kolben noch höher, so muss derselbe sich ausdehnen,

14

ohne dass neuer Dampf hinzukommt, er ist also nicht mehr im Maximum der Spannkraft.

Indem wir unter t jetzt die Temperatur in gewöhnlichen Centesimalgraden, unter p den Druck verstehen, wird zwischen diesen Grössen für gesättigten Dampf eine Gleichung von der Form stattfinden:

$$p = F(t).$$

Die Function $F(t)$ zu finden, ist bis jetzt nicht gelungen. Man hat jedoch verschiedene Erfahrungsformeln, welche dieselbe in gewissen Grenzen ersetzen.

Nach Young setzt man:

$$p = (a + b\,t)^n.$$

Wenn p in Atmosphären gegeben ist, so hat man bei Spannkräften über vier Atmosphären nach Dulong und Arago:

$$a = 0{,}2847, \quad b = 0{,}007153, \quad n = 5,$$

und bis zu vier Atmosphären nach Mellet:

$$a = \tfrac{75}{173}, \quad b = \tfrac{1}{173}, \quad n = 6,$$

nach Pambour von einer bis vier Atmosphären:

$$a = \frac{72{,}67}{171{,}72}, \quad b = \frac{1}{171{,}72}, \quad n = 6,$$

nach einer anderen Formel für Temperaturen über 100°:

$$a = \tfrac{86}{183}, \quad b = \tfrac{1}{183}, \quad n = 6{,}42,$$

für Temperaturen unter 100°:

$$a = \tfrac{113}{213}, \quad b = \tfrac{1}{213}, \quad n = 7{,}71507.$$

Roche gibt dagegen die Formel:

$$p = a b^{\frac{st}{m+t}}.$$

Nach Magnus ist:

$$a = 4{,}525, \quad b = 10, \quad s = 7{,}4475, \quad m = 234{,}69,$$

nach Holzmann:

$$a = 4{,}529, \quad b = 10, \quad s = 7{,}2804, \quad m = 236{,}22,$$

August setzt:

$$p = \left(\frac{6415 \cdot (1028{,}4 + t)}{10^6}\right)^{\frac{100 - t}{100 + \frac{1}{3}t}},$$

Regnault setzt für Dämpfe von −32° bis 0°:

$$p = a + b^{\alpha(32 + t)},$$

wo:

$$a = -0{,}08038, \quad \lg b = 0{,}6024724 - 1,$$
$$\lg \alpha = 0{,}0333980,$$

für Dämpfe von 0 bis 100°:

$$p = a + b^{\alpha t} - c^{\beta t},$$

wo:

$$a = 4{,}7384380, \quad \lg b = 0{,}1340339 - 2,$$
$$\lg c = 0{,}6116485, \quad \lg \alpha = 0{,}006865036,$$
$$\lg \beta = 0{,}9967249 - 1,$$

für Dämpfe von 100 bis 230°:

$$p = a - b^{\alpha(20 + t)} - c^{\beta(20 + t)},$$

wo:

$$a = 6{,}2640348, \quad \lg b = 0{,}1397743,$$
$$\lg c = 0{,}6924351, \quad \lg \alpha = 0{,}794049292 - 1,$$
$$\lg \beta = 0{,}998343862 - 1.$$

Den folgenden Tafeln liegen diese Angaben zu Grunde.

Tafel für die Expansivkraft des gesättigten Wasserdampfes.

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären
−32°	0,0320	0,0004	+21°	1,8495	0,024
31	0,0352	0,0005	22	1,9659	0,026
30	0,0386	0,0005	23	2,0888	0,028
29	0,0424	0,0006	24	2,2184	0,029
28	0,0464	0,0006	25	2,3550	0,031
27	0,0508	0,0007	26	2,4988	0,033
26	0,0555	0,0007	27	2,5505	0,034
25	0,0605	0,0008	28	2,8101	0,037
24	0,0660	0,0009	29	2,9782	0,039
23	0,0719	0,0009	30	3,1548	0,042
22	0,0783	0,0010	31	3,3406	0,044
21	0,0853	0,0011	32	3,5359	0,047
20	0,0927	0,0012	33	3,7411	0,049
19	0,1008	0,0013	34	3,9565	0,052
18	0,1095	0,0014	35	4,1827	0,055
17	0,1189	0,0015	36	4,4201	0,058
16	0,1290	0,0017	37	4,6691	0,061
15	0,1400	0,0018	38	4,9302	0,065
14	0,1518	0,0020	39	5,2039	0,068
13	0,1646	0,0022	40	5,4906	0,072
12	0,1783	0,0024	41	5,7910	0,076
11	0,1933	0,0025	42	6,1055	0,080
10	0,2093	0,0027	43	6,4346	0,085
9	0,2267	0,0030	44	6,7790	0,089
8	0,2455	0,0032	45	7,1391	0,094
7	0,2658	0,0035	46	7,5158	0,099
6	0,2876	0,0038	47	7,9093	0,004
5	0,3113	0,0041	48	8,3204	0,009
4	0,3368	0,0044	49	8,7499	0,115
3	0,3644	0,0048	50	9,1982	0,121
2	0,3941	0,0052	51	9,6661	0,127
1	0,4263	0,0056	52	10,1543	0,134
0	0,4600	0,0061	53	10,6636	0,140
+ 1	0,4940	0,0065	54	11,1945	0,147
2	0,5302	0,0070	55	11,7478	0,155
3	0,5687	0,0075	56	12,3244	0,163
4	0,6097	0,0080	57	12,9251	0,170
5	0,6534	0,0086	58	13,5505	0,178
6	0,6998	0,0092	59	14,2015	0,187
7	0,7492	0,0099	60	14,8791	0,196
8	0,8017	0,0107	61	15,5839	0,205
9	0,8574	0,011	62	16,3170	0,215
10	0,9165	0,012	63	17,0791	0,225
11	0,9792	0,013	64	17,8714	0,235
12	1,0457	0,024	65	18,6945	0,246
13	1,1162	0,015	66	19,5496	0,257
14	1,1908	0,016	67	20,4376	0,267
15	1,2699	0,017	68	21,3596	0,281
16	1,3536	0,018	69	22,3165	0,294
17	1,4421	0,019	70	23,3093	0,306
18	1,5357	0,020	71	24,3393	0,320
19	1,6346	0,022	72	25,4073	0,334
20	1,7391	0,023	73	26,5147	0,349

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären
+ 74°	27,6624	0,364	+129°	197,015	2,592
75	28,8517	0,380	130	203,028	2,671
76	30,0838	0,396	131	209,194	2,753
77	31,3600	0,414	132	215,503	2,836
78	32,6811	0,430	133	221,969	2,921
79	34,0488	0,448	134	228,592	3,008
80	35,4643	0,466	135	235,373	3,097
81	36,9287	0,486	136	242,316	3,188
82	38,4435	0,506	137	249,423	3,282
83	40,0101	0,526	138	256,700	3,378
84	41,6298	0,548	139	264,144	3,476
85	43,3041	0,570	140	274,763	3,576
86	45,0344	0,593	141	279,557	3,678
87	46,8221	0,616	142	287,530	3,783
88	48,6687	0,640	143	295,686	3,890
89	50,5759	0,665	144	304,026	4,000
90	52,5450	0,691	145	312,555	4,113
91	54,5778	0,719	146	321,274	4,227
92	56,6757	0,746	147	330,187	4,344
93	58,8406	0,774	148	339,298	4,464
94	61,0740	0,804	149	348,609	4,587
95	63,3778	0,834	150	358,123	4,712
96	65,7535	0,865	151	367,843	4,840
97	68,2029	0,897	152	377,774	4,971
98	70,7280	0,931	153	387,918	5,104
99	73,3305	0,965	154	398,277	5,240
100	76,0000	1,000	155	408,856	5,380
101	78,5790	1,036	156	419,659	5,522
102	81,6010	1,074	157	430,688	5,667
103	84,5280	1,112	158	441,945	5,815
104	87,5410	1,152	159	453,436	5,966
105	90,6410	1,193	160	455,162	6,120
106	93,8310	1,235	161	477,128	6,278
107	97,1140	1,278	162	489,336	6,439
108	100,4910	1,322	163	501,791	6,603
109	103,965	1,368	164	514,497	6,770
110	107,537	1,415	165	527,454	6,940
111	111,209	1,463	166	540,669	7,114
112	114,983	1,513	167	554,143	7,291
113	118,861	1,564	168	567,882	7,472
114	122,847	1,616	169	581,890	7,656
115	126,941	1,670	170	596,166	7,844
116	131,147	1,726	171	610,719	8,036
117	135,466	1,782	172	625,548	8,231
118	139,902	1,841	173	640,660	8,430
119	144,455	1,901	174	656,055	8,632
120	149,128	1,962	175	671,743	8,839
121	153,925	2,025	176	687,722	9,049
122	158,847	2,091	177	703,997	9,263
123	163,896	2,157	178	720,572	9,481
124	169,076	2,225	179	737,452	9,703
125	174,388	2,295	180	754,639	9,929
126	179,835	2,366	181	772,137	10,150
127	185,420	2,430	182	789,952	10,394
128	191,147	2,515	183	808,084	10,633

Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären	Temperatur.	Dampfspannung in Centimeter	Dampfspannung in Atmosphären
+184°	826,540	10,876	+208°	1376,453	18,111
185	845,323	11,123	209	1404,252	18,477
186	864,435	11,374	210	1432,480	18,848
187	883,882	11,630	211	1461,132	19,226
188	903,668	11,885	212	1490,222	19,608
189	923,795	12,155	213	1519,748	19,997
190	944,270	12,425	214	1549,717	20,391
191	965,093	12,699	215	1580,133	20,791
192	986,271	12,977	216	1610,994	21,197
193	1007,804	13,261	217	1642,315	21,690
194	1029,701	13,549	218	1674,090	22,027
195	1051,963	13,842	219	1706,329	22,452
196	1074,595	14,139	220	1739,039	22,882
197	1097,500	14,441	221	1772,213	23,319
198	1120,982	14,749	222	1805,864	23,761
199	1144,746	15,062	223	1839,994	24,210
200	1168,896	15,380	224	1874,607	24,666
201	1193,437	15,703	225	1909,704	25,128
202	1218,369	16,031	226	1945,292	25,596
203	1243,700	16,364	227	1981,376	26,071
204	1269,430	16,703	228	2017,961	26,552
205	1295,566	17,047	229	2055,048	27,040
206	1322,112	17,396	230	2092,640	27,535
207	1349,075	17,751			

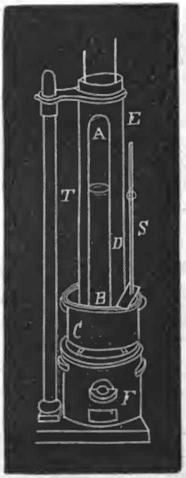
Tafel für die Temperaturen des gesättigten Wasserdampfes.

Expansivkraft in Atmosphären	Expansivkraft in Metern	Temperatur in Graden	Expansivkraft in Atmosphären	Expansivkraft in Metern	Temperatur in Graden
1	0,76	100,0	15	11,40	198,8
2	1,52	120,6	16	12,16	201,9
3	2,28	133,9	17	12,92	204,9
4	3,04	144,0	18	13,68	207,7
5	3,80	152,2	19	14,44	210,4
6	4,56	159,2	20	15,20	213,0
7	5,32	165,3	21	15,96	215,5
8	6,08	170,8	22	16,72	217,9
9	6,84	175,8	23	17,38	220,3
10	7,60	180,3	24	18,14	222,5
11	8,36	184,5	25	19,00	224,7
12	9,12	188,4	26	19,76	226,8
13	9,88	192,1	27	20,52	228,9
14	10,64	195,5	28	21,28	230,9

Was die Dichtigkeit des Dampfes anbetrifft, so findet Gay-Lussac für denselben bei 100° und 0,76 Meter Barometerstand 0,5895 Gramm als das Gewicht eines Liter Dampfes, das ist $\frac{5}{8}$ der Dichtigkeit der atmosphärischen Luft, von der ein Liter 0,9454 Gramm wiegt.

Gay-Lussac hat diese Zahlen durch folgendes Experiment gefunden. Ein dünnes, vorher gewogenes Glaskügelchen wurde mit Wasser gefüllt und zugeschmolzen. Es wurde dann abermals gewogen, und so das Gewicht des darin enthaltenen Wassers ermittelt. Diese Kugel wurde dann in eine eingetheilte Glasröhre AB (Fig. 40) gebracht, welche

Fig. 40.



mit Quecksilber gefüllt war, und in einem ebenfalls mit Quecksilber gefüllten Gefässe C stand, welches durch eine Feuerung F erhitzt werden konnte. Die Röhre AB war noch von einem Glascylinder DE umgeben, und der Zwischenraum mit Wasser gefüllt. Die Vorrichtung wurde dann so weit erwärmt, dass das Kügelchen K gesprengt wurde, und das darin enthaltene Wasser Dampfform annahm, unter Erhaltung einer constanten Temperatur. Die letztere wurde nun an einem Thermometer T, das Volumen und die Expansivkraft des Dampfes aber mittels des eingetheilten Stabes S bestimmt.

Gewöhnlich legt man das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz auch den Dämpfen zu Grunde, und man hat bei den obigen Angaben von Gay-Lussac die Dichtigkeit, d. h. das Gewicht eines Liter Dampf:

$$\delta = \frac{0{,}7857\,p}{1+0{,}00367\,t} \text{ Kilogramme,}$$

wo p den Druck in Kilogrammen für den Quadratmeter gibt. Oder wenn man absolute Temperatur einführt, die wir fortan mit T bezeichnen:

$$\delta = \frac{214{,}09\,p}{T} \text{ Kilogramme.}$$

Ist der Dampf im Maximum der Spannung, so lässt sich aus den oben gegebenen Formeln und der hier gegebenen t eliminiren. Statt dessen gibt Navier eine Näherungsformel.

Ist γ die Dichtigkeit des Wasserdampfes, die des Wassers bei Null Grad als Einheit genommen, so ist:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\beta + p},$$

und nach Pambour bei niedern Spannungen von $\frac{2}{3}$ bis $3\frac{1}{2}$ Atmosphären:

$$\alpha = 20{,}000000, \quad \beta = 1200,$$

und bei höhern Spannungen:

$$\alpha = 21{,}232000, \quad \beta = 3020.$$

Bei sehr niedrigen Spannungen sind die genauern Formeln zu nehmen.

Es entsteht nun aber die Frage, in wiefern das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz richtig ist, oder doch der Wahrheit sich nähert.

Möge sich in einem Cylinder, dessen Querschnitt gleich der Einheit ist, die Gewichtsmenge Wasser M befinden, dessen Temperatur t sei, derart, dass der Cylinder gefüllt ist. Möge ferner V das Volumen der Gewichtseinheit sein. Unter dem Kolbendruck p werde jetzt Dampf erzeugt, dessen Gewicht m und wo das Volumen für die Gewichtseinheit v sei, wobei eine Wärmemenge Q verbraucht wird. Die verrichtete Arbeit ist hierbei:

$$mp\,(v - V),$$

wozu die Wärmemenge:

$$Amp\,(v - V)$$

gehört. Wenn hierbei keine Temperaturerhöhung erfolgt, so ist die übrige Wärme:

$$Q - Amp\,(v - V),$$

diejenige, welche zur Ueberwindung der Cohäsion des Wasserdampfes dient. Wenn wir dieselbe auf die Gewichtseinheit bezogen gleich ϱ setzen, und q die für die Erzeugung der Gewichtseinheit Dampf nöthige Wärme ist, so ergibt sich:

$$q = Ap\,(v - V) + \varrho.$$

Das Gesammtvolumen von Dampf und Wasser aber ist:

$$w = (M-m)\,V + mv = MV + m\,(v - V).$$

Wenn die Zuführung der Wärme unter constantem Druck und constanter Temperatur geschieht, so ist:

$$dQ = q\,dm, \quad dw = (v - V)\,dm,$$

also:

$$dQ = \frac{q\,dw}{v - V}.$$

Da man nun hat:

$$dQ = \frac{X\,dt + C\,dv}{\frac{\partial t}{\partial p}} = X\,dp + Y\,dv,$$

so ist hier, da p und t constant sind:

$$dQ = Y\,dv = \frac{C\,dv}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

also:

$$\frac{q\,dw}{v - V} = Y = \frac{C}{\frac{\partial t}{\partial p}} = AT\frac{\partial p}{\partial t},$$

also:

1) $$Ap(v - V) = \frac{pq}{T\frac{\partial p}{\partial t}}.$$

Für die Wärme q, welche dazu gehört, um Wasser von der Temperatur t in Dampf zu verwandeln, haben wir schon früher gefunden:

$$q = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}0000003\,t^3.$$

Clausius setzt abgekürzt:

$$q = 607 - 0{,}708\,t.$$

Durch die Gleichung:

$$p = F(t)$$

ist noch eine der Grössen p oder t zu eliminiren, und man hat dann v als Function von t. Soll also das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz gelten, so muss man haben:

$$pv = R\,(1 + \alpha t),$$

wo R und α Constanten sind. Man würde dann nach Gleichung 1) haben:

$$pv = p\left\{V + \frac{q}{AT\frac{\partial p}{\partial t}}\right\},$$

also:

$$R(1 + \alpha t) = p\left\{V + \frac{a - bt}{AT\frac{\partial p}{\partial t}}\right\},$$

wo:

$$a = 607, \quad b = 0{,}708$$

ist, also wenn:

$$c = 273$$

ist:

$$AR(1+\alpha t)(c+t)\frac{\partial p}{\partial t} - AVp\,(c+t)\frac{\partial p}{\partial t} = p\,(a - bt).$$

Da das Volumen des Wassers gegen das des Wasserdampfes sehr gering ist, so kann man $V = 0$ setzen, und hat:

$$AR\frac{dp}{p} = \frac{(a - bt)\,dt}{(1+\alpha t)(c+t)} = \frac{(a + bc)\,dt}{(1 - c\alpha)(c+t)} - \frac{(a\alpha + b)\,dt}{(1 - c\alpha)(1 + \alpha t)},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\lg p = \lg\left\{E\,\frac{(c+t)^m}{(1+\alpha t)^n}\right\},$$

$$p = E\frac{(c+t)^m}{(1+\alpha t)^n},$$

wo E, m, n leicht zu bestimmende Constanten sind. Es ist aber diese Formel mit keiner der Näherungswerthe von $p = F(t)$ in genauen Einklang zu bringen, so dass die Anwendung des Mariotte'schen Gesetzes eben nur als eine erste Näherung betrachtet werden kann. Indess geben diejenigen Formeln, welche man an die Stelle der obigen zu setzen versucht hat, nicht hinreichend sichere Resultate, um dieselben fürs Erste entbehren zu können.

Bei Anwendung der Formel 1) gestaltet sich die Rechnung folgendermaassen. Setzen wir:

$$p = f(T),$$

indem wir absolute Temperatur einführen, sei ferner:

$$v - V = u,$$

so kommt:

$$Apu = \frac{(m - nT)\,f(T)}{T\,f'(T)},$$

wo:

$$m-nT=a-bt$$

ist.

Sei jetzt W die in der Gewichtseinheit Wasser, I die in der Gewichtseinheit Dampf enthaltene Wärme, setzen wir das Gesammtgewicht:

$$m+M=\mu,$$

so hat man für die in Wasser und Dampf enthaltene Gesammtwärme:

$$U=\mu W+m(I-W)=\mu W+m\varrho.$$

Die verbrauchte Wärme q theilt sich in diejenige, welche zur Ueberwindung des Druckes dient Apu, und in diejenige ϱ, welche die Cohäsion des Wassers überwindet.

Bei der Auffassung, der wir uns früher bedienten, mussten wir dies ganze Quantum q als latente Wärme bezeichnen, nach der jetzigen, aber fassen wir ϱ allein als latente Wärme auf.

Sei jetzt die Temperatur nicht constant, so werden sich m, W und ϱ ändern. Mögen dieselben von m_1, W_1, ϱ_1 zu den Werthen m_2, W_2, ϱ_2 übergehen, so ist:

$$\triangle U=\mu(W_2-W_1)+m_2\varrho_2-m_1\varrho_1,$$

also:

$$dU=\mu dW+d(m\varrho).$$

Nnn ist:

$$c=\frac{dW}{dt}$$

die specifische Wärme des Wassers, also da auch:

$$\varrho=q-Apu,$$

erhält man:

$$dU=\mu\, cdt+d(mq)-Ad(mpu),$$

und da man nach 1) hatte:

$$\frac{q}{u}=AT\frac{dp}{dt},$$

so ergibt sich:

$$dU+Ap\,d(mu)=\mu\, c(dt)+d(mq)-mq\,\frac{dt}{T}.$$

Sei h die Höhe des vom Kolben durchmessenen Raumes, so ist:

$$h=mV+mv=\mu V+mu.$$
$$dh=d(mu).$$

Die linke Seite der letzten Gleichnng stellt also die Summe der inneren Wärmezunahme vermehrt um die in Arbeit verwandelte dar; dies ist aber der ganze Wärmezufluss $\triangle Q$, also:

$$2)\qquad \triangle Q=\mu\, cdt+d(mq)-mq\frac{dt}{T}.$$

In der atmosphärischen Luft ist fortwährend Wasserdampf enthalten, und schon aus diesem Grunde die Spannkraft und die Dichtigkeit derselben veränderlich.

Der Feuchtigkeitsgrad der Luft heisst das Verhältniss der Dichtigkeit des vorhandenen Dampfes zu der desjenigen, welcher bei der stattfindenden Temperatur gesättigt ist.

Ist dies Verhältniss gleich λ, so lässt es sich finden, wenn man die Temperatur t_1 kennt, für welche der vorhandene Dampf im Maximum ist. Denn ist t die stattfindende Temperatur, nnd:

$$p=F(t),\ p_1=F(t_1),$$

γ und γ_1 die Dichtigkeiten, so hat man:

$$\lambda=\frac{\gamma_1}{\gamma}=\frac{p_1}{p}.$$

Ist δ die Dichtigkeit der Luft, P der Druck der Luft in Atmosphären, t die Temperatur, γ und p Dichtigkeit und Drnck des Dampfes, so hat man, wenn die Luft mit Wasserdampf gesättigt ist:

$$\delta=\frac{1{,}3P}{1+\alpha t},\ \gamma=\frac{5}{8}\,\frac{1{,}3p}{1+\alpha t},$$

da Wasserdampf $\frac{5}{8}$ der Luftdichtigkeit hat. Also wenn die Gesammtdichtigkeit Γ, der Gesammtdruck b ist:

$$\Gamma=\frac{1{,}3(b-\frac{3}{8}p)}{1+\alpha t}.$$

Findet aber kein Maximum der Dichtigkeit statt, sind γ_1 und p_1 die vorhandene Dichtigkeit und der Druck des Dampfes, γ und p die für den bei der stattfindenden Temperatur gesättigten Dampf, so hat man:

$$\gamma_1=\frac{5}{8}\,\frac{1{,}3p_1}{1+\alpha t_1},$$
$$\Gamma=1{,}3\left(\frac{b-p_1}{1+\alpha t}+\frac{\frac{5}{8}p_1}{1+\alpha t_1}\right),$$

oder da:

$$\gamma_1=\gamma\lambda=\tfrac{5}{8}\lambda\,\frac{1{,}3p}{1+\alpha t}$$

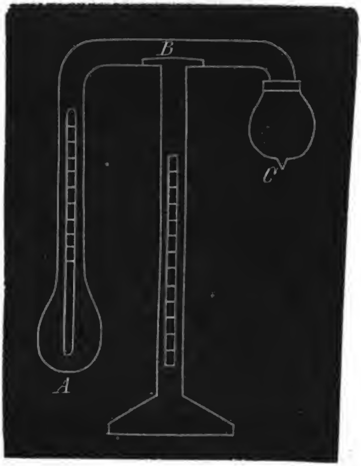
ist:

$$\Gamma=\frac{1{,}3(b-\frac{3}{8}\lambda p)}{1+\alpha t}.$$

Um aber p_1, also auch λ zu finden, muss man die Temperatur t_1 kennen, bei welcher dieser Dampf im Maximum ist, also sich zu condensiren anfängt. Diese Temperatur heisst der Thaupunkt.

Man bestimmt ihn durch das Hygrometer. Das einfachste Instrument dieser Art ist das von Daniels. Eine ge-

Fig. 41.



bogene Röhre ABC (Fig. 41) läuft in zwei Glaskugeln aus; in die eine A ist ein Goldring eingebrannt, an dessen Beschlagen man das Condensiren erkennt. Sie ist mit Schwefeläther gefüllt und enthält ein Thermometer. Die andere Kugel C ist mit einem Leinwandlappen umgeben. Die ganze Röhre ist luftleer.

Auf die Leinwand träufelt man so lange Schwefeläther, bis durch dessen Verdunsten hinreichende Kälte erzeugt ist, und somit in C soviel Aetherdämpfe condensirt sind, dass sie die neu in A entstehende Wärme genug binden, um den Goldreif beschlagen zu lassen; das Thermometer in A gibt dann den Thaupunkt an.

Auf dieselben Prinzipien gründet sich das empfindlichere Regnault'sche Hygrometer.

Ein anderes Instrument, das Psychrometer, gibt August nach Huttons Vorgange an. Ein Thermometer, dessen Kugel mit Leinwand umwickelt ist, welche in ein Wasserschälchen taucht, bleibt fortwährend nass. Durch die Abkühlung nimmt die Temperatur bis zu einem gewissen Grade (Verdunstungskälte) ab, wo sie stehen bleibt, und hieraus lässt sich der Thaupunkt berechnen.

Nämlich ein kleiner, die Kugel umgebender Raum ist mit Dunst gesättigt, ein Theil desselben ist in der Luft vorhanden gewesen, ein anderer der Umhüllung entnommen. Sei t die Lufttemperatur, h die Verdunstungskälte, und für den Raum, aus welchem zum Verdunsten des Wassers Wärme aus der Luft genommen wird, das Gewicht der Luft g, das des darin ursprünglich enthaltenen Dunstes q, s das Gewicht des neu entstandenen Dunstes, c die Wärmecapacität der Luft, γ die des Dunstes (auf constanten Druck bezogen). Die ganze hergegebene Wärmemenge ist dann:

$$g(t-t_1)c+q(t-t_1)\gamma.$$

Ist λ die latente Wärme des Wasserdunstes bei 0 Grad, und nimmt man an, dass $\lambda-t_1$ die bei t_1 Grad sei, wie dies freilich nach dem Obigen nur näherungsweise der Fall ist, so muss sein:

$$(gc+q\gamma)(t-t_1)=s(\lambda-t_1).$$

Sei p der Druck des in der Luft vorhandenen Dunstes, p_1 der Druck des gesättigten Dunstes bei Temperatur t_1, b der Barometerstand, so ist $b-p$ der Druck der trockenen Luft, p_1-p der-

jenige Druck, unter welchem der neue Dunst entsteht (der Luftdruck verhindert, wie oben gezeigt, dessen Entstehen nicht); ist ferner α das Verhältniss der Dichtigkeit des Dunstes zu dem der Luft bei gleicher Spannung und Temperatur, so ist:

$$\frac{\alpha g}{q} = \frac{b-p}{p}, \quad q = \frac{\alpha g p}{b-p},$$

ebenso:

$$s = \frac{\alpha(p_1 - p)\gamma}{b-p}.$$

Werden diese Werthe in die obige Gleichung gesetzt, und:

$$t - t_1 = d$$

geschrieben, so kommt:

$$d[c(b-p) + \alpha\gamma p] = \alpha(p_1 - p)(\lambda - t_1),$$

woraus sich die Dichtigkeit des in der Luft vorhandenen Dunstes ergibt:

$$p = \frac{\alpha(\lambda - t_1)p_1 - cbd}{\alpha(\lambda - t_1) + (\alpha\gamma - c)d}.$$

Setzt man:

$$\lambda = 631,$$

so kann man, da λ sehr gross ist, das zweite Glied des Nenners weglassen. Dies gibt:

$$p = p_1 - \frac{cbd}{\alpha(\lambda - t_1)},$$

oder auch:

$$p = p_1 - \frac{c}{\alpha\lambda} bd.$$

Man findet:

$$\frac{c}{\alpha\lambda} = 0{,}0007.$$

Ist die Thermometerkugel mit einer Eisrinde umgeben, so ist zu λ noch 75 zuzufügen, und es wird:

$$\frac{c}{\alpha\lambda} = 0{,}0006.$$

Der Thaupunkt τ ist diejenige Temperatur, für die $p = F(\tau)$ ist.

Indem man dies Instrument mit den Angaben des Daniel'schen Hygrometers vergleicht, erhält man nach August eine etwas andere Formel:

$$p = p_1 - \frac{0{,}558\, bd}{\lambda - t_1}.$$

11) Ueber feste und flüssige Körper.

Es sollen noch einige Folgerungen für die nicht gasförmigen Körper aus den Grundbegriffen der mechanischen Wärmelehre gemacht werden. — Wenn die specifische Wärme bei constantem Druck immer gleich c, bei constantem Volumen gleich c_1 ist, so erhalten wir:

$$X = c_1 \frac{\partial t}{\partial p}, \quad Y = c \frac{\partial t}{\partial v},$$

also nach Formel II):

$$(c - c_1) \frac{\partial t}{\partial p} \frac{\partial t}{\partial v} = AT,$$

und nach Formel I):

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(c \frac{\partial t}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(c_1 \frac{\partial t}{\partial p}\right) = A,$$

$$dQ = c_1 \frac{\partial t}{\partial p} dp + c \frac{\partial t}{\partial v} dv = c_1\, dt + \frac{AT}{\frac{\partial t}{\partial p}} dv$$

$$= c\,dt - \frac{AT}{\frac{\partial t}{\partial v}} dp.$$

Kann man mit diesen Formeln verbinden die bekannte, jedoch jedenfalls nur näherungsweise richtige für feste und flüssige Körper:

$$v = v_0(1 + \alpha t),$$

wo v_0 das Volumen bei 0 Grad ist, so hat man:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{\alpha v_0}.$$

Ist γ das Gewicht der Raumeinheit Wasser, γ_0 dasjenige der Raumeinheit des Körpers, so hat man das specifische Gewicht:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_0}{\gamma}, \quad v_0 = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{\varepsilon\gamma}, \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\varepsilon\gamma}{\alpha}.$$

Werde jetzt keine Wärme zugeführt, aber der Druck geändert, dann ist:

$$dQ = 0, \quad dt = \frac{AT dp}{c\frac{\partial t}{\partial v}} = \frac{AT\alpha\, dp}{c\varepsilon\gamma}.$$

Diese Formel gilt nicht für Wasser, wo man nach Regnault setzt:

$$v = v_0(1 - \alpha t + \beta t^2 - \delta t^3).$$

und es ist von 0 bis 25 Grad:

$$\alpha = 0{,}000061045,$$
$$\beta = 0{,}000007783,$$
$$\delta = 0{,}0000003734$$

von 25 bis 50 Grad:

$$\alpha = 0{,}00005145,$$
$$\beta = 0{,}000007587,$$
$$\delta = 0{,}000000035408,$$

also:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{v_0(-\alpha+2\beta t-3\delta t^2)},$$

$$dt = AT\frac{v_0}{c}(-\alpha+2\beta t-3\delta t^2)dp.$$

Man setzt für Wasser:

$$c=1, \quad v_0 = 0.001,$$

also:

$$dt = 0{,}2437\,T(-\alpha+2\beta t-3\delta t^2)dp,$$

wo der Druck in Atmosphären gegeben ist. Diese Formeln finden statt bei Compressionen ohne Ab- oder Zuführung von Wärme. Auch ist dann:

$$c_1\frac{\partial t}{\partial p}dp + c\frac{\partial t}{\partial v}dv = 0,$$

also:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{c}{c_1}\frac{\frac{\partial t}{\partial v}}{\frac{\partial t}{\partial p}},$$

und da:

$$\frac{\partial t}{\partial p} = \frac{At}{(c-c_1)\frac{\partial t}{\partial v}}$$

war:

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{c(k-1)\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2}{AT},$$

wo:

$$\frac{c}{c_1} = k,$$

ist, und p in Atmosphären gegeben ist. Soll der Druck in Kilogramm gegeben sein, so ist durch 10334 zu dividiren.

Aimé und Colladon geben nun:

$$dv = -\mu v\,dp,$$

wo zu setzen ist, wenn p in Kilogramm gegeben ist:

für Quecksilber:

$\mu = 0{,}0000043$ nach Aimé,

$\mu = 0{,}0000033$ nach Colladon,

für Wasser:

$\mu = 0{,}000502$ nach Aimé.

$\mu = 0{,}000486$ nach Colladon.

Es folgt dann:

$$k-1 = \frac{10334\,AT}{\mu vc\left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)^2}.$$

Wir hatten für Quecksilber:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{\varepsilon\gamma}{\alpha},$$

wo:

$$\varepsilon = 13{,}598, \quad \gamma = 1000, \quad \alpha = 0{,}00018153,$$

$$v_0 = \frac{1}{13596}$$

für 0° ist. Bei 12,6° ist aber:

$$v = v_0(1+\alpha t) = \frac{1{,}002287}{13596}.$$

Aimé findet hierfür:

$$c = 0{,}033332, \quad k = 1{,}1237, \quad c_1 = 0{,}02965,$$

dagegen Colladon:

$$c_1 = 0{,}02906.$$

Nimmt man den Mittelwerth beider Werthe von c_1, so kommt:

$$k = 1{,}1352, \quad c - c_1 = 0{,}00397.$$

Setzt man für Wasser von 0 Grad:

$$v_0 = 0{,}001,$$

so erhält man für $t = 12{,}6°$:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{0{,}000000115672},$$

$$v = 0{,}0010004,$$

und für $t=0$:

$$\frac{\partial t}{\partial v} = -\frac{1}{0{,}000000061045}.$$

Die Temperatur wächst also hier, wenn das Volumen abnimmt, wie dies vom Wasser bekannt ist. Es ist ferner:

$k = 1{,}00185$, $c_1 = 0{,}9981$ nach Aimé,

$c_1 = 0{,}9995$ nach Colladon,

für den Mittelwerth also:

$$k = 1{,}0012, \quad c - c_1 = 0{,}0012.$$

Man muss annehmen, dass die beim Schmelzen des Eises verbrauchte Wärme auch von dem Drucke abhängig ist. Nach Regnault ist die beim Schmelzen des Eises unter dem atmosphärischen Drucke verbrauchte Wärme:

$$r = 79{,}06,$$

nach Provestoi:

$$r = 79{,}01.$$

Die Schmelztemperatur kann nur vom Drucke abhängen.

Sei c_0 die specifische Wärme des Eises bei constantem Drucke p, t_0 die Wärme desselben, t_1 die Temperatur, bei welcher das Eis schmilzt, so ist die verbrauchte Wärme:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} c_1\,dt + r.$$

Ist v das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei t_0 Grad, w die des Eises,

M die Gewichtsmenge, also Mw das Volumen des Eises, und wenn m die Gewichtsmenge des enstehenden Wassers ist, das Gesammtvolumen:

$$mv+(M-m)w,$$

die zur Arbeit verbrauchte Wärme:

$$mAp(v-w)=W,$$

die in der Gewichtseinheit Wasser enthaltene Wärme:

$$I=Q-Ap(v-w).$$

Wenn die Schmelztemperatur gleich vorhanden ist, so ist:

$$\varrho=r-Ap(v-w)$$

die latente Wärme, worunter wir hier die verstehen, welche nicht zu äusserer Arbeit verbraucht wird. Ist ein Kilogramm Eis vorhanden, also $M=1$, so ist das Gesammtvolumen:

$$V=w+m(v-w).$$

Wenn wir:

$$v-w=u$$

setzen, und die Wärme bei constantem Drucke zugeführt denken, so bleibt die Temperatur constant, also v, w und u sind ebenfalls constant:

$$dV=u\,dm.$$

Die zugeführte Wärme beträgt:

$$dQ=rdm=\frac{r}{u}\,dV.$$

Wegen:

$$dp=0,\ dt=0,$$

geben die Hauptgleichungen:

$$dQ=\frac{AT}{\frac{\partial t}{\partial p}}\,dv,\quad Y=\frac{r}{u},\quad \frac{\partial p}{\partial t}=\frac{r}{AuT},$$

$$Apu=\frac{pr}{T\frac{\partial p}{\partial t}}.$$

Man hat nun beim atmosphärischen Drucke:

$$T=273,\quad (t_1=0).\quad v=0{,}001,$$
$$w=0{,}001087,\quad r=79{,}06,$$

also:

$$u=-0{,}000087,\quad \frac{\partial p}{\partial t}=-136{,}33,$$

$$\frac{\partial t}{\partial p}=-0{,}007324.$$

Beim Wachsen des Druckes findet also ein Sinken des Gefrierpunktes t statt. Dies scheint die Erfahrung zu bestätigen. Pierson setzt:

$$c_0=0{,}5040.$$

Kann man diese Grösse als constant annehmen. so kommt:

$$Q=0{,}504(t_1-t_0)+r.$$

Ist:

$$t_0=-10^{\circ},\quad t_1=0^{\circ},$$

so erhält man hieraus:

$$Q=84{,}075.$$

Setzt man noch:

$$p=10334,\quad u=-0{,}000087,$$

wie oben, so kommt:

$$Apu=-0{,}00212.$$

Es wird also beim Schmelzen des Eises Arbeit in Wärme verwandelt, d. h. die specifische Wärme des Wassers ist so gross gegen die des Eises, dass trotz der unveränderten Temperatur der Ueberschuss der im Wasser enthaltenen Wärme die latente Wärme übersteigt. Die Wasserwärme ist:

$$I=Q+0{,}00212,$$

oder:

$$I=-0{,}504\,t_0+79{,}035+0{,}00212$$
$$=206{,}629-0{,}504\,T_0,$$

unter T_0 die absolute Temperatur, welche t_0 entspricht, verstanden.
Für $t_0=-10$ ist:

$$I=84{,}077.$$

Es war:

$$Q=84{,}075.$$

also der Zuwahhs gegen die abgegebene Wärme sehr gering. $pu=0{,}899$ in Meterkilogramm. Durch Rechnung kommt:

$$\varrho=r-Apu=79{,}037.$$

Es ist zu bemerken, dass die in diesem Abschnitte gegebenen Formeln ebenso wie die Formel II) noch nicht als völlig zweifellos zu betrachten sind. Bei unstreitig richtigen Grundideen ist die mechanische Wärmelehre eine noch im Entstehen begriffene Wissenschaft, und vielleicht manches Ungenaue den bis jetzt gefundenen Resultaten beigemischt.

12) Einiges Allgemeine über die Wechselwirkung zwischen Wärme und Arbeit.

Es folgt aus diesen Betrachtungen, dass die Wärme bei ihrem Ueberströmen vom wärmeren Körper zum kälteren Arbeit verrichtet, und dass nur durch Verlust von Arbeit, d. h. durch Verwandlung derselben in Wärme zugleich Wärme vom kälteren zum wärmeren

Körper zurückströmt. — Aber man hat auch Grund anzunehmen, dass nicht allein aus der lebendigen Kraft, welche in der Wärme enthalten ist, Arbeit entstehen kann, sondern dass alle Arbeit mittelbar auf die Wärme, d. h. also auf die Sonnenstrahlen, denen alle unsere Wärme entnommen ist, zurückzuführen ist. Wir wollen dies an den gewöhnlichen Arbeitskräften, die in der Natur vorkommen, durchführen, und zugleich auch den Satz rechtfertigen, dass alle Wärme der Sonne entnommen sei.

Was nämlich die Erzeugung anbetrifft, so ist sie entweder aus Arbeit entstanden, und somit die zweite Behauptung auf die erste zurückgeführt, dies ist bei der Reibung und dem Drucke der Fall, oder sie entsteht bei chemischen Verbindungen.

Die wichtigste dieser Verbindungen ist nun die bei der Verbrennung von Kohle entstehende Kohlensäure. Umgekehrt aber ist ja die Kohle durch den organischen Prozess beim Wachsen der Pflanzen entstanden durch die Zersetzung der in der Luft enthaltenen Kohlensäure, und diese Arbeit verrichtet bekanntlich die chemische Kraft der Sonnenstrahlen. So ist denn in den Kohlen Arbeit der Sonne aufgespeichert, welche durch Verbrennung wieder in die ursprüngliche Gestalt der Wärme zurückkehrt. Um andere Verbindungen entstehen zu lassen, muss man ebenfalls auf die Zersetzung zurückgehen, und diese erfolgt entweder direct durch Arbeit, wie z. B. die Bildung des Phosphor aus den Knochen, oder führt unmittelbar auf die Sonne zurück.

Wir untersuchen jetzt die Arbeitskräfte. Die hauptsächlichsten sind:

1) Die Wärme unmittelbar in den Dampfmaschinen und in allen calorischen im weiteren Sinne.

2) Wasserkräfte.

3) Der Wind bei den Windmühlen und beim Segeln der Schiffe.

4) Thier- und Menschenkräfte.

Die erste Kraft ist den Kohlen entnommen, also bereits auf die Sonne zurückgeführt.

Wasserkräfte entstehen durch das Herabfallen des Wassers. Diese Kraft wird erzeugt, indem Wasser wieder von dem tieferen zum höheren Orte emporsteigt, denn sonst würde ja alles Wasser zuletzt in gleicher Höhe sein, also keine Strömung möglich sein. Das Wasser aber steigt in die Höhe in Dampfform und fällt als Regen in die höhern Stellen der Quellen und Flüsse zurück. Die Verwandlung in Dampfform ist also die Quelle der Arbeit, und diese geschieht offenbar mittels der aus der Sonne entnommenen, beim Verdunsten gebundenen Wärme.

Die Kraft des Windes entsteht durch Strömung der wärmern Luft vom Aequator zu den Polen. Diese Wärme aber gibt die Sonne her.

Thier und Menschen erlangen endlich ihre Arbeitsfähigkeit durch die Nahrung, namentlich durch die nicht stickstoffhaltigen, aber kohlenreichen Theile derselben, welche beim Athmen in Kohlensäure verwandelt thierische Wärme erzeugen, die als Arbeitsmaterial dient. Diese Nahrung ist mittelbar (wenn sie thierisch ist) oder unmittelbar dem Pflanzenreich entnommen, dessen Wachsthum eine Arbeit der Sonne ist, und sich hauptsächlich auf die Bildung von Kohle aus Kohlensäure, ganz wie oben gezeigt wurde, zurückführen lässt.

So ist denn das Material der Arbeit die in den Aetherschwingungen enthaltene lebendige Kraft, und wenn man die Geschwindigkeit dieser Schwingungen bedenkt, so kann man trotz der geringen Masse des Aethers an deren ungeheuren Betrag nicht zweifeln.

Mit der mechanischen Wärmelehre haben sich hauptsächlich beschäftigt: Clausius, Holzmann, Helmholz, Regnault, Joulès, Rankine. Lehrbücher darüber sind die von Zenner und Dupré.

Wärme — Verbreitung derselben (mathematische Physik).

1) Entwickelung der Grundgleichungen.

Die Frage, wie sich die Wärme nach und nach in einem Körper von gegebener Form und Anfangszustand verbreite, hat Untersuchungen von Seiten Fourrier's, Poisson's, Lamé's und anderer Mathematiker veranlasst, die ein ganz neues Gebiet der Analysis eröffnet haben. Es wird daher nöthig sein, dieselben ihren Grundzügen nach hier wiederzugeben.

Nehmen wir an, dass ein Körper anfänglich in einem gewissen Temperaturzustande sich befinde; es soll angegeben werden, wie derselbe sich von Moment zu Moment ändere.

Wir setzen voraus, dass diese Aenderung allein durch die Leitung geschieht, d. h. durch die Absorption, welche zwischen zwei sehr nahe liegenden Punkten stattfindet. Wenn der Körper fest ist oder flüssig, und die Temperaturunterschiede nicht sehr gross, so kann man

dies annehmen. Luftförmige Körper ändern dagegen durch Absorption ihre Temperatur nur langsam. Auch kann, wenn wir uns auf feste und flüssige Körper beschränken, und keine zu grossen Temperaturunterschiede betrachten, angenommen werden, dass die Dimensionen constant sind, ebenso wie die specifische Wärme in Bezug auf die Temperatur.

Wir gehen von dem Gesetz aus, dass die Wärmeabgabe eines Punktes an einen andern der Temperaturdifferenz proportional sei, wenn dieser Wärmeunterschied unendlich klein ist.

Wir denken uns den Körper durch drei Systeme orthogonaler Flächen in unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda getheilt, deren Dimensionen sein sollen ∂l, ∂m, ∂n, die Dichtigkeit μ, die Temperatur u, die specifische Wärme c, so wird der Zuwachs der Wärmemenge in einem Zeittheile dt innerhalb eines solchen Parallelepipedons sein:

$$c\mu \frac{\partial u}{\partial t} dt\, \partial l\, \partial m\, \partial n.$$

Andererseits können wir diesen Zuwachs finden, wenn wir die durch die sechs Seitenwände des Parallelepipedons ein- und ausströmende Wärme betrachten. Wir können annehmen, dass dieser Wärmewechsel innerhalb einer Schicht von der Dicke ε stattfinde, welche gegen die Dimensionen des Parallelepipedons sehr klein ist. Betrachten wir z. B. die durch die eine Grenzfläche $\partial m\, \partial n$ ausströmende Wärme. Dieselbe findet zwischen Punkten statt, welche bezüglich die Temperatur u und $u + \frac{\partial u}{\partial l}\eta$ haben, wo η nicht grösser als ε ist, und da die ausströmende Wärme der Differenz proportional ist, so hat man dafür, wenn die Wärmemenge auf die Flächeneinheit bezogen wird:

$$\mu k \frac{\partial u}{\partial l},$$

wo k von der Dichtigkeit und sonstigen Beschaffenheit, also von der Lage des Punktes, wenn man die Formänderung nicht vernachlässigen wollte auch von der Zeit, abhängt. Wegen des Inhalts der Grenzfläche ist dieser Ausdruck mit $\partial m\, \partial n$ zu multipliciren. Durch die entgegengesetzte Grenzfläche $\partial m\, \partial n$, deren Entfernung von der erstern M ist, strömt nun hinein die Menge:

$$\mu k \frac{\partial u}{\partial l} dt\, \partial m\, \partial n + \frac{\mu \partial}{\partial l}\left(k \frac{\partial u}{\partial l} dt\, \partial m\, \partial n\right) \partial l,$$

so dass die verbleibende Wärmemenge ist:

$$\mu\, \partial l\, dt \frac{\partial}{\partial l}\left(k \frac{\partial u}{\partial l} \partial m\, \partial n\right).$$

Für je zwei von den übrigen vier Grenzflächen findet nun dasselbe statt. Wenn man nun die auf die andern Dimensionen bezogenen Coefficienten, welche k entsprechen, mit k_1 und k_2 bezeichnet, so hat man durch Addition der entstehenden Ausdrücke:

$$\text{I)}\quad c \frac{\partial u}{\partial t} \partial l\, \partial m\, \partial n = \frac{\partial}{\partial l}\left(k \frac{\partial u}{\partial l} \partial m\, \partial n\right) \partial l + \frac{\partial}{\partial m}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial m} \partial l\, \partial n\right) \partial m + \frac{\partial}{\partial n}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial n} \partial l\, \partial m\right) \partial n.$$

Bei allen Körpern, die nicht crystallinischen Gefüges sind, oder dem regelmässigen Systeme angehören, verbreitet sich die Wärme nach allen Seiten auf gleiche Weise. Es ist also:

$$k = k_1 = k_2.$$

Ist der Körper homogen, so sind c und k constant, wenn man die Formänderung, wie hier geschehen soll, vernachlässigt.

Indess ist noch etwas über die Bedeutung der unendlich kleinen Grössen ∂l, ∂m, ∂n und der partiellen Differenzialquotienten zu sagen:

Die drei Systeme orthogonaler Flächen lassen sich ausdrücken durch Gleichungen zwischen rechtwinkligen Coordinaten von der Form:

$$f(x, y, z, a) = 0, \quad f_1(x, y, z, b) = 0, \quad f_2(x, y, z, c) = 0,$$

wo a, b, c Parameter sind, die sich von Fläche zu Fläche ändern. Für jeden Punkt lassen sich also die zugehörigen Werthe von l, m, n, d. h. der Bogenlängen für die Schnittlinien, als Functionen von a, b, c bestimmen. Schreitet man

nun z. B. auf einer Linie l fort, so ändert sich nur a, auf m nur b, auf n nur c, so dass man hat:

$$\delta l = \frac{\partial l}{\partial a}\, da,\quad \delta m = \frac{\partial m}{\partial b}\, db,\quad \delta n = \frac{\partial n}{\partial c}\, dc,$$

und:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\frac{\partial u}{\partial a}}{\frac{\partial l}{\partial a}},\quad \frac{\partial u}{\partial m} = \frac{\frac{\partial u}{\partial b}}{\frac{\partial m}{\partial b}},\quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\frac{\partial u}{\partial c}}{\frac{\partial n}{\partial c}},$$

also wenn wir noch setzen:

$$\frac{\partial l}{\partial a} = l_1,\quad \frac{\partial m}{\partial b} = m_1,\quad \frac{\partial n}{\partial c} = n_1,$$

so wird Gleichung I):

$$\text{I a)}\qquad c\, l_1\, m_1\, n_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{k\, m_1\, n_1}{l_1}\frac{\partial u}{\partial a}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{k_1\, l_1\, n_1}{m_1}\frac{\partial u}{\partial b}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{k_2\, l_1\, m_1}{n_1}\frac{\partial u}{\partial c}\right).$$

Setzen wir z. B. an die Stelle der orthogonalen Flächen rechtwinklige Coordinaten, und nehmen wir an, dass $k = k_1 = k_2$ constant, und $\frac{k}{c} = h^2$ sei, so kommt, da $l = x$, $m = y$, $n = z$ zu setzen ist, wo x, y, z die Parameter sind:

$$l_1 = m_1 = n_1 = 1,$$

also:

$$\text{I b)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

Setzen wir aber Polarcoordinaten voraus, d. h. nehmen wir als Orthogonalflächen:

1) eine Schaar concentrischer Kugelflächen,
2) eine Schaar von Rotationskegelflächen mit gemeinschaftlicher Axe, deren Scheitel in den Mittelpunkt der Kugeln fällt,
3) eine Schaar von Ebenen, welche alle durch die Kegelaxe gehen.

Die Parameter sind dann:

1) der Radius r einer Kugel,
2) der halbe Scheitelwinkel ϑ einer Kegelfläche,
3) der Winkel φ einer Ebene mit irgend einer Anfangsebene,

und man hat:

$$l = r,\quad m = r\vartheta,\quad n = r\varphi \sin\vartheta,\qquad l_1 = 1,\quad m_1 = r,\quad n_1 = r\sin\vartheta.$$

Die Gleichung I a) wird also, wenn man wieder $h^2 = \frac{k}{c}$ einführt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

Hierfür kann man, wie leicht zu sehen, auch schreiben:

$$\text{I c)}\qquad \frac{\partial ru}{\partial t} = h^2\left[\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial ru}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 ru}{\partial\varphi^2}\right].$$

Obgleich man immer rechtwinklige Coordinaten nehmen könnte, so ist doch eine Transformation derart, dass in der einen Schaar von Flächen die Grenzfläche des Körpers mit enthalten sei, aus dem Grunde geboten, weil sonst die Grenzbedingungen Schwierigkeiten machen würden. Aus diesem Grunde ist die Gleichung I a) von grosser Wichtigkeit. Wir übergehen die Transformation durch elliptische Coordinaten, welche ebenfalls Anwendung findet.

Wir wollen nun die Frage beantworten, welche Wärmemenge durch irgend eine gegebene Ebene einströmt.

Denken wir uns zu dem Ende eine dreiseitige und rechtwinklige Pyramide, die δl, δm, δn zu Kanten habe. Drei Seitenflächen sind dann bezüglich:

$$\frac{\delta m\,\delta n}{2},\quad \frac{\delta l\,\delta n}{2},\quad \frac{\delta l\,\delta m}{2},$$

die vierte σ möge mit diesen dreien Winkel machen, deren Cosinus bezüglich α, β, γ sind, so dass man hat:

$$2\sigma\alpha=\delta m\,\delta n,\quad 2\sigma\beta=\delta n\,\delta l,\quad 2\sigma\gamma=\delta l\,\delta m,$$

und die durch jede der Flächen einströmende Wärme ist dann nach dem Obigen, wenn $-K$ sich auf die vierte Grenzfläche so bezieht, wie k, k_1, k_2 auf die drei andern:

$$\frac{k}{2}\frac{\partial u}{\partial l}\delta m\,\delta n,\quad \frac{k_1}{2}\frac{\partial u}{\partial m}\delta n\,\delta l,\quad \frac{k_2}{2}\frac{\partial u}{\partial n}\delta l\,\delta m,$$

und:

$$-K\frac{\partial u}{\partial \varrho}\sigma.$$

Da man zu der vierten Grenzfläche sich ebenfalls zwei Orthogonale denken muss, so ist ϱ hier irgend eine auf der vierten Grenzfläche senkrechte Linie, auf deren Gestalt es hier nicht ankommt, da $\partial\varrho$ unendlich klein ist.

Da nun die in das Parallelepipedon einströmende Wärme jedenfalls mit $\delta l\,\delta m\,\delta n$ proportional, aber die hier gefundenen Grössen mit $\delta l\,\delta m$ oder $\delta l\,\delta n\ldots$ proportional, gegen $\delta l\,\delta m\,\delta n$ unendlich gross sind, so ist ihre Summe, die der einströmenden gleich ist, gegen $\delta l\,\delta m$ verschwindend klein, also wenn man δl, δm, δn durch ihre Werthe ersetzt:

A) $$K\frac{\partial u}{\partial\varrho}=k\alpha\frac{\partial u}{\partial l}+k_1\beta\frac{\partial u}{\partial m}+k_2\gamma\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Die Bedeutung der Differenzialquotienten ist wie oben zu erklären.

Wir wollen jetzt aber auch den Wärmezufluss auf der Oberfläche untersuchen. — Man könnte die Temperatur der Oberfläche direct geben, also annehmen, dass:

$$u=f_1(l,\ m,\ n,\ t)=f(a,\ b,\ c,\ t)$$

auf dieser Fläche sei. Andererseits aber kann man annehmen, und dies wird das Allgemeinere sein, dass der Körper sich in einem Gase befinde, und hier sowohl durch den Wärmewechsel mit den berührenden Theilen des Gases, als auch von einer oder verschiedenen Wärmequellen strahlende Wärme erhielte. Ist ζ die Temperatur des Gases, so wird ganz wie oben der Zufluss durch die Oberfläche des Körpers, auf die Flächeneinheit bezogen, mit $\zeta-u$ proportional zu setzen sein. Ist A die Temperatur einer Wärmequelle, so ist der Zufluss von hier aus $A-u$, also der Gesammtzufluss:

$$e(\zeta-u)+\Sigma e_1(A-u),$$

wo e und e_1 dem Zustande des Gases und der Wärmequelle entsprechende Coefficienten sind. Statt dessen kann man aber setzen:

$$p(v-u),$$

wo:

$$p=e+\Sigma e_1,\qquad v=\frac{e\zeta}{p}+\Sigma\frac{e_1A}{p}$$

ist. Die Grössen A sind im Allgemeinen constant, ζ ist von der Lage des Punktes der Oberfläche, den wir betrachten, abhängig. Wir nehmen an, dass die Oberfläche einer Schaar Orthogonalflächen angehöre, und zwar derjenigen, welche auf l senkrecht steht, dann ist ζ und somit v nur von m und n abhängig, ganz so wie die Temperatur auf der Oberfläche selbst. Andererseits ist die von der Oberfläche aus sich ins Innere bewegende Wärmemenge nach dem Obigen gleich $k\frac{\partial u}{\partial l}$ (auf die Flächeneinheit bezogen), und da Continuität stattfindet, so hat man:

$$k\frac{\partial u}{\partial l}=p(v-u),$$

oder:

II) $$k\frac{\partial u}{\partial a}=p\,l_1(v-u).$$

Wäre die Oberfläche keine aus der Schaar, so müsste man l mit ϱ, k und K vertauschen, und erhielte:

$$K\frac{\partial u}{\partial \varrho}=p(v-u),$$

oder wegen Gleichung A):

$$p(v-u)=k\alpha\frac{\partial u}{\partial l}+k_1\beta\frac{\partial u}{\partial m}+k_2\gamma\frac{\partial u}{\partial n},$$

oder:

II a) $$p(v-u)=\frac{k\alpha}{l_1}\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{k_1\beta}{m_1}\frac{\partial u}{\partial b}+\frac{k_2\gamma}{n_1}\frac{\partial u}{\partial c}.$$

Es ist zu erwähnen, dass die Gleichung II) auch für den Fall gültig ist, wo der Zustand der Oberfläche direct gegeben ist. In diesem Falle setzt man nämlich $\frac{1}{p}=0$.

Um aber den Wärmezustand völlig zu bestimmen, muss derselbe im Anfange gegeben sein. Es kommt also zu den Gleichungen I) und II) noch eine dritte hinzu:

$$u=F_1(l,\ m,\ n)\quad\text{oder}\quad=F(a,\ b,\ c)\quad\text{für } t=0.$$

Soll aber in einem Körper Wärmegleichgewicht stattfinden, so ist zu setzen $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, und in diesem Falle gibt z. B. Gleichung I b):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

Nach einem von Dirichlet gegebenen Satze (vergleiche den Schluss des Artikels: Quadraturen — Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf —) reicht diese Gleichung zur Definition der Function u aus, wenn u auf der Oberfläche gegeben ist, und wie hier Continuität stattfindet. Der Zustand des Wärmegleichgewichtes ist also vom anfänglichen Wärmezustande unabhängig.

Eine höchst merkwürdige Eigenschaft des Systems von I), II) und III) ist, dass sich die Integration in einer ganz gleichen Weise für alle Körper bewerkstelligen lässt.

Wir wollen der Einfachheit wegen setzen in I a):

A) $$c\,l_1 m_1 n_1=g,\quad \frac{k\,m_1 n_1}{l_1}=s,\quad \frac{k_1 l_1 n_1}{m_1}=s_1,\quad \frac{k_2 l_1 m_1}{n_1}=s_2,$$

also:

$$g\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(s\frac{\partial u}{\partial a}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(s_1\frac{\partial u}{\partial b}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(s_2\frac{\partial u}{\partial c}\right).$$

g, s, s_1, s_2 sind Functionen von a, b, c. Setzen wir nun $u=e^{\lambda t}\varrho_\lambda$, so ergibt sich:

1) $$g\lambda\varrho_\lambda=\frac{\partial}{\partial a}\left(s\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial a}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(s_1\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial b}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(s_2\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial c}\right).$$

Bestimmt man hieraus auf irgend eine Art ϱ_λ, so kann man den Werth von u in die Gleichung II a) einsetzen, in welcher jetzt immer $v=0$ sein möge, also:

2) $$p\varrho_\lambda+\frac{k\alpha}{l_1}\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial a}+\frac{k\beta_1}{m_1}\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial b}+\frac{k\gamma_1}{c_1}\frac{\partial\varrho_\lambda}{\partial c}.$$

Die reellen Wurzeln λ dieser Gleichung, welche im Allgemeinen transcendent ist, geben dann partikulare Werthe für u, und da Gleichung 1) linear ist, kann man setzen:

3) $$u=\sum_\lambda\left(n_\lambda e^{\lambda t}\varrho_\lambda\right).$$

Die Coefficienten n_λ aber sind noch so zu bestimmen, dass auch Gleichung $u = F(a, b, c)$ für $t=0$ erfüllt wird.

Seien ϱ_λ, ϱ_μ zwei Wurzeln der Gleichung 2), multipliciren wir Gleichung 1) mit $\varrho_\mu\, da\, db\, dc$ und integriren über den ganzen Körper. Wir wollen zunächst das erste Glied rechts in 1) betrachten und nur nach a integriren in den Grenzen a_0 und a_1. Es kommt:

$$\int_{a_0}^{a_1} \varrho_\mu \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a}\right) da = \int_{a_0}^{a_1} s\,\varrho_\mu \frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a} - \int_{a_0}^{a_1} s \frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a}\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\, \partial a$$

$$= \int_{a_0}^{a_1}\left(s\,\varrho_\mu \frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a} - s\,\varrho_\lambda \frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\right) + \int_{a_0}^{a_1} \varrho_\lambda \frac{\partial}{\partial a}\left(s\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\right) da.$$

In dem entwickelten Theile bedeutet das Zeichen $\int_{a_0}^{a_1}$, dass man in den Ausdruck darunter setzen soll erst $a = a_1$, dann $a = a_0$, und die Differenz nehmen. a_0 und a_1 beziehen sich auf Punkte der Oberfläche. In einem von diesen Punkten ist die nach aussen gerichtete Normale nach der entgegengesetzten Richtung gewandt als in dem andern, und da in dem Sinne derselben die Ausstrahlung stattfindet, so ist dieselbe und somit auch ihre Projectionen auf die Schnittlinien δl, δm, δn in einem Punkte positiv, im andern negativ zu nehmen. Gleiches findet mit dem Ausdrucke $s = k\dfrac{\frac{\partial m}{\partial b}\frac{\partial n}{\partial c}}{\frac{\partial l}{\partial a}}$ statt, so dass die beiden a_0 und a_1 entsprechenden Glieder zu addiren sind, wenn man den entsprechenden s dasselbe Zeichen gibt. Integrirt man auch nach b und c, so ist dann der entwickelte Ausdruck mit gleichen Zeichen über die ganze Oberfläche zu erstrecken, und man hat:

$$\int \varrho_\mu \frac{\partial\left(s\frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a}\right)}{\partial a}\, da\, db\, dc = \int\left(s\,\varrho_\mu \frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a} + s\,\varrho_\lambda \frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\right) db\, dc$$

$$+ \int \varrho_\lambda \frac{\partial\left(s\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\right)}{\partial a}\, da\, db\, dc.$$

Das erste und dritte Integral geht auf den ganzen Körper, das zweite auf die Oberfläche. Dasselbe lässt sich noch umformen.

Die drei Schaaren orthogonaler Flächen theilen die Oberfläche offenbar auch in drei unendlich kleine Vierecke. Sei eins derselben $\delta\sigma$, so sind die Projectionen davon auf die Orthogonalflächen bezüglich $\delta m\,\delta n$, $\delta l\,\delta n$, $\delta l\,\delta m$, also:

$$s\, db\, dc = \frac{k}{l_1}\,\delta m\,\delta n = \frac{k}{l_1}\,\alpha\,\delta\sigma.$$

Verfährt man in gleicher Weise mit dem zweiten und dritten Gliede rechts in 1), so kommt schliesslich, wenn man 1) in der oben angegebenen Weise integrirt:

$$\lambda \int g\varrho_\lambda \varrho_\mu\, da\, db\, dc = \int \delta\sigma \left[\varrho_\mu\left(\frac{k\alpha}{l_1}\frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial a} + \frac{k_1\beta}{m_1}\frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial b} + \frac{k_2\gamma}{n_1}\frac{\partial \varrho_\lambda}{\partial c}\right)\right.$$

$$\left. - \varrho_\lambda\left(\frac{k\alpha}{l_1}\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a} + \frac{k_1\beta}{m_1}\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial b} + \frac{k_2\gamma}{n_1}\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial c}\right)\right]$$

$$+ \int \varrho_\lambda \left[\frac{\partial}{\partial a}\left(s\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial a}\right) + \frac{\partial}{\partial b}\left(s_1\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial b}\right) + \frac{\partial}{\partial c}\left(s_2\frac{\partial \varrho_\mu}{\partial c}\right) da\, db\, dc\right].$$

Das erste Glied rechts verschwindet wegen 2), denn diese Gleichung gibt dafür:

$$\int \partial\sigma\, p(\varrho_\lambda\, \varrho_\mu - \varrho_\lambda\, \varrho_\mu),$$

das zweite Glied wird wegen 1) gleich:

$$\mu \int g\, \varrho_\lambda\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc;$$

man hat also:

$$(\lambda-\mu)\int g\, \varrho_\lambda\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc = 0,$$

wo die Integrale sich über den ganzen Körper erstrecken. Dies ist aber nur möglich, wenn $\lambda=\mu$ ist, oder wenn:

B) $$\int g\, \varrho_\lambda\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc = 0.$$

Diese wichtige Formel, die immer gilt, wenn λ und μ nicht gleich sind, lässt sich nun zur Bestimmung der Coefficienten n_λ anwenden. Setzt man in 2) $t=0$ und vergleicht mit 3), so kommt:

$$F(a,\ b,\ c) = \sum_\lambda n_\lambda\, \varrho_\lambda.$$

Wir multipliciren mit $g\, \varrho_\mu$ und integriren über den ganzen Körper. Es kommt:

$$\int g\, F(a,\ b,\ c)\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc = \sum_\lambda n_\lambda \int g\, \varrho_\lambda\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc.$$

Von der Summe rechts aber verschwinden alle Glieder bis auf das eine, wo $\lambda=\mu$ ist, also:

4) $$n_\mu = \frac{\int g\, F(a,\ b,\ c)\, \varrho_\mu\, da\, db\, dc}{\int g\, \varrho_\mu^2\, da\, db\, dc},$$

womit die Coefficienten derart bestimmt sind, dass die Gleichungen I), II) und III) erfüllt werden. — Die Formel B) zeigt noch, dass es keinen complexen Werth von λ geben kann. Denn sei $\lambda = m+ni$, so wird ihm entsprechen ein $\mu = m-ni$, ein $\varrho_\lambda = M+Ni$ und ein $\varrho_\mu = M-Ni$. Dies in B) eingesetzt gibt:

$$\int g\, (M^2+N^2)\, da\, db\, dc = 0,$$

was unmöglich, da das Argument positiv ist.

Diese Prinzipien sollen nun für verschiedene Aufgaben angewandt werden. Der Fall, wo v nicht gleich Null ist, wird zugleich dabei erörtert werden.

Zunächst aber erwähnen wir hier noch den einfachsten Fall.

Der Körper sei homogen unendlich nach allen Richtungen, und mögen alle Punkte, die in derselben Ebene liegen, welche einer gegebenen parallel sind, auch anfänglich gleiche Temperatur haben, was dann offenbar immer stattfindet. — Ist die gegebene Ebene die der yz, so ist u von y und z unabhängig, also:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = f(x) \quad \text{für} \quad t=0.$$

Setzt man ganz nach unsern Prinzipien $u = e^{\lambda t}\varrho$, so wird:

$$\lambda\varrho = h^2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}, \quad \varrho = A\cos\mu x + B\sin\mu x,$$

wo zu setzen ist:

$$\lambda = -h^2\mu^2,$$

und man hat auch:

$$\varrho = \cos\mu(x-\alpha),$$

wenn man:

$$A = \cos\mu\alpha, \quad B = \sin\mu\alpha$$

setzt.

Hieraus folgt:

$$u = \Sigma e^{-h^2 \mu^2 t} \cos \mu (x - \alpha),$$

und dies in 2) eingesetzt:

$$\Sigma \cos \mu (x - \alpha) = f(x),$$

da unter der Summe auch ein Integral verstanden werden kann, und man hat:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu (x - \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d\mu = f(x)$$

für alle Werthe von x (vergleiche den Artikel: Quadraturen, Abschnitt 48), so ist zu setzen:

$$u = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \alpha^2 t} \cos \mu (x - \alpha) f(\alpha)\, d\alpha\, d_\mu.$$

Die Integration nach μ ist auszuführen. Es ergibt sich:

$$u = \frac{1}{2h \sqrt{(\pi t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha) e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{4 h^2 t}} d\alpha,$$

oder wenn man $\beta = \frac{\alpha - x}{h^2 \sqrt{t}}$ setzt:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2} f(x + 2\alpha\beta \sqrt{t})\, d\beta.$$

2) Wärmeverbreitung in einer Kugel, die in gleichen concentrischen Schalen gleich erwärmt ist.

Ist eine Kugel mit Radius R gegeben, und vorausgesetzt, dass die Erwärmung anfänglich in jeder concentrischen Kugelschale die gleiche sei, was dann für jede Zeit stattfindet, so ist in Gleichung I c) des vorigen Abschnitts ϑ und φ constant zu nehmen, also:

1) $$\frac{\partial r u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 r u}{\partial t^2}.$$

Die Gleichung 2) aber wird:

$$k \frac{\partial u}{\partial r} = p(v - u) \quad \text{für} \quad r = R.$$

v ist eine Function von t allein, wenn an der Oberfläche das Gas constante Temperatur hat; diese Gleichung kann auch geschrieben werden:

2) $$\frac{\partial r u}{\partial r} = q\, (V - r u),$$

wo zu setzen ist:

$$q = \frac{p R - k}{k R}, \quad V = \frac{v R p}{p R - k}.$$

Sei zunächst die äussere Temperatur v constant. In diesem Falle kann man setzen $v = 0$, da der Anfangspunkt der Scala doch gleichgültig ist.

Wegen der Continuität von v kommt aber hier noch die Bedingung hinzu, dass im Mittelpunkte also für $r = 0$ auch $r u = 0$ sein muss. — 1) wird zunächst erfüllt durch:

$$r u = e^{-h^2 \mu^2 t} (\sin \mu r + \alpha \cos \mu r)$$

und es ist $\alpha = 0$ zu setzen wegen der zuletzt ausgesprochenen Bedingung, also:

$$r u = e^{-h^2 \mu^2 t} \sin \mu r.$$

Für $r = R$ muss wegen 2) sein, da $V = 0$ ist:

$$\mu \cos \mu R + q \sin \mu R = 0.$$

Dies ist eine transcendente Gleichung, aus der μ zu berechnen ist. Sie kann auch geschrieben werden:

I) $$\operatorname{tg}\mu R+\frac{\mu}{q}=0,\quad \operatorname{tg}\varphi+g\varphi=0,$$

wenn:

$$g=\frac{1}{qR}=\frac{k}{pR-k},\quad \varphi=\mu r$$

gesetzt wird. Offenbar entspricht jeder positiven Wurzel μ eine gleiche negative.

Sei also μ immer positiv. Für positives g kann φ offenbar nur in den graden Quadranten liegen, für negatives in den ungraden. Sei g positiv. In jedem dieser Quadranten ist $\operatorname{tg}\varphi+g\varphi$ zu Anfang $-\infty$, zu Ende gleich $g\pi$, also inzwischen wirklich Null geworden. Da aber der Differenzialquotient $\frac{1}{\cos\varphi^2}+g$ immer positiv ist, so geschieht dies nur einmal. Also jeder grade Quadrant enthält eine Wurzel unserer Gleichung. Nach den oben gegebenen allgemeinen Prinzipien kommen keine complexen Wurzeln vor. Dieser Beweis verliert hier allerdings seine Kraft für rein imaginäre Wurzeln; dass diese aber fehlen, lässt sich direct erweisen. Denn wäre $\varphi=\varrho i$, so müsste sein:

$$\sin\varrho i+g\varrho i\cos\varrho i=0,$$

oder:

$$1+\frac{\varrho^2}{3!}+\frac{\varrho^4}{5!}+\ \ldots\ +g+g\frac{\varrho^2}{2!}+g\frac{\varrho^4}{4!}+\ \ldots\ =0,$$

es müsste also $\frac{1}{g}+1$ negativ sein. Man hat aber:

$$\frac{1}{g}+1=\frac{p}{k},$$

also ist dies nicht möglich.

Setzen wir nun:

II) $$ru=\Sigma_\mu n_\mu e^{-h^2\mu^2 t}\sin\mu r,$$

wo sich die Summe auf alle μ erstreckt. Damit nun auch sei:

3) $$r=f(r)\quad \text{für}\quad t=0,$$

also:

$$ru=rf(r),$$

gibt die Formel 4) des vorigen Abschnittes:

$$n_\mu=\frac{\int_0^R rf(r)\sin\mu r\,dr}{\int_0^R(\sin\mu r)^2\,dr}.$$

Der Nenner dieses Ausdruckes ist nun gleich:

$$\frac{R}{2}-\frac{\sin 2\mu R}{4\mu},$$

und da man hat:

$$\sin 2\mu R=2\sin\mu R\cos\mu R=-\frac{2\mu q}{\mu^2+q^2}.$$

$$n_\mu=2\int_0^R r'f(r')\sin\mu r'\,dr'\cdot\frac{\mu^2+q^2}{R(\mu^2+q^2)+q}.$$

Sei ξ die Entfernung eines Punktes von der Oberfläche, also $r=R-\xi$, so erhält man:

$$\sin\mu r = \cos\mu R(\operatorname{tg}\mu R\cos\mu\xi - \sin\mu\xi) = -\frac{q}{\sqrt{(\mu^2+q^2)}}\left(\frac{\mu\cos\mu\xi}{q} + \sin\mu\xi\right).$$

Wenn R ins Unendliche wächst, erhält man einen Körper, der sich nach einer Seite von der Ebene aus, für welche $\xi=0$ ist, ins Unendliche erstreckt. — Setzen wir in diesem Falle:

$$f(r) = f(R-\xi) = F(\xi),$$

und berücksichtigen, dass $g=0$, $q=\frac{p}{k}$ wird, so verwandelt sich zunächst die Gleichung II) in:

$$q = \mu R = s\pi,$$

s ist eine beliebige positive ganze Zahl. Man erhält dann:

$$n_\mu = -\frac{2}{\mu^2+q^2}\int_0^\infty F(\xi')(q\sin\mu\xi' + \mu\cos\mu\xi')\,d\xi',$$

während Gleichung II) wird:

$$u = \frac{1}{R}\sum_\mu n_\mu e^{-h^2\mu^2 t}\sin\mu r,$$

oder wenn $\frac{\pi}{R}=d\mu$ gesetzt wird:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty n_\mu e^{-h^2\mu^2 t}\sin\mu r\,d\mu,$$

oder wenn man für $\sin\mu r$ seinen Werth:

$$\sin\mu R\cos\mu\xi - \cos\mu R\sin\mu\xi$$

setzt:

$$\text{IV)}\qquad u = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-h^2\mu^2 t}\frac{F(\xi')}{\mu^2+q^2}(\mu\cos\mu\xi' + q\sin\mu\xi')(\mu\cos\mu\xi + q\sin\mu\xi)\,d\mu\,d\xi'.$$

Wir wollen für diesen Fall jetzt auch die äussere Temperatur v als beliebige Function der Zeit betrachten, also $v=\varphi(t)$ setzen. Die zu erfüllenden Gleichungen sind dann:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\quad \frac{\partial u}{\partial\xi} + q[u-\varphi(t)] = 0 \text{ für } \xi=0, \quad\text{und}\quad u=F(\xi) \text{ für } t=0.$$

Setzen wir:

$$u = u_1 + U,$$

und bestimmen u_1 so, dass es den Gleichungen genügt:

$$\text{A)}\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\xi^2},\quad \frac{\partial u_1}{\partial\xi} + q u_1 = 0 \text{ für } \xi=0,\quad u_1 = F(\xi)-\psi(\xi) \text{ für } t=0.$$

ψ ist eine zu bestimmende Function, u_1 ergibt sich dann aus IV), wenn man für $F(\xi')$ setzt:

$$F(\xi')-\psi(\xi'),$$

U muss dann die Gleichungen erfüllen:

$$\text{B)}\qquad \frac{\partial U}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2},\quad \frac{\partial U}{\partial\xi} + q[U-\varphi(t)] \text{ für } \xi=0,\quad U=\psi(\xi) \text{ für } t=0.$$

Setzen wir:

$$U = \Sigma\, X\sin(\alpha t+\varepsilon) + X'\cos(\alpha t+\varepsilon),$$

wo X und X' Functionen von ξ sind, so wird die erste Gleichung B) erfüllt, wenn man setzt:

$$\alpha X = h^2 \frac{\partial^2 X'}{\partial \xi^2}, \quad \alpha X' = -h^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \xi^2},$$

und für $\xi = 0$ muss sein:

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} + q X = 0, \qquad \frac{\partial X'}{\partial \xi} + q (X' - A) = 0,$$

wenn man setzt:

$$\varphi(t) = \Sigma A \cos(\alpha t + \varepsilon).$$

Die Integration der Differenzialgleichungen gibt:

$$X = \left(C \sin \frac{\xi}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} + C_1 \cos \frac{\xi}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}},$$

$$X' = \left(C \cos \frac{\xi}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}} - C_1 \sin \frac{\xi}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right) e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Es sind dies nur partielle Integrale, indessen üben die beiden andern Theilsätze keinen Einfluss auf die Rechnung aus.

Wir setzen nun:

$$Q^2 = \frac{\alpha}{h^2} + \frac{q\sqrt{2\alpha}}{h} + q^2, \quad Q \sin \omega = \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \quad Q \cos \omega = q + \frac{1}{h} \sqrt{\frac{\alpha}{2}},$$

und die Constanten bestimmen sich dann wegen der Grenzbedingung derart, dass man hat:

$$X = \frac{q}{Q} A e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \omega\right),$$

$$X' = \frac{q}{Q} A e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} + \omega\right),$$

$$U = \Sigma \frac{q}{Q} A e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha t + \varepsilon - \frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right).$$

Es muss aber:

$$\varphi(t) = \Sigma A \cos(\alpha t + \varepsilon)$$

sein. Da man nun nach der Fourrier'schen Formel hat:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \cos \alpha t \cos \alpha t' \varphi(t')\, dt'\, d\alpha,$$

so ist zu setzen:

$$A = \frac{2}{\pi} \varphi(t') \cos \alpha t'\, dt'\, d\alpha,$$

und man erhält:

$$\text{V)} \quad U = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{q \cos \alpha t' \varphi(t') e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{h^2} + q\frac{\sqrt{2\alpha}}{h} + q^2}} \cos\left(\alpha t - \frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \omega\right) dt'\, d\alpha.$$

Da man nun für $t=0$: $u=\psi(\xi)$ haben muss, so hat man:

$$\text{VI)}\quad \psi(\xi)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{q\cos\alpha t'\,q(t')\,e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}\cos\left(\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}+\omega\right)dt'\,d\alpha}{\sqrt{\frac{\alpha}{h^2}+q\frac{\sqrt{2\alpha}}{h}+q^2}}.$$

Setzen wir noch:

$$\vartheta(\xi,\ \xi')=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-h^2\mu^2 t}}{\mu^2+q^2}\,\mu\cos\mu\xi'+q\sin\mu\xi')(\mu\cos\mu\xi+q\sin\mu\xi)\,d\mu,$$

so wird:

$$\text{VII)}\qquad u=\int_0^\infty \vartheta(\xi,\ \xi')\,[F(\xi')-\psi(\xi')]\,d\xi'+U.$$

Der Ausdruck besteht also aus zwei zweifachen und einem vierfachen Integral. Das letztere lässt sich durch Integration nach ξ' leicht auf ein Dreifaches bringen. Poisson verwandelt es auch in ein Doppelintegral, was wir hier übergehen.

Es soll jedoch noch eine zweite Methode gegeben werden, um die Aufgabe zu lösen. Beide beschränken sich selbstverständlich nicht auf diesen Fall.

Wir setzen wieder:

$$u=u_1+U.$$

u_1 mag wieder die Gleichungen A erfüllen, jedoch wollen wir darin $\psi(\xi)=0$ setzen, so dass u_1 vollständig durch Gleichung IV) gegeben ist.

U erfüllt die Gleichungen B), deren dritte jetzt die Gestalt hat $U=0$ für $t=0$.

Setzen wir zunächst $\varphi(t)=C$, so wird $U-C$ offenbar die Gleichungen A) erfüllen, wenn man $F(\xi)=-C$ setzt, also aus IV) wird sich dann ergeben:

$$\text{VIII)}\qquad U=C\chi(\xi,\ t),$$

wo:

$$\chi(\xi,\ t)=1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-h^2\mu^2 t}}{\mu^2+q^2}(\mu\cos\mu\xi'+q\sin\mu\xi')(\mu\cos\mu\xi+q\sin\mu\xi)\,d\mu\,d\xi'$$

ist.

Wenn statt der Gleichung $U=0$ für $t=0$ gegeben ist: $U=0$ für $t=\tau$, wo τ eine beliebige Constante, so ist in VIII) t mit $t-\tau$ zu vertauschen, und man hat:

$$\text{VIIIa)}\qquad U=C\chi(\xi,\ t-\tau).$$

Sei nun:

$$U=\varphi(t)\quad\text{für}\quad t=0.$$

Denken wir uns die Zeit t in n Theile getheilt, deren jeder gleich ϑ, und n sehr gross, also ϑ sehr klein, so kann man annehmen, dass

von $t=0$ bis $t=\vartheta$:

$$U=U_0$$

ist,

von $t=\vartheta$ bis $t=2\vartheta$:

$$U=U_0+U_1,$$

u. s. w., allgemein also:

von $t=(s-1)\vartheta$ bis $t=s\vartheta$:

$$U=U_0+U_1+\ldots+U_{s-1},$$

und von $t=(n-1)\vartheta$ bis $t=t$:

$$U=U_0+U_1+U_2+\ldots+U_{n-1}.$$

Dann ist offenbar auch:

für $t=0$:

$$U_0=0,$$

für $t=\vartheta$:

$$U_1=0,$$

u. s. w.

für $t=(s-1)\vartheta$:

$$U_{s-1}=0.$$

Damit die erste Gleichung B) erfüllt sei, möge jeder der Ausdrücke U_s sie erfüllen.

Die dritte ist durch unsere Annahme bereits erfüllt, und was die zweite anbetrifft, so setzen wir:

$$\varphi(t)=C_0+C_1+C_2+\ldots+C_{n-1},$$

und dieselbe ist erfüllt, wenn man setzt:

$$\frac{\partial U_s}{\partial \xi}+q(U_s-C_s) \quad \text{für} \quad \xi=0.$$

Die Gleichung VIII a) gibt nun offenbar:

$$U_s=C_s\,\chi(\xi,\ t-s\vartheta),$$

und was die Grössen C_s anbetrifft, so ist:

$$\varphi(0)=C_0, \quad \varphi(\vartheta)=C_0+C_1,$$

also:

$$C_1=\varphi(\vartheta)-\varphi(0)$$

u. s. w., also allgemein:

$$C_s=\varphi(s\vartheta)-\varphi[(s-1)\vartheta],$$

also:

$$U=\Sigma\,U_s=\varphi_0\,(\chi(\xi,\ t)-\chi[\xi(t-\vartheta)])+\varphi(\vartheta)\,(\chi[\xi(t-\vartheta)]-\chi[\xi(t-2\vartheta)])$$
$$+\varphi(n-1)\,\vartheta\,[\chi(\xi,\ \vartheta)-\chi(\xi,\ 0)]+\varphi(n\vartheta)\,\chi(\xi,\ 0).$$

Mit Berücksichtigung, dass die Grösse ϑ ins Unendliche abnimmt, und dass in VIII) für $t=0$: $U=0$, also $\chi(\xi,\ 0)=0$ ist, erhält man:

IX)
$$U=\int_0^t \chi'(\xi,\ t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,$$

wo:

$$\chi'(\xi,\ t)=\frac{\partial\chi(\xi,\ t)}{\partial t}$$

ist, und man hat:

$$\chi'(\xi,\ t)=\frac{2h^2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-h^2\mu^2 t}\mu^2}{\mu^2+q^2}\,(\mu\cos\mu\xi'+q\sin\mu\xi')\,(\mu\cos\mu\xi+q\sin\mu\xi)\,d\mu\,d\xi'.$$

Besonders zu merken ist der Fall, wo $\frac{1}{q}=0$ ist, also wo statt der Bedingung, dass Ausstrahlung stattfindet, die Temperatur auf der Oberfläche als Function der Zeit gegeben ist. In diesem Falle gibt Gleichung IV):

$$u=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty F(\xi')\,e^{-h^2\mu^2 t}\sin\mu\xi'\sin\mu\xi\,d\mu\,d\xi'.$$

Es lässt sich die Integration nach μ hier durchführen. Man hat nämlich:

$$2\sin\mu\xi'\sin\mu\xi = \cos\mu(\xi-\xi') - \cos\mu(\xi+\xi'),$$

und:

$$\int_0^\infty e^{-h^2\mu^2 t}\cos\lambda\mu\, d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2h\sqrt{t}}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4h^2 t}},$$

also:

IV a)
$$u = \frac{1}{2h\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(\xi-\xi')^2}{4h^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+\xi')^2}{4h^2 t}} \right\} F(\xi')\, d\xi'.$$

Diese Formel gilt, wenn die Temperatur an der Oberfläche Null ist.

Setzt man $F(\xi') = 1$, so kommt:

$$\chi(\xi, t) = 1 - \frac{1}{2h\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(\xi-\xi')^2}{4h^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+\xi')^2}{4h^2 t}} \right\} d\xi',$$

oder wenn wir im ersten Theile setzen:

$$\frac{\xi'-\xi}{2h\sqrt{t}} = \beta,$$

und im zweiten:

$$\frac{\xi+\xi'}{2h\sqrt{t}} = \beta:$$

$$\chi(\xi, t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\frac{\xi}{2h\sqrt{t}}}^{\frac{\xi}{2h\sqrt{t}}} e^{-\beta^2}\, d\beta,$$

also auch:

$$\chi'(\xi, t) = \frac{\xi}{2h\sqrt{\pi}}\; \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4h^2 t}}}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

und somit ist in diesem Falle:

$$U = \frac{\xi}{2h\sqrt{\pi}}\int_0^t \varphi(\tau)\, \frac{e^{-\frac{\xi^2}{4h^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, d\tau,$$

oder auch wenn:

$$\frac{\xi}{2h\sqrt{(t-\tau)}} = \beta$$

gesetzt wird:

IX a)
$$U = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\xi}{2h\sqrt{t}}}^\infty \varphi\left(t - \frac{\xi^2}{4h^2\beta^2}\right) e^{-\beta^2}\, d\beta,$$

und es ist:

$$u = u_1 + U,$$

wo u_1 durch den Ausdruck IV a) gegeben ist.

Wenn t grösser wird, so verschwindet also u_1 ganz, während in U die untere Grenze Null wird, und man kann setzen:

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \varphi\left(t - \frac{\xi^2}{4h^2\beta^2}\right) e^{-\beta^2}\, d\beta.$$

Diese Formel gibt offenbar annähernd die Erwärmungsverhältnisse der Erde an, nur ist $\varphi(t)$ als periodische Function zu bestimmen. Setzt man demgemäss:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 \cos \alpha t + a_2 \cos 2\alpha t + \ldots$$
$$+ b_1 \sin \alpha t + b_2 \sin 2\alpha t + \ldots$$

so gibt der erste Theil der Reihe, wenn man denselben in U einsetzt, Ausdrücke von der Form:

$$a_s [A_s \cos s\alpha t + B_s \sin (s\alpha t)],$$

und der letzte Theil:

$$b_s [-B_s \cos s\alpha t + A_s \sin s\alpha t],$$

wo zu setzen ist:

$$A_s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta^2} \cos \frac{s\alpha\xi^2}{4h^2\beta^2},$$

$$B_s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta^2} \sin \frac{s\alpha\xi^2}{4h^2\beta^2},$$

also wenn wir setzen:

$$\frac{s\alpha\xi^2}{4h^2} = k^2:$$

$$A_s + B_s i = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta^2 + \frac{k^2 i}{\beta^2}} d\beta.$$

Um dies Integral zu berechnen, gehen wir von der allgemeinen Cauchy'schen Formel aus:

$$\int_a^{a_1} \varphi(\psi x, b) \frac{\partial \psi(x, b)}{\partial x} dx + \int_b^{b_1} \varphi(\psi a_1, y) \frac{\partial \psi(a_1, y)}{\partial y} dy$$
$$- \int_a^{a_1} \varphi(\psi x, b_1) \frac{\partial \psi(x, b_1)}{\partial x} dx - \int_b^{b_1} \varphi(\psi a, y) \frac{\partial \psi(a, y)}{\partial y} dy = 0.$$

(Siehe den Artikel: Quadraturen, 45 A). Setzen wir darin:

$$\psi(x, y) = x + \frac{y(1+i)}{x}, \quad \varphi(u) = e^{-u^2}, \quad a_1 = +\infty, \quad a = -\infty,$$

so fällt das zweite und vierte Integral wegen des Factors e^{-u^2}, der unendlich wird, ganz weg, und man hat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x + \frac{b(1+i)}{x}\right)^2} \left(1 - \frac{b(1+i)}{x^2}\right) dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x + \frac{b_1(1+i)}{x}\right)^2} \left(1 - \frac{b_1(1+i)}{x^2}\right) dx,$$

so dass dieser Ausdruck von b unabhängig ist. Es darf aber b nicht $=0$ gesetzt werden, denn da im Laufe der Integration $x=0$ wird, so würde Unbestimmtheit eintreten. Für anderes b ist dies nicht der Fall, da für unendlich kleines x dann immer die Grösse unter dem Integralzeichen verschwindet, also dieser Theil des Integrationsweges keinen Einfluss ausübt. Dagegen ist zu sehen, dass für wachsendes b der Ausdruck unter dem Integralzeichen sich der Null nähert, denn obgleich $\frac{b_1(1+i)}{x^2}$ als Factor vorkommt, so überwiegt die Exponentalgrösse wie leicht zu sehen dermaassen, dass das ganze Integral verschwindet. Also was auch das reelle b ausser Null sei, so hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} \frac{b(1+i)}{x^2}\, dx.$$

Sei das erste Integral gleich V, das zweite gleich W, so ist:

$$\frac{\partial V}{\partial b} = -2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} \left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right) \frac{1+i}{x}\, dx$$

$$= -2(1+i)\, V - 2(1+i)\, W = -4\,(1+i)\, V,$$

also:

$$\frac{\partial V}{\partial b} + 4\,(1+i)\, V = 0,$$

d. h.:

$$V = C\, e^{-4\,(1+i)\, b},$$

wo die Constante C vermittelst eines speciellen Werthes von b zu bestimmen ist.

Es ist nun:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} dx.$$

Theilt man dies Integral in zwei andere:

$$\int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0},$$

und setzt in dem letztern $-x$ für x, so wird es dem erstern gleich, also:

$$V = 2Z, \quad Z = \int_0^{\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} dx.$$

Wir nehmen Z in den Grenzen $+\varepsilon$ und ∞, wo ε verschwindend klein ist. Da der Theil unter ε dann verschwindet, so ist dies immer möglich. Lässt man nun b abnehmen, aber so, dass $\frac{b}{\varepsilon}$ unendlich klein ist, so wird das Integral:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} dx$$

noch continuirlich bleiben, wenn b verschwindend klein ist, und man kann also dafür setzen:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

da der Theil des letztern Integrals unter ε verschwindet. Man hat nun:

$$2Z = C\, e^{-4\,(1+i)\, b},$$

und es ist, da somit Continuität stattfindet, hier gestattet, $b=0$ zu setzen. Dann wird:

$$C = \sqrt{\pi},$$

also:

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(x+\frac{b(1+i)}{x}\right)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-4\,(1+i)\, b},$$

woraus sich sogleich ergibt, wenn man $b = \frac{k}{\sqrt{\pi}}$ setzt:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x^2 \pm \frac{ik^2}{x^2}\right)} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-(1 \pm i) k \sqrt{2}}.$$

Es folgt hieraus:

$$A_s + B_s i = e^{-k\sqrt{2}(1-i)},$$

$$A_s = e^{-k\sqrt{2}} \cos k\sqrt{2}, \quad B_s = e^{-k\sqrt{2}} \sin k\sqrt{2}.$$

Setzen wir noch: $\frac{b_s}{a_s} = \operatorname{tg} \lambda_s$, so wird:

$$\varphi(t) = C_0 + C_1 \cos(\alpha t - \lambda_1) + C_2 \cos(\alpha t - \lambda_2) + \ldots,$$

wo C_0, C_1 ... Constanten sind, und:

$$u = C_0 + C_1 e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha t - \frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} - \lambda_1\right)$$
$$+ C_2 e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{2\alpha}{2}}} \cos\left(2\alpha t - \frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{2\alpha}{2}} - \lambda_2\right) + \ldots$$

Ist T die Dauer der Periode, so wird man haben:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T}.$$

Der mittlere Werth von u ist offenbar C_0. Man erhält denselben nämlich, wenn man u nach t integrirt in den Grenzen der Periode 0 und $\frac{2\pi}{T}$, und durch $\frac{2\pi}{T}$ dividirt. Wegen des Exponentialfactors kann man bei grösseren Tiefen das mit C_2 multiplicirte Glied vernachlässigen. Ist dann s der Betrag der ganzen Wärmeänderung in der Tiefe ξ, so hat man:

$$s = 2 C_1 e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\pi}{T}}}.$$

Ist s' die Wärmeänderung für Tiefe ξ', so hat man:

$$s : s' = e^{-\frac{\xi}{h}\sqrt{\frac{\pi}{t}}} : e^{-\frac{\xi'}{h}\sqrt{\frac{\pi}{t}}},$$

d. h. die Oscillationen ändern sich in geometrischer Proportion, wenn sich die Tiefen in arithmetischer ändern. Dies gibt ein Mittel, die Grösse h exponentiell zu finden. Ist nämlich:

$$\frac{\xi' - \xi}{h}\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \pi,$$

so wird die eine Stelle dann ein Maximum von u haben, wenn die andere ein Minimum hat. Indem man zwei solche Stellen untersucht und ihre Tiefen misst, ist also h zu finden.

Wir wollen jetzt noch annehmen, dass eine Hohlkugel mit den Radien ϱ und R gegeben sei, und dass an beiden Grenzflächen Ausstrahlung stattfindet. Zu den Gleichungen 1), 2), 3) kommt dann noch die für die innere Grenzfläche hinzu. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass das Gas im Innern die Temperatur der Grenzfläche der Kugel selbst habe, oder ein leerer Raum stattfinde, so wird eine Zuströmung nicht stattfinden, also $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ sein, d. h.:

4) $$\frac{\partial ru}{\partial r} = \frac{ru}{\varrho} \quad \text{für} \quad r = \varrho.$$

Setzen wir wieder wie oben:

$$ru = A\, e^{-h^2 \mu^2 t} (\sin \mu r + \alpha \cos \mu r),$$

so ist:

$$\frac{\partial r u}{\partial r} = e^{-h^2 \mu^2 t} (\mu \cos \mu r - \alpha \mu \sin \mu r),$$

also wegen 4):

$$\sin \mu \varrho + \alpha \cos \mu \varrho = \varrho \mu \cos \mu \varrho - \alpha \mu \varrho \sin \mu \varrho,$$

$$\alpha = \frac{-\sin \mu \varrho + \mu \varrho \cos \mu \varrho}{\cos \mu \varrho + \mu \varrho \sin \mu \varrho},$$

also:

$$ru = e^{-h^2 \mu^2 t} [\sin \mu (r - \varrho) + \mu \varrho \cos \mu (r - \varrho)],$$

indem man:

$$A = \cos \mu \varrho + \mu \varrho \sin \mu \varrho$$

setzt. Dieser Ausdruck in 2) gesetzt gibt, wenn v wieder $= 0$ ist:

$$\mu \cos \mu (R - \varrho) - \mu^2 \varrho \sin \mu (R - \varrho) + q \sin \mu (R - \varrho) + q \mu \varrho \cos \mu (R - \varrho) = 0,$$

oder:

$$\frac{\mu (1 + q \varrho)}{\mu^2 \varrho - q} = \operatorname{tg} \mu (R - \varrho).$$

Diese transcendente Gleichung gibt ähnlich wie oben die Werthe von μ. Es ist dann wie oben:

$$ru = \Sigma_\mu n_\mu e^{-h^2 \mu^2 t} [\sin \mu (r - \varrho) + \mu \varrho \cos \mu (r - \varrho)] = \Sigma_\mu n_\mu e^{-h^2 \mu^2 t} V_\mu.$$

Um noch der Gleichung 3) zu genügen, ist dann zu setzen:

$$n_\mu = \frac{\int_\varrho^R r f(r) V_\mu dr}{\int_\varrho^R V_\mu^2 dr},$$

ganz ähnlich wie bei der Vollkugel.

Wir erwähnen noch den Fall, wo die Kugel aus zwei concentrischen Stücken, die jedes homogen, aber beide von ungleicher Dichtigkeit sind, besteht.

Sind u, u' die Temperaturen der beiden Stücke, so gelten für u die Gleichungen 1), 2) und 3), für u' den Gleichungen 1), 2) und 4) analoge, und da an der Trennungsfläche die einströmende Wärme proportional $u - u'$ ist, so hat man:

$$k \frac{\partial u}{\partial r} + q (u - u') = 0, \quad k \frac{\partial u'}{\partial r} + q (u - u') = 0$$

an dieser Fläche, wo q eine Constante ist. Diese Gleichungen geben eine Beziehung zur Bestimmung der Constanten in den partiellen Integralen. Der Fall kann dann in derselben Weise wie der obige behandelt werden.

3) Wärmeverbreitung in einem Parallelepipedon.

Sei ein rechtwinkliges Parallelepipedon gegeben, bei welchem Ausstrahlung stattfinde. Wir setzen jedoch die äussere Temperatur gleich Null. Seien drei anstossende Seiten Coordinaten-Axen, die Längen dieser Seiten bezüglich l, m, n. Die Constante $\frac{p}{k} = P$ kann dann für jede der sechs Seitenflächen eine andere sein. Wir bezeichnen diese Constanten bezüglich mit: a, a_1, b, b_1, c, c_1: so wird sein:

1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

2) $\frac{\partial u}{\partial x} = a u$ für $x=0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -a_1 u$ für $x=l$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = b u$ für $y=0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -b_1 u$ für $y=l$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = c u$ für $z=0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = -c_1 u$ für $z=l$,

3) $u = f(x, y, z)$ für $t=0$.

Wir setzen für u zunächst den Werth $A_s U_s e^{-h^2 \mu^2 t}$, und für u_s die 8 Ausdrücke:

$$U_1 = \cos\lambda x \cos\lambda' y \cos\lambda'' z,$$
$$U_2 = \sin\lambda x \cos\lambda' y \cos\lambda'' z,$$
$$U_3 = \cos\lambda x \sin\lambda' y \cos\lambda'' z,$$
$$U_4 = \cos\lambda x \cos\lambda' y \sin\lambda'' z,$$
$$U_5 = \sin\lambda x \sin\lambda' y \cos\lambda'' z,$$
$$U_6 = \sin\lambda x \cos\lambda' y \sin\lambda'' z,$$
$$U_7 = \cos\lambda x \sin\lambda' y \sin\lambda'' z,$$
$$U_8 = \sin\lambda x \sin\lambda' y \sin\lambda'' z,$$

so ergibt sich durch Einsetzen in 1):

$$\mu^2 = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2.$$

Nun kann man nehmen:

$$u = (A_1 U_1 + A_2 U_2 + A_3 U_3 + A_4 U_4 + A_5 U_5 + A_6 U_6 + A_7 U_7 + A_8 U_8) e^{-\mu^2 t}.$$

Durch Einsetzen in die ersten beiden Gleichnngen 2) erhält man dann durch Vergleiche der entsprechenden Glieder:

$$A_2 \lambda - A_1 a = 0, \quad (A_2 \cos\lambda l - A_1 \sin\lambda l)\lambda + (A_2 \sin\lambda l + A \cos\lambda l) a_1 = 0,$$
$$A_4 \lambda - A_3 a = 0, \quad (A_4 \cos\lambda l - A_3 \sin\lambda l)\lambda + (A_4 \sin\lambda l + A_3 \cos\lambda l) a_1 = 0,$$

u. s. w., indem man A_2 bezüglich mit A_4, A_6, A_8; A_1 mit A_3, A_5, A_7 vertauscht. Man erhält so:

$$A_2 = \frac{a}{\lambda} A, \quad A_4 = \frac{a}{\lambda} A_3, \quad A_6 = \frac{a}{\lambda} A_5, \quad A_8 = \frac{a}{\lambda} A_7,$$
$$(a+a_1)\lambda \cos\lambda l + (a a_1 - \lambda^2) \sin\lambda l = 0.$$

Indem man auch die andern Gleichungen 2) anwendet, hat man drei Beziehungen für λ, λ', λ'', und von den acht Grössen A bleibt nur eine A_1 willkürlich, und man hat:

$$A_2 = \frac{a}{\lambda} A_1, \quad A_3 = \frac{b}{\lambda'} A_1, \quad A_4 = \frac{ab}{\lambda\lambda'} A_1, \quad A_5 = \frac{c}{\lambda''} A_1, \quad A_6 = \frac{ac}{\lambda\lambda''} A_1, \quad A_7 = \frac{bc}{\lambda'\lambda''} A_1,$$
$$A_8 = \frac{abc}{\lambda\lambda'\lambda''} A_1.$$

Indem wir $A^{(s)}$ für A_1 setzen, und:

$$P = U_1 + \frac{a}{\lambda} U_2 + \frac{b}{\lambda'} U_3 + \frac{ab}{\lambda\lambda'} U_4 + \frac{c}{\lambda''} U_5 + \frac{ac}{\lambda\lambda''} U_6 + \frac{bc}{\lambda'\lambda''} U_7 + \frac{abc}{\lambda\lambda'\lambda''} U_8$$

nehmen, kann man allgemein setzen:

$$u = \sum_{(s)} A^{(s)} P_s e^{-h^2 \mu_s^2 t}.$$

λ, λ', λ'' sind bestimmt durch die transcendenten Gleichungen:

$$(a+a_1)\lambda \cos\lambda l + (a a_1 - \lambda^2) \sin\lambda l = 0,$$
$$(b+b_1)\lambda' \cos\lambda' m + (b b_1 - \lambda'^2) \sin\lambda' m = 0,$$
$$(c+c_1)\lambda'' \cos\lambda'' n + (c c_1 - \lambda''^2) \sin\lambda'' n = 0.$$

Man beschränkt sich auch hier auf die positiven Wurzeln, da jeder derselben eine gleiche negative entspricht, und A_s ist nach unserer allgemeinen Methode so zu bestimmen, dass Gleichung 3) erfüllt wird.

Man erhält offenbar:

$$A^{(s)} \int_0^l \int_0^m \int_0^n P_s^2 \, dx\, dy\, dz = \int_0^l \int_0^m \int_0^n P_s^1 f \, dx\, dy\, dz.$$

Die Grössen $A^{(s)} P_s$ gehen hier auf die s te Wurzel der transcendenten Gleichungen.

4) Wärmeverbreitung in einem Cylinder.

Sei jetzt ein homogener Cylinder gegeben, der sich der Einfachheit wegen parallel der Axe ins Unendliche erstrecke. Es möge ferner in gleichen Entfernungen von der Axe gleiche Temperatur stattfinden.

Als Orthogonalflächen nehmen wir in diesem Falle:

a) die concentrischen Cylinderschalen, die mit dem gegebenen gleiche Axe haben, deren Radius r sei,

b) Ebenen, welche durch die Axe gehen, und mit einer Anfangsebene den Winkel φ machen,

c) Ebenen senkrecht auf der Axe in der Entfernung n von einem Anfangspunkte,

die Bogenlängen l, m, n sind dann:

$$l = r, \quad m = r\vartheta, \quad n = n,$$

wo r, ϑ, n von einander unabhängig sind. In den Gleichungen Ia) des Abschnitts 1) ist nun:

$$a = r, \quad b = \vartheta, \quad c = n, \qquad l_1 = 1, \quad m_1 = r, \quad n_1 = 1,$$

also wenn noch:

$$k = k_1 = k_2, \quad \frac{k}{c} = h^2$$

gesetzt wird:

1) $$r\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + r\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right].$$

Für unsern Fall aber ist der Ausdruck von ϑ und n unabhängig, so dass man hat:

1a) $$r\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit den Gleichungen A) in Abschnitt 1), so ist: $g = r$, $s = h^2 r$, $s_1 = s_2 = 0$ zu setzen, und die Gleichung 4) dieses Abschnitts wird:

I) $$n_\mu = \frac{\int_0^R r f(r) \varrho_\mu \, dr}{\int_0^R r \varrho_\mu^2 \, dr},$$

wo r der Radius des Cylinders und ϱ_μ sich durch eine Specialauflösung der Gleichung 1a) ergibt. welche zugleich die Gleichung:

2) $$\frac{\partial u}{\partial r} = qu = 0 \quad \text{für} \quad u = R$$

erfüllt. Setzen wir also:

$$u = n_\mu e^{-h^2 \mu^2 t} \varrho_\mu,$$

so gibt 1a):

a) $$-\mu^2 r \varrho_\mu = \frac{d}{dr}\left(r \frac{d\varrho_\mu}{dr}\right).$$

Wir setzen jetzt, um das allgemeine Integral dieser Gleichung zu finden:

b) $$\varrho = \alpha + \beta \lg r;$$

dies in a) eingesetzt gibt:

$$-\mu^2 r(\alpha+\beta\lg r) = r\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} + 2\frac{d\beta}{dr} + \lg r\left(r\frac{d^2\beta}{dr^2} + \frac{d\beta}{dr}\right).$$

Denkt man sich α und β nach Potenzen von r entwickelt, so müssen offenbar die mit $\lg r$ multiplicirten Glieder einzeln verschwinden, und die Gleichung zerfällt also in zwei andere:

c) $$\alpha\mu^2 r + r\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{d\alpha}{dr} + 2\frac{d\beta}{dr} = 0,$$

und:

d) $$\mu^2 \beta r + r\frac{d^2\beta}{dr^2} + \frac{d\beta}{dr} = 0.$$

Setzt man hier:

$$\beta = (a + a_1 r + a_2 r^2 + \ldots)\, a,$$

so gibt Gleichung d):

$$\mu^2 a_s + (s+1)(s+2)\, a_{s+2} + (s+2)\, a_{s+2} = 0,$$

oder:

$$\mu^2 a_s + (s+2)^2 a_{s+2} = 0.$$

Nun ist:

$$a_0 = 1, \quad a_{-1} = 0,$$

also:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{\mu^2}{2^2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{\mu^4}{2^2 4^2} \ldots,$$

also:

$$\beta = a\left(1 - \frac{\mu^2 r^2}{2^2} + \frac{\mu^4 r^4}{2^2 4^2} - \frac{\mu^6 r^6}{2^2 4^2 6^2} + \ldots\right).$$

Setzt man noch:

$$\alpha = b(1 + b_1 r + b_2 r^2 + \ldots),$$

so gibt Gleichung c):

$$\mu^2 b_s + (s+2)^2 b_{s+2} (-1)^{\frac{s}{2}+1} \frac{2(s+2)\mu^{s+2} a}{2^2 4^2 \ldots (s+2)^2} = 0,$$

wenn s gerade ist, und:

$$\mu^2 b_s + (s+2)^2 b_{s+2} = 0,$$

wenn s ungrade ist. Wegen $b_{-1} = 0$ erhält man aber für ungrade s hieraus:

$$b_s = 0,$$

und wegen $b_0 = 1$:

$$b_2 = -\frac{\mu^2}{2^2} + \frac{\mu^2 a}{4^2 \cdot 6^2 \ldots (s+2)^2} \ldots,$$

so dass α ebenfalls gegeben ist. — Die Bedingungen unserer Aufgabe bestimmen aber, dass u für $r=0$ nicht unendlich werden darf, es muss also β und somit a gleich Null sein. In diesem Falle wird $\frac{d\beta}{dr} = 0$, die Gleichung für α der eben für β gefundenen identisch, und man kann setzen:

e)
$$\varrho_{\mu} = 1 - \frac{r^2\mu^2}{2^2} + \frac{r^4\mu^4}{2^2 4^2} \ldots,$$

wo $b = 1$ ist. Man hat dann:

II)
$$u = \Sigma_{\mu}\, n_{\mu}\, r_{\mu}\, e^{-h^2\mu^2 t}.$$

und es kommt noch darauf an, μ gemäss der Gleichung 2) zu bestimmen. Sei zu dem Ende:

f)
$$\varrho_{\mu} = \psi(r\mu),$$

also:

$$\psi(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2^2} + \frac{\alpha^4}{2^2 4^2} - \ldots,$$

so gibt Gleichung 2):

III)
$$\mu\psi'(R\mu) + q\psi(R\mu) = 0,$$

oder:

$$\mu\psi'(\vartheta) + q\psi(\vartheta) = 0,$$

wo $\vartheta = R\mu$ gesetzt ist.

Da $\psi(\vartheta)$ eine gerade Function ist, so entspricht wieder jedem positivem μ ein gleiches negatives, und wir haben uns auf die ersteren Werthe zu beschränken.

Die Gleichung II) mit Hülfe von I) und III) löst nun die Aufgabe.

Es lässt sich aber der Nenner in I) in endlicher Form finden.

Es ist nämlich nach a):

$$\int_0^R r\varrho^2\,dr = -\frac{1}{\mu^2}\int_0^R \varrho\, d\left(r\frac{d\varrho}{dr}\right) = -\frac{1}{\mu^2}\varrho R\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{\mu^2}\int_0^R r\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 dr$$

$$= -\frac{1}{\mu^2}\left[\varrho R\frac{d\varrho}{dr} - \tfrac{1}{2}R^2\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2\right] - \frac{1}{\mu^2}\int_0^R r^2\frac{d\varrho}{dr}\frac{d^2\varrho}{dr^2}\,dr$$

$$= -\frac{1}{\mu^2}\left[\varrho R\frac{d\varrho}{dr} - \tfrac{1}{2}R^2\left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 + R^2\varrho\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right]$$

$$+ \frac{1}{\mu^2}\int_0^R \varrho\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2\varrho}{dr^2}\right) dr.$$

In dem entwickelten Theile ist r mit R zu vertauschen.

Für den noch unentwickelten Theil gibt Gleichung a), d. h.:

$$-\mu^2 r\varrho = r\frac{d^2\varrho}{dr^2} + \frac{d\varrho}{dr},$$

folgenden Ausdruck:

$$-\frac{1}{\mu^2}\int_0^R \varrho\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varrho}{dr} + \mu^2 r^2\varrho\right) dr = -\int_0^R \left(\varrho\frac{d(r^2\varrho)}{dr} - r\varrho^2\right) dr$$

$$= -\int_0^R r\varrho(\varrho\,dr + r\,d\varrho) = -\tfrac{1}{2}R^2\varrho^2.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, bezeichnet den Nenner in I) mit N und berücksichtigt Gleichung III), so kommt:

$$N = \frac{1}{\mu^2}\left(\tfrac{1}{2}R^2\frac{q^2}{\mu^2}\psi^2 + R\frac{q}{\mu}\psi^2 - R^2\psi\psi''\right) - \tfrac{1}{2}R^2\psi^2,$$

da aber, wenn man in a) für ϱ setzt ψ, sich ergibt:

$$\psi'' = -\frac{\psi'}{R} - \mu^2\psi = \frac{q\psi}{\mu R} - \mu^2\psi,$$

so ist:

$$N = \frac{R^2}{2\mu^4}(q^2+\mu^2)\psi^2,$$

und:

I a)
$$n_\mu = \frac{2\mu^4 \int_0^R r\,\varrho_\mu f(r)\,dr}{R^2(q^2+\mu^2)\psi(R\mu)^2}.$$

5) Wärmeverbreitung in einem Stabe mit geringen Querdimensionen.

Wenn die Entfernung eines beliebigen Punktes in einem Stabe von einem Anfangspunkte mit x bezeichnet wird, und die Querdimensionen sehr klein sind, und man denkt sich Ebenen senkrecht auf die Längendimension hindurchgelegt, so wird, wenn ω der Flächeninhalt einer solchen Ebene ist, k die frühere Bedeutung hat, durch eine solche Ebene einströmen die Wärmemenge $\omega k \frac{\partial u}{\partial x}$, also die Differenz der einströmenden und der durch die entgegengesetzte Ebene eines Elements ausströmenden Wärme sein $\frac{\partial\left(\omega k \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}dx$. Durch Ausstrahlung durch die Seiten verliert ferner das Element die Wärmemenge $\varepsilon p(u-v)dx$, wo v die äussere Temperatur, p ein Coefficient, der von der Natur des Gases abhängt, ε der Umfang des Querschnittes ist. Man hat also, wenn c die frühere Bedeutung hat:

1)
$$c\,\omega\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\left(\omega k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} - \varepsilon p(u-v).$$

Nehmen wir ω, k und c wieder constant an, und setzen:

$$\frac{k}{c} = h^2, \quad \frac{\varepsilon p}{c\omega} = q,$$

so wird:

1 a)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(u-v).$$

Setzt man die äussere Temperatur constant, also $v=0$ (was immer geschehen kann, wenn man u mit $u-v$ vertauscht), so ist die Gleichung 1) unserm allgemeinen Verfahren zugänglich.

An den Grenzflächen wollen wir im Allgemeinen annehmen, dass der Werth von p nicht derselbe sei wie im übrigen Theile des Stabes. Die hindurchdringende Wärme wird daselbst sein bezüglich $\omega p_1(u-v)$ und $-\omega p_2(u-v)$, da der Austausch an den Grenzflächen im entgegengesetzten Sinne stattfindet, und man wird ganz wie im allgemeinen Falle haben:

2)
$$k\frac{\partial u}{\partial x} = p_1(a-v), \quad k\frac{\partial u}{\partial x} = p_2(v-u),$$

oder wenn:

$$\frac{p_1}{k} = q_1, \quad \frac{p_2}{k} = q_2$$

ist:

2 a)
$$\frac{\partial u}{\partial x} = q_1(u-v), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = q_2(v-u).$$

Wir nehmen auch hier $v=0$.

Setzen wir in 1 a): $u = Ue^{-qt}$, so ergibt sich:

$$-qU + \frac{\partial U}{\partial t} = h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - qU,$$

also:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}.$$

Es kann also in 1a) $q=0$ gesetzt werden, wenn man nach Vollendung der Rechnung noch mit $e^{-q\,t}$ multiplicirt. Also:

1b)
$$\frac{\partial u}{\partial t} = h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die Gleichungen 2a) bleiben ungeändert. Es kommt dazu noch zur völligen Bestimmung der Temperatur:

3)
$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t=0.$$

Sei $2\,l$ die Länge des Stabes, und der Anfangspunkt in der Mitte, so gilt die erste Gleichung 2a) für $x=l$, die zweite für $x=-l$.

Setzen wir nun:

$$u = \Sigma\, e^{-h^2 \mu^2 t} (A \sin \mu x + B \cos \mu x),$$

so ist die Gleichung 1b) erfüllt. Wegen 2a) ist zu setzen:

$$A\,\mu \cos \mu\, l - B\,\mu \sin \mu\, l = q_1\, A \sin \mu\, l + q_1\, B \cos \mu\, l,$$
$$A\,\mu \cos \mu\, l + B\,\mu \sin \mu\, l = q_2\, A \sin \mu\, l - q_2\, B \cos \mu\, l.$$

Diese Gleichungen bestimmen eine der Constanten A oder B und ausserdem μ. Wir erhalten:

$$B\,(q_1 \cos \mu\, l + \mu \sin \mu\, l) = A\,(\mu \cos \mu l - q_1 \sin \mu\, l),$$
$$B\,(q_2 \cos \mu\, l + \mu \sin \mu\, l) = A\,(\mu \cos \mu\, l + q_2 \sin \mu\, l),$$

also:

I)
$$(q_1 q_2 - \mu^2)\, \mathrm{tg}\, 2\mu l = \mu (q_1 + q_2),$$

eine transcendente Gleichung für μ. Setzt man den Werth von B):

$$B = \frac{A\,(\mu \cos \mu\, l - q_1 \sin \mu\, l)}{q_1 \cos \mu\, l + \mu \sin \mu\, l}$$

in den von U ein, und macht:

$$\frac{A}{q_1 \cos \mu\, l + \mu \sin \mu\, l} = n_\mu,$$

so ist:

$$u = \Sigma\, n_\mu\, e^{-h^2 \mu^2 l} (q_1 \sin \mu (x-l) + \mu \cos \mu (x-l)),$$

und die Gleichung 3) kann wie immer erfüllt werden.

Hätte man statt des Stabes einen geschlossenen Ring, so würden die Gleichungen 2) wegfallen, statt dessen aber die Bedingung kommen, dass die Werthe von u und $\frac{\partial u}{\partial x}$ gleich sind für $u=l$ und $u=-l$. Dies gibt:

$$\sin \mu\, l = 0, \quad \mu = \frac{s\pi}{l}.$$

Die Auflösung wird ähnlich wie beim unendlich grossen Körper. Wir übergehen die weitere Ausführung dieser Aufgaben, welche keinerlei Schwierigkeiten machen.

6) Ueber Wärmegleichgewicht im Cylinder und in der Kugel.

Die Gleichung fürs Wärmegleichgewicht ist in rechtwinkligen Coordinaten:

1)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Wir setzen zunächst einen Cylinder voraus, wo die Cylinderaxe zugleich Axe der z sein soll. Nehmen wir an, dass die Erwärmung von z unabhängig sei, also in Schnitten senkrecht auf der Axe gleich, so haben wir:

1 a) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

Sei:

$$x=r\cos\vartheta,\quad y=r\sin\vartheta.$$

Die allgemeine Lösung von 1 a) ist:

$$u=f(x+yi),$$

also auch:

$$u=(x+yi)^n=r^n\cos n\vartheta+i\sin n\vartheta,$$

oder:

$$u=r^n\cos n\vartheta,\quad \text{und}\quad u=r^n\sin n\vartheta;$$

man kann also setzen:

I) $$u=\frac{a_0}{2}+a_1 r\cos\vartheta+a_2 r^2\cos 2\vartheta+\ldots,$$
$$+b_1 r\sin\vartheta+b_2 r^2\sin 2\vartheta+\ldots$$

Sei R der Radius des Cylinders, so wird für $r=R$ die Temperatur eine Function von ϑ sein, also:

2) $$u=f(\vartheta)\quad\text{für}\quad r=R;$$

man muss also haben:

$$f(\vartheta)=\frac{a_0}{2}+a_1 R\cos\vartheta+a_2 R^2\cos 2\vartheta+\ldots,$$
$$+b_1 R\sin\vartheta+b_2 R^2\sin 2\vartheta+\ldots$$

Nach der Theorie der Fourrier'schen Reihen (vergleiche den Artikel: Reihen) ist diese Gleichung erfüllt, wenn man setzt:

II) $$a_s R^s=\int_0^{2\pi} f(\alpha)\cos s\alpha\, d\alpha,\qquad b_s R^s=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin s\alpha\, d\alpha.$$

Die Gleichungen I) und II) lösen das Problem völlig. Man hat also:

$$u=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{r}{R}\cos(\alpha-\vartheta)+\frac{r^2}{R^2}\cos 2(\alpha-\vartheta)+\ldots\right).$$

Es lässt sich die Reihe unter dem Integralzeichen nach bekannten Methoden aber leicht summiren, und man hat:

III) $$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\, d\alpha\,\frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\alpha-\vartheta)+r^2}.$$

Sei jetzt der Körper eine Kugel und die Temperatur im Anfang ganz beliebig, so hat man die Gleichung 1), und wenn r, ϑ, φ Polarcoordinaten vom Mittelpunkt der Kugel aus genommen sind, R aber der Radius der Kugel ist, so hat man noch:

2 a) $$u=\psi(\vartheta,\varphi)\quad\text{für}\quad r=R.$$

Eine leicht zu verificirende Specialauflösung von 1) ist:

$$u=\frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}=\frac{1}{s}.$$

Da die Gleichung 1) linear ist, kann man aber auch setzen:

$$u=\frac{\partial\frac{1}{s}}{\partial\alpha},$$

ein Ausdruck, der abgesehen von einem constanten Factor gibt:

$$\frac{x-\alpha}{s^3};$$

es ist also auch eine Auflösung, da auch:

$$\frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \frac{1}{s}}{\partial \gamma}$$

dergleichen sind, also:

$$u = -\frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{s^3} - \frac{1}{s},$$

oder wenn man:

$$l = 2\alpha, \quad m = 2\beta, \quad n = 2\gamma$$

setzt:

$$u = -\frac{x^2+y^2+z^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir nehmen ferner an, dass α, β, γ die Coordinaten eines Punktes auf der Kugeloberfläche sind. Sei $R=1$, eine Annahme, die der Allgemeinheit nichts schadet, so ist:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1.$$

Setzen wir noch:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad z = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$\alpha = \cos\vartheta', \quad y = \sin\vartheta'\cos\varphi', \quad z = \sin\vartheta'\sin\varphi',$$

so kommt:

$$u = \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\chi+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo:

$$\cos\chi = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$$

ist. Man kann also auch setzen:

$$\text{IV)} \qquad u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\chi+r^2)^{\frac{3}{2}}} \psi(\vartheta_1'\,\varphi')\sin\vartheta'\,d\vartheta'\,d\varphi).$$

Es lässt sich aber zeigen, dass dieser Ausdruck für $r=1$ die Gleichung 2a) erfüllt, und somit die Aufgabe vollständig löst

Setzen wir nämlich:

$$r = 1-\varrho,$$

wo ϱ verschwindend klein ist, so verschwindet der Ausdruck unter dem Integralzeichen für alle Werthe von ϑ' und φ', wo der Nenner nicht Null ist.

Also nur der Theil des Integrals kommt in Betracht, wo $\vartheta' = \vartheta + k$, $\varphi' = \varphi + \lambda$, k und λ aber verschwindend klein sind. Man erhält somit für $r = 1-\varrho$, wie leicht zu sehen, wenn man die höheren Potenzen von ϱ und k nicht berücksichtigt:

$$u = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{2\varrho}{(\varrho^2+k^2+\lambda^2\sin\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}} \psi(\vartheta+k_1\,\varphi+\lambda)\,dk\,d\lambda.$$

Das Integral ist auf alle Werthe von k und λ auszudehnen, welche unendlich klein sind. Indess da für alle k und λ, die nicht unendlich klein sind, wegen des verschwindenden ϱ das Argument Null ist, kann man beide Integrale in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ nehmen.

Ist nun für die gegebenen Werthe von ϑ und φ die Function ψ continuirlich, so hat man also:

$$u = \frac{\psi(\vartheta, \varphi)}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varrho\,dk\,d\lambda}{(\varrho^2+k^2+\lambda^2\sin\vartheta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Das Integral gibt, wie leicht zu sehen, 4π, also es ist für verschwindendes ϱ oder für $r=1$ in der That:

$$u=\psi(\vartheta,\ \varphi),$$

was zu beweisen war. Ist aber ψ für den entsprechenden Werth von ϑ discontinuirlich, und:

$$\psi(\vartheta+\varepsilon,\ \varphi),\quad \psi(\vartheta-\varepsilon,\ \varphi),$$

also für verschwindendes ε von einander verschieden, so kommt:

$$u=\frac{1}{4\pi}\left\{\psi(\vartheta-\varepsilon,\ \varphi)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{+\infty}+\psi(\vartheta+\varepsilon,\ \varphi)\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\right\},$$

wo die Integrale das obige Argument enthalten. In diesem Falle ergibt sich dann sehr leicht, wenn man die Integrale berechnet:

$$u=\frac{\psi(\vartheta-\varepsilon,\ \varphi)+\psi(\vartheta+\varepsilon,\ \varphi)}{2},$$

also die arithmetische Mitte beider Werthe. Aehnliches gilt für φ.

Man kann aber auch den Werth von u oder $\psi(\vartheta,\ \varphi)$ leicht in eine Reihe entwickeln. Sei nämlich:

$$\frac{1}{(1-2r\cos\chi+r^2)^{\frac{1}{2}}}=f(r)=P_0+P_1 r+P_2 r^2+\ \ldots,$$

wo die Grössen $P_0,\ P_1\ \ldots$ also Functionen von ϑ und φ sind, so hat man:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)P_n r^n+2r\Sigma nP_n r^{n-1}=f(r)+2r\frac{df(r)}{dr}=\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\chi+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

also:

V) $$u=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2n+1)}{4\pi}r^n\int_0^\pi\sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{2\pi}P_n\,\psi(\vartheta',\ \varphi')\,d\varphi',$$

und:

VI) $$\psi(\vartheta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^\pi\sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{2\pi}P_n\,\psi(\vartheta',\ \varphi')\,d\varphi'.$$

Die Glieder dieser Reihe werden Kugelfunctionen genannt. Ueber ihre höchst wichtigen Eigenschaften, sowie über die Convergenz der Reihe VI) siehe den Artikel: Kugelfunctionen. Hier ist nur noch Einiges über sie zu sagen, was zum Verständniss des Folgenden nöthig ist.

Nach Abschnitt 1) Ic) erfüllt der Ausdruck u die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial ru}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 ru}{\partial\varphi^2}=0.$$

Setzt man nun:

$$u=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(Q_n r^n\right),$$

also:

$$Q_n=\frac{(2n+1)}{4\pi}\int_0^\pi\sin\vartheta'\,d\vartheta'\int_0^{2\pi}P_n\,\psi(\vartheta',\ \varphi')\,d\varphi',$$

so wird:

4) $$(n+1)nQ_n+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\right)\frac{\partial Q_n}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta^2}\frac{\partial^2 Q_n}{\partial\varphi^2}=0,$$

und:

5) $$\psi(\vartheta, \varphi) = \sum_{r=0}^{r=\infty} Q_n,$$

also jede Function von ϑ und φ lässt sich in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickeln. Jede dieser Functionen erfüllt unabhängig von der Form von $\psi(\vartheta, \varphi)$ die Gleichung 4). Diese Gleichung reicht zur Definition der Kugelfunctionen aus. Auch die Functionen P_n erfüllen offenbar die Gleichung 4), und sie sind daher als die einfachste Form der Kugelfunctionen zu betrachten.

Prüft man die Gleichung 4) in Bezug auf die im Abschnitt 1) gegebene allgemeine Methode, so zeigt sich, dass diese Gleichung die daselbst geforderte Form hat, und namentlich ist der Satz richtig:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Q_n\, Q_s \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wenn n nicht gleich s ist.

7) Wärmeverbreitung in einer Kugel, die im Anfange auf ganz beliebige Art erwärmt ist.

Wir geben noch die vollständige Auflösung der Wärmegleichungen für die Kugel nach Poisson.

Die zu erfüllenden Gleichungen sind:

1) $$\frac{\partial ru}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 ru}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\,\frac{\partial \sin\vartheta \frac{\partial ru}{\partial\vartheta}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta^2}\,\frac{\partial^2 ru}{\partial\varphi^2}\right),$$

2) $$\frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{pR-1}{R}\, ru = pR\zeta \quad \text{für} \quad r = R,$$

wo $p = \frac{P}{k}$ in II) des Abschnitts 1) gesetzt ist, und R der Radius der Kugel ist, endlich:

3) $$u = f(r, \vartheta, \varphi) \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Da ru jedenfalls eine Function von ϑ und φ ist (welche noch r und ϑ enthält), so kann man u in eine Reihe nach Kugelfunctionen entwickeln. Sei also:

4) $$ru = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots,$$

so erfüllt jede der Grössen Q_n die Gleichung 4) des vorigen Abschnittes. Der Ausdruck ru wird die Gleichung 1) erfüllen, wenn Q_n dieselbe erfüllt, und diese mit 4) des vorigen Abschnitts verglichen, gibt dann:

a) $$\frac{\partial Q_n}{\partial t} = h^2\left(\frac{\partial^2 Q_n}{\partial r^2} - \frac{n(n+1)\, Q_n}{r^2}\right).$$

Wir setzen jetzt wie immer:

b) $$Q_n = \Sigma V_\mu e^{-h^2\mu^2 t}.$$

Die Gleichung 4) wird dann:

5) $$\frac{\partial^2 V}{\partial r} + \left(\frac{\mu^2 - n(n+1)}{r^2}\right) V = 0.$$

Für diese totale Differenzialgleichung lässt sich ein endliches Integral finden.

Sei zunächst $n = 0$, so ist eine Lösung:

$$V = e^{\mu r i}.$$

Wir setzen jetzt allgemein:

c) $$V = e^{\mu r i} \sum_{p=0} C_p r^{m+p}.$$

Dies in 5) eingesetzt gibt:

$$\sum_{p=0} \left(2(m+p+1)\mu i\, C_{p+1} + [(m+p+1)(m+p+2)-n(n+1)]\, C_{p+2}\right) r^{m+p}$$
$$+ \left(2m\mu i\, C_0 + [m(m+1)-n(n+1)]\, C_1\right) r^{m-1}$$
$$+ [m(m-1)-n(n+1)]\, C_0\, r^{m-2} = 0.$$

Die mit gleichen Potenzen von r multiplicirten Glieder müssen einzeln verschwinden. Es ist also zunächst für $p=0$:

$$m(m-1)=n(n+1),$$

also entweder $m=n+1$ oder $m=-n$.

Wir gehen von dem letztern Werthe aus. Dann ist:

$$-2n\mu i\, C_0 - 2n\, C_1 = 0,$$

also:

$$C_1 = \mu i\, C_0,$$

und allgemein:

d) $$2(p-n+1)\mu i\, C_{p+1} = [n(n+1)-(p-n+1)(p-n+2)]\, C_{p+2}.$$

Diese Gleichung gibt auch C_1, wenn man $p=-1$ setzt.

Wenn aber $p=n-1$ gesetzt wird, so kommt C_{p+2} und also auch alle folgenden $p=0$, die Gleichung c) hat also nur $n+1$ Glieder, und es ist:

c_1) $$V = e^{\mu i r} \sum_{p=0}^{p=n} C_p\, r^{p-n}.$$

Für d) kann man auch schreiben:

$$C_p = \frac{2(p-n-1)\mu i}{p(2n+1-p)}\, C_{p-1},$$

und wenn man C_{p-1} durch C_{p-2} ausdrückt und so fortfährt:

d_1) $$C_p = \frac{n_p}{(2n)_p\, p!} (-2\mu i)^p C_0,$$

wo n_p der Binomialcoefficient $\dfrac{n(n-1)\ \ldots\ (n-p+1)}{1\cdot 2\ \ldots\ p}$, und $p! = 1\cdot 2\ \ldots\ p$ ist.

Das Integral c_1) der Gleichung 5) enthält allerdings nur eine Constante. Setzen wir indess $-i$ für i, und ändern diese Constante, addiren beide Ausdrücke, so kommt das vollständige Integral von 5). Indem wir in dem entstehenden Ausdruck die geraden und ungeraden p noch sondern, kommt auf diese Weise

$$V = (Ae^{\mu i r} + Be^{-\mu i r})\, r^{-n} \sum_{q=0}^{q=\frac{n}{2}} \frac{r^{2q}\, n_{2q}\, (-4\mu^2)^q}{(2q)!\,(2n)_{2q}}$$
$$-2\mu(Ae^{\mu i r} - Be^{-\mu i r})\, r^{1-n} \sum_{q=0}^{q=\frac{n-1}{2}} \frac{r^{2q}\, n_{2q+1}\, (-4\mu^2)^q}{(2q+1)!\,(2n)_{2q+1}}.$$

Ist die obere Grenze keine ganze Zahl, so ist dafür die grösste darin enthaltene ganze Zahl zu setzen. Sei noch:

$$A+B=\alpha, \qquad i(A-B)=\beta,$$

so erhält man:

c_2) $$V = (\alpha M - \beta N)\cos \mu r + (\alpha N + \beta M)\sin \mu r,$$

wo also ist:

$$M = r^{-n} \sum_{q=0}^{q=\frac{n}{2}} \frac{r^{2q}\, n_{2q}}{(2q)!\,(2n)_{2q}} (-4\mu^2)^q,$$

$$N = 2\mu r^{1-n} \sum_{q=0}^{q=\frac{n-1}{2}} \frac{r^{2q}\, n_{2q+1}}{(2q+1)!\,(2n)_{2q+1}} (-4\mu^2)^q,$$

Es kommt nun zunächst die Bedingung dazu, dass für $r=0$ auch $ru=0$ ist. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn in diesem Falle $V=0$ ist.

Setzen wir r unendlich klein und vernachlässigen die Glieder, welche gegen r^{-n} unendlich gross von einer niederen Ordnung sind, so ist: $V=\alpha M$, es muss also $\alpha=0$ sein, und man hat:

$c_3)$ $$V=\beta(M\sin\mu r - N\cos\mu r).$$

Dass damit die Gleichung $V=0$ für $r=0$ auch wirklich erfüllt sei, ist leicht zu zeigen. Die Glieder, welche mit negativen Potenzen von r multiplicirt sind, verschwinden nämlich in $c_3)$ ganz, wenn man $\sin\mu r$ und $\cos\mu r$ entwickelt. Uebrigens ist die Gleichung 5) eine bekannte, aus der Riccatischen abzuleitende, und daher ihre Auflösung auch in der Form eines bestimmten Integrals zu finden, woraus dann die Eigenschaft, dass bei zweckmässiger Bestimmung der einen Constante V für $r=0$ verschwindet, sogleich hervorgeht.

Um der Gleichung 2) zu genügen, setzen wir vor der Hand wieder $\zeta=0$, und sei der Kürze halber $\frac{pR-1}{R}=q$. Sie wird erfüllt, wenn man an dieser Grenze hat:

e) $$\frac{\partial\varrho}{\partial r}+q\varrho=0 \quad \text{für} \quad r=R,$$

wo:

f) $$\varrho = M\sin\mu r - N\cos\mu r$$

ist. Dies ist wieder eine transcendente Gleichung, und es ist leicht zu sehen, dass jedem positiven μ ein gleiches negatives entspricht, von dem hier abzusehen ist. Wir können nunmehr setzen.

$b_1)$ $$Q_n = \Sigma\beta_{n,\mu}\,\varrho_{n,\mu}\, e^{-\mu^2 h^2 t},$$

wo die Summe auf alle Werthe von μ geht, denen Werthe von β und ϱ entsprechen. Es sind aber noch die Coefficienten $\beta_{n,\mu}$ zu bestimmen, so dass Gleichung 3) erfüllt ist.

Wie auch die Function $f(r,\vartheta,\varphi)$ beschaffen sei, so lässt sich dieselbe nach Kugelfunctionen entwickeln, und es sei:

g) $$f(r,\vartheta,\varphi)=Y_0+Y_1+Y_2+\ldots,$$

so kann man Gleichung 3) ersetzen durch:

$$Q_s=Y_s \quad \text{für} \quad t=0.$$

Ganz wie in allen früheren Fällen ist wegen Gleichung 4), welche die vorgeschriebene Gestalt hat, auch hier:

$$\int_0^R \varrho_s\,\varrho_n\,dr=0,$$

so lange $n \gtrless s$ ist.

Setzt man also wieder behufs der Reihenentwickelung:

$$Y_n=\Sigma\beta_{n,\mu}\,\varrho_{n,\mu},$$

so kommt:

h) $$\int_0^R Y_n \varrho_n dr = \beta_{n,\mu} \int_0^R \varrho_n^2 dr,$$

womit auch $\beta_{n,\mu}$ gegeben ist.

Die Formel a) löst also die Aufgabe, wenn man die Q darin durch b_1) ausdrückt, Gleichung c_1) und f) berücksichtigt, und die Werthe $\beta_{n,\mu}$ der Gleichung h) entnimmt.

Es ist aber jetzt der Fall zu betrachten, wo ζ eine gegebene Function von t, φ und ϑ ist. Zu diesem Zwecke bedienen wir uns der Methode des Abschnitts 2). Derselben zufolge setzen wir:

$$u = u_1 + u',$$

und möge u_1 die Gleichung 1) und 2) erfüllen, wenn ζ darin gleich 0 ist, ausserdem die Gleichung 3), wenn wir darin für f setzen $f - f_1$, wo f_1 noch zu bestimmen ist. u_1' ist dann gegeben durch die eben entwickelten Formeln für u, wenn man überall f vertauscht mit $f - f_1$. Dagegen muss u' erfüllen die Gleichung 1), die Gleichung 2), worin ζ beliebig ist, und die Gleichung 3), worin f_1 für f steht. Wir haben aber den Vortheil, dass f_1 ganz beliebig bestimmt werden kann. Um u' zu finden, setzen wir nun zunächst wieder:

$$ru' = \sum_{n=0} Q_n',$$

wo Q_n' wieder Kugelfunctionen vorstellt. Das Verfahren ist nun zunächst wie oben. Q_n' erfüllt die Gleichung 4), und indem man setzt:

i) $$Q_n' = \Sigma V_\mu' e^{-h^2 \mu^2 t},$$

wo μ ein anderes als vorhin ist, gelangt man zu dem c_3) analogen Ausdruck:

k) $$V' = \beta_n (M \sin \mu r - N \cos \mu r) = \beta_n \varrho_n,$$

wo ϱ also eine Function von r ist, die noch von n und μ abhängig ist.

Um die Gleichung 2) zu erfüllen, entwickeln wir auch ζ nach Kugelfunctionen, also:

$$\zeta = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots$$

Der Gleichung 2) ist dann genügt, wenn man hat:

$$\frac{\partial Q_n'}{\partial r} + q Q_n' = pRZ_n \quad \text{für } r = R.$$

Wir wollen nun zunächst annehmen, es sei:

l) $$Z_n = \Sigma v_n e^{-h^2 \mu^2 t},$$

so kann man die vorletzte Gleichung wegen des Werthes von Q_n' vertauschen mit:

m) $$\frac{\partial V_\mu'}{\partial r} + q V_\mu' = pRV_\mu.$$

Wir setzen jetzt $-h^2 \mu^2 = mi$. Da man nun hat, was auch f sei:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cos m(t - \tau) f(\tau)\, d\tau\, dm,$$

oder was dasselbe ist:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{m(t-\tau)i} f(\tau)\, d\tau\, dm,$$

so lässt sich die Gleichung l) immer verificiren, wenn man:

$$V_\mu = \frac{1}{2\mu} e^{-m\tau i} Z_{(\tau)}\, d\tau\, dm$$

setzt, und die Summe auf alle dm und dr von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt denkt. Die Gleichung m) reicht dann zur Bestimmung der ebenfalls unendlich kleinen Grössen β aus, und die Summe in i) wird dann auch ein Doppelintegral. Es ist somit die Aufgabe gelöst, und es bleibt nur noch übrig, in den Werth von u' zu setzen $t=0$, was dann den Werth von f_1 gibt.

Bei dem letzten Theil der Aufgabe ist hier nur andeutungsweise verfahren worden. Das Nähere enthält: *Poisson, Théorie mathématique de la chaleur.*

8) Historisches.

Die Grundlagen der Theorie der Wärmeverbreitung stammen von Fourrier (*Théorie analytique de la chaleur*). Die mathematische Ausführung derselben, einer der schönsten Theile der Analysis, ist als Erweiterung derjenigen Methode zu betrachten, welche Lagrange in seiner Theorie der schwingenden Saite geschaffen hat. Poisson's schon angeführtes Werk enthält ausser den hier angedeuteten Theorien eines Stabes und der vollständigen Theorie der Kugel noch Anwendungen auf die Temperatur der Erde. — Ausser der Anwendung auf verschiedene dreiseitige Prismen, den vollständig begrenzten Cylinder, ist noch Lamé's Arbeit über das Wärmegleichgewicht eines Ellipsoids (*Journal de l'école polytechnique, cahier* 22) von besonderer Wichtigkeit. Es sind in dieser Arbeit die sogenannten Lamé'schen Functionen zuerst angewandt, welche mit dem Ellipsoid in ähnlicher Weise zusammenhängen, wie die von La Place herrührenden Kugelfunctionen mit der Kugel.

Wärme — Verwerthung derselben in technischer Beziehung.

1) Einleitung.

Es ist in diesem Artikel die Theorie der wichtigsten praktischen Verwerthungsmittel der Wärme, also der Dampferzeugungsapparate und der Dampfmaschine zu geben.

In dieser Einleitung sollen einige an den theoretischen Theil der Wärmelehre sich anknüpfende Betrachtungen, namentlich Erfahrungsresultate, gegeben werden. Diese betreffen die Abkühlung und die Erzeugung von Wärme aus gegebenem Brennmaterial.

A) Abkühlung.

Wir geben hier statt der im vorletzten Artikel enthaltenen Formel für die Abkühlungsgeschwindigkeit (d. h. den Wärmeverlust in der Zeiteinheit) einige für den Gebrauch bequemere Näherungsformeln. Bezeichnen wir dieselbe mit v, und den Temperaturüberschuss des abzukühlenden Gegenstandes gegen die umgebende Luft mit t, so ist nach Péclet:

$$v = At(1+\alpha t).$$

A und α sind Erfahrungscoefficienten. Bei Temperaturen von 10 bis 260° ist:

1) für eine Glasfläche: $\alpha = 0{,}0065$,

2) für eine Silberfläche: $\alpha = 0{,}0051$,

3) für eine Russfläche: $\alpha = 0{,}0066$,

und bei Temperaturen von 0 bis 20°, für dieselben Flächen:

1) $\alpha = 0{,}0039$,

2) $\alpha = 0{,}011$,

3) $\alpha = 0{,}0043$.

Für A erhält man, wenn als Zeiteinheit die Stunde, als Raumeinheit das Quadratmeter vorausgesetzt wird, wenn ferner der abzukühlende Gegenstand Wasser ist, in welchem Falle es wie bei der Bestimmung von α nur auf die Beschaffenheit des Gefässes ankommt:

1) für polirte Metallflächen:

$$A = 4{,}38,$$

2) für Glas oder Firnisswand:

$$A = 6{,}40,$$

3) für Blech oder Gusseisen:

$$A = 7{,}70,$$

4) für mit Russ überzogene Wände:

$$A = 8{,}48.$$

Denken wir uns jetzt ein mit warmem Wasser gefülltes Gefäss mit zwei Mänteln in einem gewissen Abstande umgeben, und die Zwischenräume mit abgesperrter Luft gefüllt.

Seien F und F_1 die Oberflächen der Gefässe, t und t_1 die Temperaturüberschüsse gegen die äussere Luft, so kann man, da beide Oberflächen sich gleich schnell abkühlen, setzen:

$$F(t-t_1) = F_1 t_1,$$

also:

$$t_1 = \frac{Ft}{F+F_1},$$

die Abkühlung auf's Quadratmeter:

$$v = At_1(1+\alpha t_1)$$

$$= \frac{F}{F+F_1} At\left(1+\frac{\alpha F}{F+F_1}t\right),$$

und für die ganze Fläche F_1:

$$F_1 v = \frac{F F_1}{F+F_1} A t \left(1 + \frac{\alpha F t}{F+F_1}\right).$$

Sollte jedoch der Abstand zwischen Mantel und Kessel nur sehr klein sein, so würde hauptsächlich durch Ausstrahlung Wärme an den Mantel abgegeben, und dies würde vollständig stattfinden, wenn dieser Raum luftleer wäre. Dann hat die Abkühlung bei F_1 einen Coefficienten A_1, der nicht mit A identisch zu sein braucht, und der den obigen Zahlen zu entnehmen ist. Es ist dann:

$$AF(t-t_1) = A_1 F_1 t_1,$$

$$t_1 = \frac{AF}{AF + A_1 F_1} t,$$

$$v = A_1 t_1 (1 + \alpha t_1),$$

$$F_1 v = \frac{A A_1 F F_1}{AF + A_1 F_1} t \left(1 + \alpha \frac{AF}{AF + A_1 F_1} t\right).$$

Diese Formeln sind aber für schlechte Wärmeleiter nicht anwendbar.

Für diese setzt Péclet:

$$v = \frac{t - t_1}{e} FC,$$

wo C die Wärmemenge ist, welche stündlich durch einen plattenförmigen Körper vom Stoffe des gegebenen von 1 Quadratmeter Fläche und 1 Meter Dicke geht, wenn die Temperaturdifferenz auf beiden Oberflächen 1° beträgt, v die Wärme, welche stündlich durch eine Platte von der Dicke e und der Seitenfläche F geht, und wo die Temperaturen beider Seiten t und t_1 sind.

Die Constante C ist für:

Liaskalk	0,80,
Ziegel	0,68,
Gyps	0,73,
Tannenholz	0,17,
Eichenholz	0,32,
Kork	0,093,
gehacktes Stroh	0,070,
Holzkohlenstaub	0,35,
Koaksstaub	0,44,
trockene Erde	0,27,
fein zertheilte Baumwolle	0,135,
stark zusammengedrückte	0,170,
fein zertheilte Wolle	0,063,
stark zusammengedrückte	0.136,

Wird eine Seitenfläche bei constanter Temperatur erhalten, die andere der Luft ausgesetzt, so kann man annähernd den Wärmeverlust gleich FAt_1 nehmen, wenn t und t_1 die Ueberschüsse der Wärme gegen die äussere Luft sind, wie dies in der Formel für v ja geschehen kann. Es ist also:

$$FAt_1 = \frac{t - t_1}{e} FC,$$

$$t_1 = \frac{Ct}{Ae}, \quad F_1 v = \frac{FACt}{Ae + C},$$

und es ist:

für Liaskalk und Ziegel $A = 9$,

für Gyps und Holz . $A = 8$.

Ist die Dicke e gering und das Leitungsvermögen gross, so ist $Ae = 0$ zu setzen:

$$Fv = FACt.$$

Bei grösseren Temperaturdifferenzen aber erhält man bessere Resultate durch die Formel:

$$Fv = \frac{ACFt(1 + \alpha t_1)}{(1 + \alpha t_1) Ae + C},$$

wo:

$$\alpha = 0{,}0051$$

für polirte,

$$\alpha = 0{,}0066$$

für nicht polirte Flächen ist.

B) Brennmaterial.

Die Wärmeerzeugung geschieht in der Technik fast ausschliesslich durch Verbrennen, d. h. durch schnelles Oxydiren der Körper, und kommt hier hauptsächlich die Verbrennung der kohlenhaltigen Körper, also die Erzeugung der Kohlensäure in Anwendung. Die Menge der erzeugten Wärme wird gemessen durch Beobachtung der Temperaturzunahme eines gewissen Quantums Wasser bei gegebenem Brennstoff. So findet Dulong, dass 1 Gramm Wasserstoff bei seiner Verbrennung 34600 Gramm Wasser um 1° erwärmt, 1 Gramm Kohlenstoff nur 7290 Gramm Wasser, 1 Gramm Kohlenoxyd 2490, dass ferner im ersteren Falle 4,32 Gramm Sauerstoff, im zweiten 2,73, im dritten 4,36 verbraucht werden.

Beschränken wir uns auf die Verwandlung der Kohle in Kohlensäure, und nehmen wir an, dass dieselbe aus 27,36 Gewichtstheilen Kohle und 72,64 Kohlensäure besteht, so zeigt sich allgemein, dass bei der Verbrennung von 1 Gramm Kohle $\frac{72{,}64}{27{,}39} = 2{,}65$ Gramm Sauerstoff

verbraucht werden. Dem entsprechen aber 11.52 Gramm atmosphärischer Luft, da dieselbe 23 Gewichtstheile Sauerstoff und 77 Stickstoff enthält.

Favre und Silbermann haben neuere Versuche über die Verbrennungswärme angestellt. Sie bedienten sich dabei eines Calorimeters, bestehend in einer metallenen Verbrennungskammer von 5 Centimeter Weite, 10 Centimeter Höhe, die in ein mit Wasser gefülltes Gefäss taucht und mit der äusseren Umgebung durch drei Röhren in Verbindung steht; durch eine wurde das zu verbrennende Gas, durch die andere der dazu nöthige Sauerstoff zugeführt, durch die dritte die gasförmigen Verbrennungsproducte abgeführt. Dies letzte Rohr ist lang und vielfach gewunden, um seine Wärme an das Kühlwasser abzugeben. Bei Verbrennung von festen Körpern wurden diese vorher in die Verbrennungskammer gebracht und das zweite Rohr geschlossen. Der ganze Apparat befand sich überdies in einem Wasserbade, um möglichst wenig Wärmecommunication mit der Umgebung zu bewirken. Auf diese Weise ergaben sich bei Verbrennung von 1 Kilogramm die Wärmemenge für:

Holzkohle	8080	Calorics,
Graphit	7797	—
Kohlenoxydgas	2403	—
Wasserstoffgas	34462	—

unter einem Kilogramm die Wärmemenge verstanden, welche 1 Kilogramm Wasser um 1° erwärmt.

Der Unterschied zwischen den Versuchen von Dulong und diesen letztern in Bezug auf Kohle kommt daher, dass ein Theil derselben bei mangelhafter Zuführung von atmosphärischer Luft nicht zu Kohlensäure, sondern zu Kohlenoxydgas verbrannt wird, wobei sich eine geringere Wärme entwickelt.

Es wurden nach genauern Berechnungen für die Kohlensäure 72,73 Theile Sauerstoff, 27,27 Kohlenstoff angenommen, für das Kohlenoxydgas 42,86 Theile Kohlenstoff, 57,14 Theile Sauerstoff. Um ein Gramm Kohle in Kohlenoxydgas zu verwandeln, werden daher $\frac{57,14}{42,86} = 1,333$ Gramm Sauerstoff, oder $\frac{1,333}{0,23} = 5,8$ Gramm atmosphärischer Luft verbraucht, etwa halb so viel als bei der Verbrennung zu Kohlensäure.

Nach den letzten Versuchen erzeugt die Verbrennung eines Kilogramms Kohlenoxydgas 2403 Calorics, und daher der darin enthaltene Kohlenstoff, welcher 0,4286 Kilogramm beträgt:

$$\frac{2403}{0,4286} = 5607 \text{ Calorics};$$

die Wärme, welche bei Verbrennung eines Kilogramms Kohle zu Kohlenoxydgas entsteht, muss also:

$$8080 - 5607 = 2473 \text{ Calotics}$$

betragen, etwa $\frac{3}{10}$ der durch vollständige Verbrennung zu Kohlensäure gewonnenen.

Die Wärmemenge, welche bei Verbrennung von Kohlenwasserstoffverbindungen entsteht, lässt sich aus denen durch Kohle und durch Wasserstoff gewonnenen leicht ermitteln.

Das Grubengas enthält 25 $\frac{0}{0}$ Wasserstoff. 75 $\frac{0}{0}$ Sauerstoff, also die Verbrennungswärme:

$$\tfrac{1}{4} \cdot 34462 + \tfrac{3}{4} \cdot 8080 = 14675,5.$$

Das ölbildende Gas enthält $\frac{1}{7}$ Wasserstoff, $\frac{6}{7}$ Kohlenstoff, dem entspricht die Verbrennungswärme:

$$11849.$$

Zu Brennstoffen, welche bei der Erzeugung von Wasserdampf dienen, gebraucht man hauptsächlich Steinkohlen, Braunkohlen, Torf, Holz und Coaks. Dieselben enthalten Kohle, Wasserstoff und Sauerstoff, oft noch etwas Stickstoff, verschiedene anorganische Bestandtheile (Asche), ausserdem noch Wasser. Das letztere, indem es Dampfform annimmt, schmälert die Heizkraft. Frisches Holz enthält 35—50 $\frac{0}{0}$, in der Luft getrocknet immer noch 20—25 $\frac{0}{0}$ Wasser. Um Wasser in Dampf zu verwandeln, werden aber 640 Calorics verbraucht, und da ganz trockenes Holz 3600 Calorics gibt, so gibt es in der Luft getrocknet, also bei 25 $\frac{0}{0}$ Wassergehalt nur:

$$3600 \cdot \tfrac{3}{4} = 2700 \text{ Calorics},$$

wovon:

$$640 \cdot 0,25 = 160$$

an das Wasser abgegeben werden, so dass die Heizkraft:

$$2700 - 160 = 1540 \text{ Calorics}$$

beträgt.

Der in den Brennmaterialien enthaltene Sauerstoff ist mit $\frac{1}{8}$ seines Gewichtes Wasserstoff zu Wasser verbunden, derart, dass wenn man mit H die Wasserstoffmenge, mit O die Sauerstoffmenge bezeichnet, nur der Theil des Wasserstoffes $H - \frac{O}{8}$ zur Verbrennung gelangt und die Wärme:

$$W_1 = 34462\left(H - \frac{O}{8}\right)$$

erzeugt, wozu die durch die Kohle C erzeugte:

$$W_2 = 8080\,C$$

kommt, also die (theoretische) Heizkraft des Brennmaterials ist:

$$W = 34462\left(H - \frac{O}{8}\right) + 8080\,C.$$

Hieraus ergibt sich für die verschiedenen Brennstoffe:

Anthracit, welcher 91 % Kohle, 3 % Wasserstoff, 3 % Sauerstoff, 3 % Asche enthält:

$$W = 8258,$$

Steinkohle, welche 80 % Kohle, 5 % Wasserstoff, 10 % Sauerstoff und 5 % Asche enthält:

$$W = 7756,$$

Braunkohle, welche 60 % Kohle, 5 % Wasserstoff, 25 % Sauerstoff, 10 % Asche enthält:

$$W = 5494,$$

Torf, welcher 52 % Kohle, 5 % Wasserstoff, 33 % Sauerstoff, 10 % Asche enthält:

$$W = 4503,$$

Holz, welches durchschnittlich 49 % Kohle, 6 % Wasserstoff, 44 % Sauerstoff, 1 % Asche enthält:

$$W = 4131.$$

Soll das Brennmaterial zuerst verkohlt werden, so wird nicht allein Wasserstoff und Sauerstoff entfernt, sondern es geht durch chemische Verbindung auch ein Theil der Kohle verloren. Daher gibt 1 Pfund lufttrockenes Holz mit 20 % Wasser und 40 % Kohlenstoff nur 0,18 bis 0,25 Pfund Holzkohlen, und 1 Pfund Steinkohle nur 0,45 bis 0,6 Pfund Coaks, aber Holzkohle und Coaks sind auch nicht reine Kohle, und geben daher nur 7000 bis 7500 Calories. Es ist daher, wenn es nur auf die Heizkraft ankommt, die Verkohlung nicht gerathen.

Beim Verbrennen auf Heerden, wo dasselbe nie ganz vollständig erfolgt, und wo die Verbrennungsproducte Wärme mit fortnehmen, auch die Wände davon consumiren, ist nach W. Brix höchstens $\frac{2}{3}$ der theoretischen Heizkraft zu erreichen.

Es ist noch die zur Verbrennung nöthige Luftmenge, sowie die des durch den Schornstein abzuleitenden Gasgemenges zu ermitteln.

Um die Kohlenstoffmenge O in Kohlensäure zu verwandeln, ist eine Sauerstoffmenge:

$$O_1 = \tfrac{8}{3}\,C = 2{,}67\,C$$

nöthig, die daraus entstehende Menge Kohlensäure beträgt also:

$$C + \tfrac{8}{3}\,C = 3{,}67\,C.$$

Die frei bleibende Wasserstoffmenge:

$$H - \frac{O}{8}$$

erfordert zur Verbrennung:

$$O_2 = 8\left(H - \frac{O}{8}\right) = 8H - O,$$

und gibt das Wasserquantum:

$$9\left(H - \frac{O}{8}\right) = 9H - \frac{9}{8}O;$$

es ist also der ganze Sauerstoffbedarf:

$$O = O_1 + O_2 = 2{,}67\,C + 8H - O,$$

er erfordert das $\frac{1}{0{,}231}$ fache atmosphärischer Luft:

$$L = 11{,}54\,C + 34{,}63\,H - 4{,}33\,O.$$

Sind C, H und O in Kilogramm ausgedrückt, und will man die Luftmenge in Cubikmetern haben, so ist in Berücksichtigung, dass bei 10° Wärme und 0,76 Meter Barometerstand 1 Cubikmeter Luft 1,25 Kilogramm wiegt, mit $\frac{1}{1{,}25} = \frac{4}{5}$ zu multipliciren, und man hat:

$$L = 9{,}23\,C + 27{,}70\,H - 3{,}46\,O \quad \text{(Cubikmeter)}.$$

Für ein Pfund Brennstoff ist dies mit $\frac{32{,}346}{2{,}138}$ zu multipliciren, wenn die Luft in Cubikfuss bestimmt werden soll; es kommt:

$$L = 139{,}6\,C + 419{,}1\,H - 52{,}4\,O \quad \text{(Cubikfuss)}.$$

Soll aber eine schnelle und vollständige Verbrennung erreicht werden, so ist die hinzuströmende Luftmenge zu verdoppeln.

Das durch den Schornstein abströmende Gasgemenge besteht aus dem Stickstoff der zuströmenden Luft, der durch die Verbrennung erlangten Kohlensäure und aus dem hierbei gebildeten Wasserdampf. Die Stickstoffmenge ist:

$$Q_1 = \frac{0{,}769}{0{,}231}\,(2{,}67\,C + 8H - O)$$

$$= 8{,}88\,C + 26{,}63\,H - 3{,}33\,O \quad \text{(Kilogramm)},$$

oder da bei 10° Wärme und 0,76 Meter Barometerstand die Dichtigkeit des Stickstoffes 1,2141 Kilogramm beträgt:

$$Q_1 = 7{,}315\ C + +21{,}93\ H - 2{,}74\ O \text{ Cubikmeter,}$$

also für das Pfund Brennstoff:

$$Q_1 = 1107\ C - 3474\ H - 41{,}50 \text{ Cubikfuss.}$$

Die Dichtigkeit der Kohlensäure ist 1,911 Gramm, woraus sich ergibt:

$$Q_2 = \frac{3{,}67\ C}{1{,}911} = 1{,}919\ C \text{ Cubikmeter,}$$

und für das Pfund Brennstoff:

$$Q_2 = 29{,}03\ C \text{ Cubikfuss.}$$

Aus der Wasserstoffmenge H entsteht die Wassermenge $q\,H$, welcher, da ein Cubikmeter 0,78125 Kilogramm wiegt, die Dampfmenge:

$$Q_3 = 11{,}52\ H \text{ Cubikmeter,}$$

oder fürs Pfund Brennstog:

$$Q_3 = 174{,}3\ H \text{ Cubikfuss}$$

entspricht. Also das durch die Verbrennung erlangte Gas beträgt:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 139{,}7\ C + 521{,}7\ H - 4{,}15\ O \text{ Cubikfuss.}$$

Sein Gewicht ist das Gewicht C des Brennstoffes vermehrt um das der zugeströmten Luft L, also das Gewicht eines Cubikfusses davon, oder die Dichtigkeit:

$$\gamma = \frac{12{,}54\ C + 34{,}63\ H - 4{,}33\ O}{139{,}7\ C + 521{,}70\ H - 41{,}50\ O}.$$

Wird aber der besseren Verbrennung wegen die doppelte Luftmenge zugeführt, so ist für das abgeführte Gasgemenge noch hinzuzufügen:

$$L = 139{,}6\ C + 419{,}1\ H - 52{,}4\ O,$$

so dass man erhält:

$$Q = 279{,}4\ C + 940{,}8\ H - 10{,}9\ O \text{ Cubikfuss,}$$

$$\gamma = \frac{24{,}08\ C + 69{,}26\ H - 8{,}66\ O}{279{,}4\ C + 940{,}8\ H - 10{,}9\ O}.$$

Die Werthe Q und γ beziehen sich auf die mittlere Temperatur, 10°, der zutretenden Luft; ist daher t die der abströmenden, so ist Q zu multipliciren mit:

$$\frac{1 + \delta t}{1 + 10\,\delta}, \quad \text{wo:} \quad \delta = 0{,}00367,$$

man erhält also:

$$\frac{1 + 000367\ t}{1{,}0367}\ Q,$$

also wenn:

$$t = 300\,°$$

ist, wie dies gewöhnlich angenommen wird, so ist das Quantum:

$$2{,}027\ Q,$$

und die Dichtigkeit:

$$\frac{\gamma}{2{,}027} = 0{,}4934\,\gamma.$$

Die folgende Tafel enthält die theoretische Heizkraft der gebräuchlichsten Brennstoffe, sowie die zuströmenden Luftmengen und abströmenden Gasmengen.

Brennstoff	Wärmemenge in Calorics	Kalte Luft für 1 Pfd. Brennstoff in Cubikfuss	Abgeführte Gasmenge in Cubikfuss für 0°	300°
Stark gedörrtes Holz	3600	102	111	233
Lufttrockenes Holz mit 20 % Wasser	2800	82	93	194
Holzkohle	7000	248	248	519
Stark gedörrter Torf	4800	171	178	371
Torf mit 20 % Wasser	3600	137	146	305
Torfkohle	5860	200	200	418
Mittlere Steinkohle	7500	274	279	584
Coaks mit 15 % Asche	6000	227	227	475
Reiner Coaks	7050	250	250	520

Es ist jetzt der Brennstoffaufwand zu ermitteln, welcher zur Erzeugung einer gegebenen Wasserdampfmenge nöthig ist.

Die Gesammtwärme des Dampfes von t° ist nach Regnault:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Um ein Pfund Wasser von t_0 Grad in Dampf von t Grad zu verwandeln, sind also nöthig:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t - t_1 \text{ Calorics},$$

oder wenn man genauer für die Temperatur des Wassers die Wärmemenge:

$$W_1 = t_1 + 0{,}00002\,t_1^2 + 0{,}0000003\,t_1^3$$

nimmt:

$$W = 606{,}5 + 0{,}305\,t - (1 + 0{,}00002\,t_1 + 0{,}0000003\,t_1^2)\,t_1.$$

Früher bediente man sich anderer Formeln.

Nimmt man mit Watt und Pambour an, dass die Gesammtwärme des Dampfes (latente und freie) bei jeder Temperatur dieselbe ist, und dass, um Wasser von 100° in Dampf zu verwandeln, 540 Calorics nöthig sind, so ist die Wärmemenge, welche nöthig ist, um Wasser von t_1 Grad in Dampf von irgend einer Temperatur zu verwandeln:

$$W = 540 + 100 - t_1 = 640 - t_1.$$

Nach Southern und Poncelet ist dagegen die latente Wärme des Dampfes constant gleich 540 Calorics, also die Gesammtwärme:

$$W = 540 + t - t_1.$$

Bei Temperaturen von 100 bis 150° geben die Watt'sche und die Regnault'sche Formel gleiche Resultate.

Nach Erfahrungsresultaten gibt:

1	Pfund	Steinkohle	5 bis 7	Pfund	Dampf,
1	„	Coaks	$4\frac{1}{4}$ „ $5\frac{1}{5}$	„	„
1	„	Holzkohle	6	„	„
1	„	Holz	2,5 „ 2,7	„	„

2) **Dampfkessel.**

A) **Allgemeines.**

Unter Dampfkessel (*chaudière à vapeur — steam boiler*) wird ein metallenes Gefäss verstanden, worin das Wasser erhitzt und in Dampf verwandelt wird. Bei Anfertigung eines solchen ist die Aufmerksamkeit darauf zu richten, dass der zu erzeugende Dampf möglichst wenig Brennmaterial erfordere, und Sicherheit vor dem Zersprengen vorhanden sei. Dampfkessel werden gewöhnlich aus Eisenblech angefertigt, viel seltener aus Kupferblech, nur sehr enge röhrenförmige Kessel macht man aus Gusseisen oder Messing. Die Verbindung der Bleche erfolgt durch starke Nietnägel.

Von der Form der Kessel hängt so

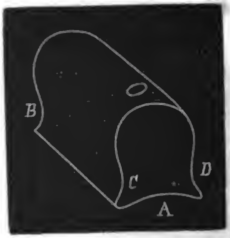
wohl ihre Haltbarkeit als ihr Verdampfungsvermögen ab. Erstere ist desto grösser, je regelmässiger und abgerundeter die Form ist, letztere, je grösser die Oberfläche des Kessels ist. Beide Erfordernisse widerstreiten sich also; je nach den sonstigen Bedingungen hat man der einen oder der andern nachzugeben. Bei schwach gespannten Dämpfen kann die Oberfläche gross, bei stark gespannten muss sie abgerundet sein. Röhrenförmige oder aus mehreren Kesseln zusammengesetzte Dampferzeuger entsprechen am besten beiden Bedingungen.

Die Kesselformen sind:

I. Der Wagen- oder Kofferkessel Watt's (Fig. 42), anwendbar bei kleinen Spannungen (4 bis 6 Pfund Ueberdruck auf den Quadratzoll).

Das Feuer geht an der Unterfläche *A* hin, dann nach den Seiten *BC*, *CD* um den Kessel herum, von denen es in den

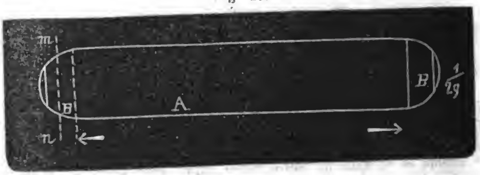
Fig. 42.



Schornstein tritt. Der Kessel ist von innen durch Eisenstäbe verankert, um das Aufbiegen der concaven Flächen zu verhindern.

II. Walzenkessel mit äusserer Feuerung (Fig. 43) bei hochgespannten Dämpfen brauchbar. Die Endflächen *B* sind gewöhnlich kugelförmig. Die Züge sind ebenso wie bei den Wagenkesseln zu führen; jedoch wird bei grossen Kesseln noch eine Rauchröhre durch den Kessel gelegt, durch welche die Feuerluft zurückströmt, ehe sie in die Seitenzüge tritt.

Fig. 43.



III. Walzenkessel mit innerer Feuerung (Fig. 44). Feuerraum und Rost befindet sich in der Röhre *A*, die durch den Kessel geht. Die Feuerluft geht, nachdem sie das Innere des Kessels durchlaufen hat, in die Seitenzüge *B*, *C*, also von aussen in den Kessel.

Fig. 44.

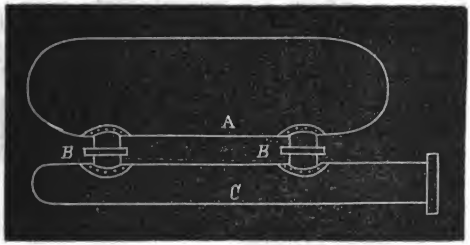


IV. Kessel mit Siederöhren (Fig. 45). Die Siederöhre *C* liegt unter dem Kessel *A*, mit ihm verbunden durch die Röhre *B*. Der Kessel wird hier sehr geschont, da er gar nicht ins Feuer kommt.

Dampfkessel mit Vrowärmern sind ähnlich, nur ist die Feuerung unter dem Kessel selbst.

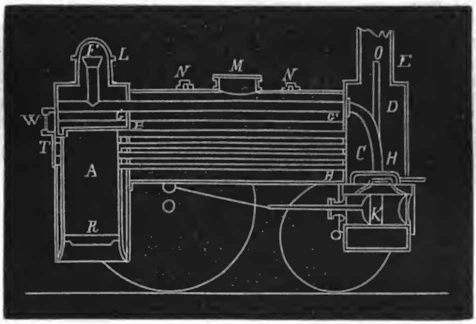
V. Vielröhrige Kessel (Fig. 46), namentlich bei Dampfwagen angewandt, wo die Dampferzeugung sehr schnell erfolgen soll, sie erfordern jedoch viel Brennmaterial. Die Röhren sind aus Messing oder Schmiedeeisen, $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{4}$ Zoll weit, 6 bis 12 Fuss lang, ihre Anzahl ist 100 bis 200, auch noch grösser. Das Wasser umgibt diese Röhren, und

Fig. 45.



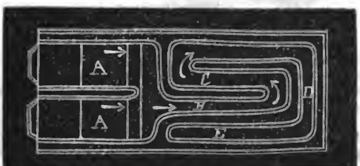
die Feuerluft strömt durch dieselben. *A* ist der Feuerraum mit Rost *R* und Ofenthür *T*, *B* der Wasserkasten mit den Rauchröhren, *CD* der Rauchkasten, *E* die Esse.

Fig. 46.



VI. Kessel mit lothrechten Kammern (Fig. 47) für Dampfschiffe. Den vorigen ähnlich. Die Feuerluft legt den langen Weg *ABCDE* zurück und tritt dann bei *F* in die Esse. Sie werden nur bei niedrigen Dämpfen angewandt, da ihre Biegungen sehr stark sind.

Fig. 47.



B) Dimensionen der Kessel.

Die Heizfläche des Kessels, d. h. der vom Feuer oder der Feuerluft berührte Theil der Oberfläche bestimmt hauptsächlich sein Dampferzeugungsvermögen. Nach den Versuchen von Caré sind bei eisernen Kesseln auf jedes Quadratmeter Heizfläche 19 Kilogramm Dampf zu rechnen, d. h. auf 1 Quadratfuss preussisch 4 Pfund Dampf oder 105 Cubikzoll Wasser. Geht man von Pferdekräften aus, so rechnet Grouvelle auf jede Pferdekraft 1 Quadratmeter oder 10 Quadratfuss, wenn es sich um Maschinen mit hohem Druck aber mit Condensation handelt, dagegen 1,4 Quadratmeter bei niederm Druck. Diese Zahlen sind aber nur rohe Annäherungen, bei Expansionsmaschinen kann die Heizfläche kleiner sein. Bei Dampfschiffen kommen auf 1 Quadratmeter Heizfläche 30—35 Kilogramm, bei Dampfwagen 100—130 Kilogramm. Uebrigens wirkt auch die Dicke der Wände, die Lage gegen den Feuerstrom, und der Temperaturunterschied zwischen Feuerraum und Kessel hierbei ein.

Noch unterscheidet man directe und indirecte Heizfläche. Die erstere befindet sich unmittelbar über dem Feuer, sie bildet den kleineren Theil; die indirecte wird nur von der erwärmten Luft bestrichen, empfängt also durch Leitung ihre Wärme, die directe dagegen hauptsächlich durch Strahlung, sie erhält ungefähr vier- bis fünfmal so viel Wärme als die indirecte; nach Fairbairn soll die erstere $\frac{1}{17}$ der ganzen Heizfläche sein, bei Corwaller Kesseln ist dies Verhältniss aber nur $\frac{1}{23}$, bei Dampfschiffkesseln $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{4}$.

Die Grösse der Kessel wird durch die der Heizfläche und durch das Verhältniss zwischen Dampf- und Wasserraum bedingt. Der Wasserraum muss mindestens den Theil des Kessels ausfüllen, der vom Feuer und der erhitzten Luft in den Zügen berührt wird, weil sonst Zersprengen möglich wäre. Der Sicherheit wegen wird gewöhnlich das Wasser 4 Zoll über den Heizcanälen gehalten. Aber auch der Dampfraum darf nicht zu klein sein, damit kein Wasser vom Dampfe mechanisch mitgerissen wird, und kein Schwanken in der Dampfspannung entsteht. Der Dampfraum ist gewöhnlich zwölfmal so gross, als das mit jedem Kolbenhiebe entführte Dampfvolumen. Auf jede Pferdekraft rechnet der Artizan-Club (in seinem *Treatise on the Steam Engine*) einen Wasserraum von 5 Cubikfuss englisch (4,85 preussisch) und den Dampfraum 3,2 englisch (2,93 preussisch) Cubikfuss, so dass das Verhältniss beider Räume etwa 0,4 ist. Tredgold will den Dampfraum so gross, dass die Veränderlichkeit in der Spannung des Dampfes nicht $\frac{1}{30}$ überschreitet. Ist also V der Dampfraum, C der mit gesättigtem Dampfe auszufüllende Cylinderraum, μ das Verhältniss der Abflusszeit zu der des ganzen Kolbenspiels, also $1-\mu$ das der Sperrzeit zur Spielzeit, dann wird während der Sperrzeit sich die Dampfmenge sammeln:

$$V_1 = (1-\mu)\,C,$$

und da $V_1 = \frac{1}{30} V$ sein soll:

$$V = 30\,(1-\mu)\,C.$$

μ ist ungefähr gleich $\frac{1}{2}$ bei einfach wirkenden und Expansionsmaschinen; bei doppelt wirkenden ohne Expansion, wo μ sehr klein ist, kann diese Formel nicht gebraucht werden.

Jetzt lassen sich die Dimensionen der Kessel ermitteln.

I. Für den Wagenkessel sei l die Länge, b, h die mittlere Breite und Höhe, bhl ist dann ungefähr der Fassungsraum, $0{,}4\,bhl$ der Dampfraum, $0{,}6\,bhl$ der Wasserraum, $0{,}6\,h$ die Höhe desselben im Mittel. Die Heizfläche F soll den untern Theil bis zu dieser Höhe einnehmen, also:

$$F = bl + 2 \cdot 0{,}6\,bh + 2 \cdot 0{,}6\,lh,$$

d. h.:

$$F = bl + 1{,}2\,h\,(b+l).$$

Gewöhnlich ist noch:

$$b = \tfrac{3}{4}\,h, \quad l = \tfrac{5}{2}\,h,$$

also:

$$F = 5{,}775\,h^2,$$
$$h = 0{,}416\,\sqrt{5},$$
$$b = 0{,}312\,\sqrt{5},$$
$$l = 1{,}040\,\sqrt{5}.$$

Der Wasserspiegel soll übrigens etwas höher stehen, und durch die Auflagerung des Kessels geht auch ein Theil der Heizfläche verloren. Es ist diesen Zahlen also etwas zuzusetzen.

II. Für den Walzenkessel ohne Siederöhren und mit äusserer Feuerung sei wieder der Dampfraum 0,4 des ganzen Raumes. Dem erstern entspricht ein Centriwinkel von 133½ Grad, also dem Wasserraume 226½ Grad, der dazu gehörige Bogen ist 3.953 für den Halbmesser 1, also wenn r der Halbmesser, l die Länge des cylindrischen Kessels ist, so beträgt die Heizfläche:

$$F_1 = 3{,}953\, rl.$$

Hierzu kommt jedoch noch der kugelförmige Theil. Ist h die Höhe des betreffenden Segments, so ergibt sich dafür:

$$F_2 = 2{,}06\,\pi r^2 \left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right],$$

also:

$$F = F_1 + F_2$$

ist die ganze Heizfläche. Gewöhnlich nimmt man:

$$l = 8r \text{ bis } 12r,$$

also im Mittel:

$$l = 10\, r,$$

dann ist:

$$F = 43{,}33\, r^2 \left[1 + 0{,}1 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right].$$

und der Halbmesser:

$$r = \sqrt{\frac{F}{43{,}33 \left[1 + 0{,}1 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right]}},$$

oder einfacher:

$$r = 0{,}152 \left[1 - 0{,}05 \left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \sqrt{F}.$$

Bei ebenen Endflächen ist $\frac{h}{r} = 0$, bei halbkugelförmigen $\frac{h}{r} = 1$. Aus den obigen Gründen sind diese Zahlen etwas zu vergrössern.

III. Bei Walzenkesseln mit Sicderöhren wird gewöhnlich die letztere ganz, die erstere halb von der Feuerluft umspielt. Sind also r, l und r_1, l_1 Radius und Länge des Kessels und bezüglich der Siederöhren. n die Anzahl der letzteren, so ist:

$$F = \pi (rl + 2n\, r_1\, l_1).$$

Gewöhnlich ist:

$$n = 2, \quad r_1 = 0{,}4\, r, \quad l = l_1 = 10\, r,$$

also:

$$F = 26\,\pi r^2,$$

$$r = 0{,}1106 \sqrt{F},$$

$$r_1 = 0{,}04424 \sqrt{F}.$$

Der Dampfraum ist hier 0,38 des Fassungsraumes.

IV. Bei Kesseln mit innerer Heizung ist die ganze innere Fläche Heizfläche.

Wenden wir uns zur Dicke der Kesselwand.

Sei e die Röhrenstärke, p ist der Ueberdruck von innen nach aussen in Atmosphären.

In Frankreich ist die gesetzliche Kesselwanddicke in Millimetern:

$$e = 18\, p\, d + 3,$$

wo e der Durchmesser in Metern ist. In Preussen ist die Formel vorgeschrieben, wenn Zolle für e und d vorausgesetzt sind:

$$e = 0{,}0015\, p\, d + 0{,}1,$$

oder wenn die Verhältnisse grössere Genauigkeit erfordern:

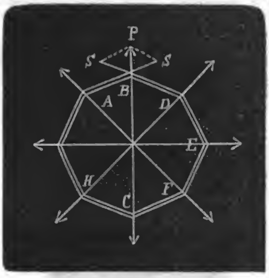
$$e = (2{,}71828^{0{,}003\, p} - 1)\, r + 0{,}1.$$

Dem Theil, wo r der Radius ist, den das Feuer berührt, wird oft noch grössere Dicke gegeben.

Man kann aber diese Formeln auch leicht auf theoretischem Wege ableiten.

Der Durchschnitt des Kessels wird als Polygon $ABDE$ . . . (Fig. 48) gedacht,

Fig. 48.



auf jeder Kante wirkt dann der Ueberschuss der Spannung P radial. Um die auf Zerreissen der Kesselwand verrichtete Kraft zu ermitteln, zerlegen wir P nach den Seiten. Ist dann:

$$BCA = BCD = \alpha$$

der zugehörige Centriwinkel, so kommt:

$$S = \frac{P \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \alpha},$$

oder da P sehr klein ist:

$$S = \frac{P}{\alpha}.$$

Nimmt man den Ueberdruck p auf den Zoll des Durchschnitts, und ist s die Polygonseite, so wird:

$$P = s\, p,$$

aber:

$$s = 2r \sin\frac{\alpha}{2} = r\alpha,$$

und:

$$S = pr.$$

Der Tragmodul T ist nun proportional dem Radius, und umgekehrt proportional der Dicke, also:

$$e = \frac{rp}{T}.$$

r bezeichnet hier den mittleren Durchmesser des Kessels. Sei ϱ der innere, so ist:

$$e = \frac{p\left(\varrho + \frac{r}{2}\right)}{T},$$

oder annähernd:

$$e = \frac{p\varrho}{T}\left(1 + \frac{p}{2T}\right).$$

Aus der ersten Formel sind die beiden zuerst genannten entstanden, indem eine dem Gewichte des Kessels und des darin enthaltenen Wassers entsprechende kleine Constante hinzugefügt ist. Für grössere Blechdicken wird diese Formel meist falsch.

Ist dann (Fig. 49) $AB = e$ die Kesselstärke.

Fig. 49.



Damit diese sich nicht durch den inneren Druck ändere, ist anzunehmen, dass jede der concentrischen Schalen, aus welchen sie besteht, sich gleichviel ausdehne. Set λ diese Ausdehnung, $x = CO$ der Halbmesser einer Schale, so ist ihre Spannung auf die Einheit des Durchschnittes:

$$\frac{\lambda \varepsilon\, dx}{2\pi x}.$$

(ε der Elasticitätscoefficient.) Also für sämmtliche concentrische Schalen:

$$S = \frac{\lambda\varepsilon}{2\pi}\int_r^{\varrho}\frac{dx}{x} = \frac{l\varepsilon}{2\pi}\lg\frac{\varrho}{r}.$$

r ist der innere, ϱ der äussere Halbmesser. Für die innere Wand ist die Spannung T also:

$$\frac{\lambda}{2\pi r}\varepsilon = T,$$

d. h.:

$$S = r\,T \lg\frac{\varrho}{r} = rp,$$

$$\frac{\varrho}{r} = 2{,}718\ldots^{\frac{p}{T}}.$$

Setzt man noch:

$$\varrho = r + e,$$

so kommt:

$$e = r\left(2{,}718\ldots^{\frac{p}{T}} - 1\right),$$

was mit der letzten Formel übereinstimmt. Etwas genauer ergibt sich:

$$e = \frac{rp}{T}\left(1 + \frac{p}{2T}\right).$$

Lamé und Rankine setzen dagegen:

$$e = r\left(\sqrt{\frac{T+p}{T-p}} - 1\right).$$

Gusseiserne Sideröhren werden nach französischer Vorschrift fünfmal dicker gemacht als schmiedeeiserne oder kupferne. Die preussische Vorschrift ist durch die Formeln gegeben:

$$e = (0{,}005\,pd + \tfrac{1}{3})\ \text{Zoll},$$

oder bei genaueren Bestimmungen:

$$e = (2{,}71828^{0{,}01\,p} - 1)r + \tfrac{1}{3}.$$

Ueber $\frac{1}{2}$ Zoll wird die Dicke nicht gern gesteigert, man wendet also lieber engere Kessel an. Das französische Gesetz verbietet Dicken über $1\frac{1}{2}$ Centimeter = 7 Linien, um Ungleichheit der Spannungen zu vermeiden.

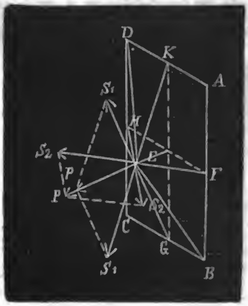
Cylindrische Dampfkessel werden durch Segmente einer Kugel oder eines Sphäroides begrenzt, es ist also auch die Stärke dieser Wandtheile zu bestimmen.

Man kann sich dieselbe als Polyeder denken, deren Begrenzungstheile aus je 4 Dreiecken bestehen, die in einer Ecke E zusammenstossen (Fig. 50). Sei eine solche durch ein ebenes Rechteck $ABCD$ geschnitten, $AB = CD = s_1$, $AD = BC = s_2$, p der Druck auf die Flächeneinheit, so ist der auf die ganze Ecke:

$$P = s_1\, s_2\, p,$$

und derselbe wird zerlegt in zwei, P_1 und P_2, wovon P_1 der Spannung S_1

Fig. 50.



zwischen den Dreiecken *ADE* und *BCE*, S_2 der zwischen *ABE* und *CDE* Gleichgewicht hält, und man erhält leicht:

$$P_1 = \alpha_1 S_1, \quad P_2 = \alpha_2 S_2,$$

wo α_1, α_2 die unendlich kleinen Supplemente der Winkel sind, welchen die Dreieckpaare *ADE* und *BCE*, sowie *ABE* und *CDE* mit einander machen, also:

$$P = s_1 s_2 p = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2.$$

Sind r_1 und r_2 die Halbmesser der durch *GEK* und *FEH* gelegten Kreise, zweier auf einander senkrechten Krümmungskreise, so kommt:

$$\alpha_1 = \frac{s_1}{r_1}, \quad \alpha_2 = \frac{s_2}{r_2}.$$

Ist *S* die auf die Flächeneinheit reducirte Spannung, so ist für Wanddicke e_1 und Breite s_2:

$$S_1 = e_1 s_2 S,$$

und für Breite s_1:

$$S_2 = e_1 s_1 S,$$

also:

$$s_1 s_2 p = e_1 s_1 s_2 S \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Für *S* kann der Tragmodul *T* gesetzt werden, und es folgt:

$$p = e_1 T \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ ist die Summe der beiden Hauptkrümmungen.

Für Sphäroide von der Höhe *h* kann man annähernd:

$$r_1 = r_2 = \frac{r^2}{h}$$

setzen, und erhält:

$$e_1 = \frac{p r^2}{2 T h}$$

für die Halbkugel, wo $h = r$ ist:

$$e_1 = \frac{pr}{2T} = \frac{e}{2}.$$

Endlich handelt es sich um die Stärke der Rauchröhre, welche den Dampf von aussen nach innen drückt.

Denken wir uns wieder den Durchschnitt als Polygon (Fig. 51), in der Ecke *A* wirke Kraft *P* von aussen nach

Fig. 51.



innen, und zerlegen sie nach den beiden angrenzenden Seiten, so kommt wie oben:

$$S = \frac{P}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{P}{\alpha},$$

und da:

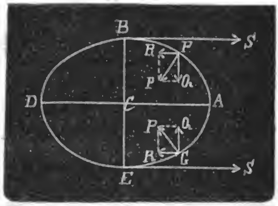
$$P = \alpha r l p, \quad S = r l p = e l T,$$

$$e = \frac{rp}{T},$$

ganz wie oben. Der Festigkeitsmodul des Schmiedeeisens gegen das Zerreissen ist übrigens beinahe doppelt so gross, wie der gegen das Zerdrücken, es brauchte also die Rauchröhre nur die doppelte Dicke des von innen gedrückten Kessels zu haben. Jedoch würde dies nur richtig sein, wenn die Kreisform genau wäre. Die Erfahrung aber zeigt, dass sich dergleichen Röhren leicht platt drücken.

Sei nämlich *ABDE* (Fig. 52) eine Röhre mit elliptischem Querschnitt. Der auf jeden Punkt *F* wirkende Druck übt eine Wirkung auf Zerbrechen aus, welche die Festigkeit in *A* aufheben muss. Seien *a* und *b* die Halbaxen der Ellipse. Denke man sich den Druck auf die vier

Fig. 52.



Punkte A, B, D, E vertheilt, und suchen wir den in A dem Zerbrechen entgegenzustellenden Widerstand.

Der auf den Zoll des Querschnitts reducirte Druck sei p. Da derselbe normal wirkt, so ist der Druck in dem beliebigen Punkte F auf das Element ds gleich $p\,ds$, und zerfällt nach den Richtungen AC und CB in die Componenten:

$$p\,ds\,\frac{dy}{ds},\quad p\,ds\,\frac{dx}{ds},$$

d. h.:

$$p\,dy \quad \text{und} \quad p\,dx.$$

Sei τ die Spannung in A, τ' die in B, so ist die erstere parallel AC, die letztere parallel BC gerichtet. Da man nun annehmen muss, dass alle Drucke, welche auf den Quadranten AB wirken, durch diese Spannungen vernichtet werden, so ist:

$$\tau = \int_0^a p\,dy,\quad \tau' = \int_0^b p\,dx,$$

$$\tau = p\,a,\quad \tau' = p\,b,$$

In Punkt B wirkt aber auch die vom Quadranten BD herrührende Spannung $-p\,b$. Es handelt sich jetzt um den auf Zerbrechen wirkenden Druck in Punkt A. Denkt man sich diesen Punkt fest, so kommen die Momente der in dem Punkte von AB wirkenden Kräfte in Betracht; diese Momente sind bezüglich:

$$\int p\,y\,dy,\qquad p\,(a-x)\,dx,$$

also ihre Summe:

$$\int_0^b py\,dy + \int_0^a p\,(a-x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}p\,(b^2+a^2),$$

wozu noch das Moment:

$$-p\,b^2$$

der in B wirkenden Spannung $-p\,b$ kommt, also das Gesammtmoment:

$$\tfrac{1}{2}p(a^2-b^2).$$

Ist e die Kesselstärke in A, so ist das Moment derselben $\int_0^e \tau\,e\,de$. Da aber die Abhängigkeit von τ in Bezug auf e nicht bekannt ist, so setzt man diesen Ausdruck gleich Te^2, wo T wieder ein Erfahrungscoefficient ist. Man erhält also:

$$Te^2 = \frac{p\,(a^2-b^2)}{2},\quad e = \sqrt{\frac{p\,(a^2-b^2)}{2T}}.$$

Der Druck von innen nach ausser würde Gleiches ergeben, jedoch tritt hier kein Zusammendrücken ein, im Gegentheil, die Form wird der Cylindergestalt wieder zugeführt.

Fairbairn findet, dass auch die Länge l der Röhre einen Einfluss habe, und setzt daher:

$$e = \mu\,\sqrt{p\,dl},$$

wo μ eine vom Tragmodul abhängige Grösse, d der Durchmesser ist.

In Frankreich ist Vorschrift, dass die dem äussern Druck ausgesetzten Röhren doppelt so dick sind, als die dem innern ausgesetzten.

In Preussen gilt gesetzlich für Rauchröhren von Eisenblech die Form:

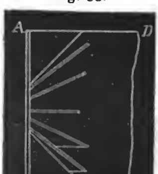
$$e = (0{,}0067\,d\,\sqrt[3]{p} + 0{,}05)\ \text{Zoll},$$

für Messingblech:

$$e = (0{,}01\,d\,\sqrt[3]{p} + 0{,}07)\ \text{Zoll}.$$

Ebene Kesselwände können nur einen weit geringeren Druck als gewölbte aushalten. Daher sind sie nur bei niederm Dampfdruck anwendbar, und sind bei grösserer Ausdehnung zu verankern oder (Fig. 53) mit triangulären Blechzwickeln

Fig. 53.



a, b, c, d zu verstärken. Sei $ABCD$ eine Blechtafel, $AB = l$, $AD = b$, von einem Rahmen eingefasst, auf die Flächen-

einheit wirke Druck p. Dies Blech zerlegen wir in Längenstreifen, und nehmen an, dass der Theil p_1 des Druckes auf die Spannung dieser Streifen verwendet werde. Ist s die Breite eines solchen, d die Dicke, so findet man, wenn man die Momente gleich setzt:

$$e^2 T = \int_0^l p_1 \, l \, dl = p_1 \frac{l^2}{2},$$

und wenn man die Tafel auch in Breitenstreifen zerlegt:

$$e^2 T = p_2 \frac{b^2}{2},$$

$$p_1 + p_2 = p.$$

Die Durchbiegungen dagegen verhalten sich (vergleiche den Artikel: Festigkeit) bezüglich wie $\frac{l^4 p_1}{e^3}$ und $\frac{b^4 p_2}{e^3}$, und da dieselben gleich sind:

$$l^4 p_1 = b^4 p_2,$$

also:

$$p_2 = \frac{l^4}{b^4} p_1,$$

$$p_1 (l^4 + b^4) = b^4 p,$$

also nach den beiden Voraussetzungen:

$$2 e^2 T = p_1 l^2 \text{ und } 2 e^2 T = p_2 b^2$$

bezüglich:

$$e = b \sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4} \frac{p}{2T}},$$

$$e = l \sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4} \frac{p}{2T}},$$

von diesen Werthen ist immer der grössere zu nehmen.

Für quadratische Bleche ist:

$$l = b, \qquad e = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{p}{T}}.$$

Es ergab sich für cylindrische Kessel:

$$e = \frac{dp}{2T} = (0{,}0015 \, p \, d + 0{,}1) \text{ Zoll},$$

also mit Vernachlässigung des zweiten Gliedes:

$$\frac{1}{2T} = 0{,}0015,$$

und dies in unsere Formel gesetzt:

$$e = 0{,}03876 \sqrt{\frac{l^2 b^2}{l^4 + b^4} p} \text{ Zoll}$$

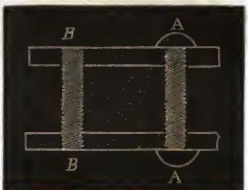
für ebene Kesselwände,

$$e = 0{,}036 \sqrt{p} \text{ Zoll}$$

für quadratische.

Bei Dampfwagen und Dampfschiffen kommen Hochdruckmaschinen mit ebenen Kesselflächen vor. Hier müssen Verankerungen angewendet werden. Die parallelepipedischen Feuerkästen der Lokomotiven werden aus zwei in einander steckenden Blechbüchsen zusammengesetzt, deren Zwischenraum mit dem Wasserraum des Kessels communicirt. Diese Einrichtung ist besonders geeignet, um möglichst viel Wärme zur Dampferzeugung zu verwenden. Das den Zwischenraum füllende Wasser drückt mit derselben Kraft p wie der entgegenwirkende Dampf auf die Wände der Kästen; dieselben sind also durch Anker oder Stehbolzen zu verbinden. Der innere (eigentliche) Feuerkasten besteht aus Kupferblech, gewöhnlich von $\frac{3}{8}$ Zoll Dicke, während der äussere auch aus Eisenblech angefertigt wird. Der Zwischenraum beträgt 3 bis 4 Zoll, die eisernen oder kupfernen Stehbolzen 4 bis 5 Zoll von einander entfernt, und haben $\frac{3}{4}$ Zoll mittlerer Dicke. Die Tragkraft eiserner Platten mit eisernen Bolzen ist nach Fairbairn etwa doppelt so gross, als wenn beides von Kupfer ist; auch ist die der Bolzen mit Köpfen (Fig. 54)

Fig. 54.



A, A um $\frac{1}{4}$ grösser als derjenige ohne solche B, B.

Das durch Stehbolzen unterstützte Blech kann man sich nun in Streifen zerlegt denken, welche parallel der Diagonale der von je vier Stehbolzen gebildeten Quadrate sind, und es gilt dann wieder die Formel:

$$e = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{p}{T}}$$

wo statt b die Diagonale $a\sqrt{2}$ zu setzen ist, wenn a die Seite ist. Also

$$e = \sqrt{\frac{p}{2T}}$$

und für $\frac{1}{2T} = 0{,}015$:

$$e = 0{,}0387\, a\sqrt{p} \text{ Zoll.}$$

Diese Formel findet auch Brix.

Der Stärke der innern Wände, die dem Feuer zugekehrt sind, setzt man noch $\frac{1}{8}$ zu.

Die Stärke d eines Stehbolzen, der den Druck $a^2 p$ auszuhalten hat, ist gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{\pi d^2 T}{4} = a^2 p$$

$$d = a\sqrt{\frac{4p}{\pi T}},$$

also wenn für T sein Werth gesetzt wird:

$$d = 0{,}0619\, a\sqrt{p}.$$

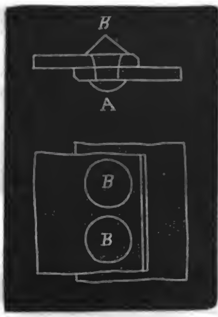
Brix setzt:

$$d = (0{,}069\, a\sqrt{p} + 0{,}125) \text{ Zoll.}$$

Die Decke des Feuerkastens besteht aus einer einfachen Platte, und wird durch eiserne Tragstäbe gestützt. Ihre Stärke ist nach den Formeln der relativen Festigkeit zu bestimmen (vergl. Festigkeit).

Die ebene und krummflächige Verbindung der Kesselbleche durch Niete (Fig. 55)

Fig. 55.



ist noch zu bestimmen. Ist e die Blechstärke, so ist die des Nietbolzen C:

$$d = 2e,$$

der halbkugelförmige oder Setzkopf A:

$$d_1 = 3e,$$

der kegelförmige oder Schliesskopf B:

$$d_2 = 4e,$$

die Höhe:

$$h_2 = \tfrac{3}{2}\, e,$$

also die Länge des dazu nöthigen Bolzenstückes:

$$l_2 = 2e,$$

der Abstand der Achsen zweier Bolzen von einander:

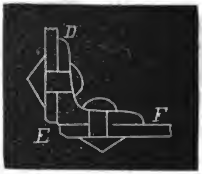
$$a = 5e,$$

der Abstand derselben vom Blechrand

$$a_1 = 3e.$$

Die Winkelverbindung zweier Bleche erfolgt durch ein Winkelblech DEF (Fig. 56) mit zwei Nietreifen. Die mittlere

Fig. 56.



Dicke desselben e ist die der zu verbindenden Bleche, in der Mitte um $\frac{1}{7}$ grösser, am Ende $\frac{1}{7}$ kleiner. Die Breite $ED = EF$:

$$(b = 1 + 4{,}5\, e) \text{ Zoll.}$$

Der zum Dampfkessel gehörige Ofen besteht:

a) aus dem Feuerraume,
b) den Feuerkanälen,
c) dem Schornstein.

Im Feuerraum findet die Verbrennung statt; das Verbrennungsproduct (Feuerluft), Rauch u. s. w. werden durch die Kanäle an den Kessel geführt, und dann durch die Esse entfernt.

Den Feuerraum theilt der Rost in zwei Theile, von denen der untere zur Aufnahme der Asche dient. Der Rost besteht aus Eisenstäben, welche schmale aber nach unten sich erweiternde Spalten zum Durchziehen der Luft und zum Durchfallen der Asche enthalten. Bei Steinkohlenfeuerung betragen diese Spalten etwa $\frac{1}{2}$ Zoll, bei Holz und Torf $\frac{1}{4}$ Zoll Breite, und nehmen im ersten Falle $\frac{1}{4}$, im zweiten $\frac{1}{6}$ der Rostfläche ein. — Bei Schüttelrosten, welche jedoch nur zu kleinen Anlagen dienen, sind die Stäbe cylindrisch und können in schwingende Bewegung gesetzt werden behufs der Entfernung der Asche. Die Grösse der Rostfläche soll nach Cave $\frac{1}{17}$ der Heizfläche des Kessels betragen. Auch wird auf den Verbrauch von 14 Pfund Stein-

kohle für die Stunde, oder 73 Pfund Holz ein Quadratfuss Rostfläche berechnet.

Bei Dampfwagen aber, wo ein künstlicher Luftzug stattfindet und Coaks verbrannt wird, ist die Rostfläche $\frac{1}{50}$ bis $\frac{1}{60}$ der Heizfläche.

Bei Steinkohlenfeuer soll die Rostfläche 13 bis 18 Zoll unter der Kesselfläche liegen, bei Holzfeuer 18 bis 24 Zoll. Der Aschenraum muss wenigstens $2\frac{1}{2}$ Fuss tief sein; die zur Verbrennung nöthige Luft tritt durch eine Thür in den Aschenraum, und von hier durch den Rost in den Feuerraum. Zur Regulirung des Luftzuges bringt man ein Register (Schieber) an, auch kann die Luft durch einen unterirdischen Gang (Anzucht) zugeführt werden. Auch der Feuerraum hat eine Thür, welche nur geöffnet wird, um das Feuer zu schüren, den Rost zu reinigen und Brennmaterial einzuführen. Die Thür hat oft doppelte Wände und ist von innen mit Backsteinen bekleidet, um Wärme zu sparen.

Da als Rauch unverbrannte Kohlentheile weggeführt werden, also Wärme vergendet wird, so ist eine möglichst rauchfreie Verbrennung zu erzielen. Dazu dient sorgfältige Unterhaltung des Feuers, nicht zu grosse Häufung des Brennmaterials, reichliche Hinzuführung der Luft.

Ein gutes Mittel sind auch die Doppelheerde. Dieselben sind durch eine Scheidewand in zwei Theile getheilt, welche mit demselben Feuercanal communiciren, das Brennmaterial wird abwechselnd in die eine und die andere Abtheilung geworfen, und der Rauch, welcher bei dem Aufschütten entsteht, strömt mit den durch vollständige Verbrennung gebildeten Gasen der andern Abtheilung, gemischt mit athmosphärischer Luft durch die Züge, wo der Rauch vollständig verbrennt.

Zweckmässig sind auch Luftkanäle, die unmittelbar hinter der Feuerbrücke einmünden. Die Luft derselben vermengt sich beim Eintritt in die Züge mit dem Rauch der Feuergase, und derselbe kommt zur Verbrennung. Der Querschnitt solcher Kanäle soll $\frac{1}{15}$ der Rostfläche betragen. Nach Fairbairn wird hierbei $2\frac{1}{2}$ % des Brennmaterials erspart.

Auch Treppenroste werden angewandt, welche statt der Roststäbe aus 8 Zoll breiten Eisenplatten bestehen, die stufenförmig in Absätzen von $1\frac{1}{2}$ bis $2\frac{1}{2}$ Zoll übereinander angebracht sind, und etwa 2 Zoll übereinander übergreifen. Sie dienen, um den Zutritt der athmosphärischen Luft zu erleichtern, wenn das Brennmaterial geringerer Art ist; man ersetzt sie auch durch schiefe Roste.

Um das Feuer dem Kessel recht nahe zu führen, und eine innigere Berührung der Luft zu erzielen, muss eine Feuerbrücke an der Uebergangsstelle aus dem Feuerraum in die Feuerkanäle angebracht werden. Es ist dies eine Mauer, welche nur noch 4 bis 6 Zoll Zwischenraum bis zum Kesselboden lässt. Es tritt hier also eine Verengung des Feuerkanals, und also eine nähere Berührung der Luft ein.

Von Feuerkanälen ist oft nur einer vorhanden, welcher ein oder mehrere Male um oder durch den Kessel geht, oft leiten mehrere jeder einzeln den Rauch in den Schornstein. Letzteres findet namentlich bei Feuerungen von innen, also z. B. bei Dampfwagen statt. Ist die Länge geringer, so muss der Querschnitt grösser sein. Soll also ein Kanal von Länge l und Weite d durch n andere von Länge l_1 und Weite d_1 ersetzt werden, so muss sein:

$$\pi d l = n \pi d_1 l_1, \quad \pi d^2 = n \pi d_1^2,$$

$$d_1 = \frac{d}{\sqrt{n}}, \quad l_1 = \frac{l}{\sqrt{n}}.$$

Ist nur ein Kanal vorhanden, so besteht er aus Blechröhren, bei mehreren nimmt man feuerfeste Steine, und gibt ihnen ungefähr achteckigen Querschnitt. Dieser hat $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{6}$ mal so viel Inhalt als die Rostfläche. Die Länge der Züge soll nicht über 90 Fuss betragen. Am Ende des Kanals ist eine Thür oder ein Schieber zum Reguliren des Feuers und völligem Schliessen des Ofens. Die ganze Feuerungsanlage umgibt eine starke Mauer (Rauchgemäuer).

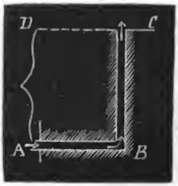
Der Schornstein führt hauptsächlich den nöthigen Luftwechsel herbei, er muss hinreichend hoch und weit sein. Geht dies nicht an, so ist künstlicher Luftzug nothwendig. Dies geschieht bei Dampfwagen durch Ausströmen des verbrauchten Dampfes durch die Esse, sonst dienen Luft- oder Wettermaschinen zu diesem Zwecke.

Essen werden gewöhnlich aus Ziegeln oder Eisenblech angefertigt. Im ersten Fall ist ihre äussere Gestalt die einer vier- oder achtseitigen Pyramide, im letzterem die eines abgestumpften Kegels. Die äussere Böschung beträgt für den Fuss Höhe 0,015 bis 0,025, oben hat die Mauer die gewöhnliche Ziegelbreite 6 Zoll, unten die zwei- bis dreifache. Die Höhe ist desto geringer, je grösser die Weite ist. Aber auch die Temperatur des eintretenden Rauchs bestimmt die Dimen-

sionen; je niedriger nämlich letztere ist, je grösser sind letztere. Die gewöhnliche Höhe ist 60 bis 120 Fuss, zuweilen 3 bis 400 Fuss, selten niedriger als 40 Fuss.

Der Schornstein soll gleichen Querschnitt mit den Feuerkanälen haben und besonders gut fundamentirt sein. Die Bewegung des Rauches in der Esse ist leicht zu bestimmen. Sei γ die Dichtigkeit der äussern Luft, h die Höhe AD des Schornsteins (Fig. 57) sammt Luft-

Fig. 57.



zuführungskanal, so ist der Ueberschuss des Druckes auf die Einmündung A über die Ausmündung C:

$$q = h\gamma.$$

Demselben entgegen wirkt der Druck q_1 der warmen Luftsäule, deren Dichtigkeit γ_1 sein möge, und daher ist der Druck, welcher die Ausflussgeschwindigkeit des Rauches erzeugt:

$$q - q_1 = h(\gamma - \gamma_1),$$

und wenn diese Geschwindigkeit selbst v ist:

$$\frac{v^2\gamma_1}{2g} = h(\gamma - \gamma_1), \quad v = \sqrt{\frac{2gh(\gamma - \gamma_1)}{\gamma_1}}.$$

(Vergl. den Artikel Statik, flüssige Körper.) Hier ist jedoch auf die Nebenhindernisse keine Rücksicht genommen.

Sei t die mittlere äussere, t_1 die mittlere innere Temperatur, so hat man:

$$\gamma = \frac{0{,}00568\,p}{1 + 0{,}00367\,t},$$

$$\gamma_1 = \frac{0{,}00568\,p_1}{1 + 0{,}00367\,t_1},$$

wo p und p_1 die entsprechenden Barometerhöhen anzeigen, als:

$$\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{1 + 0{,}00367\,t}\,\frac{p}{p_1}.$$

Wegen der mässigen Geschwindigkeit des Rauches sind jedoch p und p_1 ziemlich gleich, und daher zu setzen:

$$p = p_1$$

$$v = \sqrt{2gh\left(\frac{1 + 0{,}00367\,t_1}{1 + 0{,}00367\,t} - 1\right)},$$

oder:

$$v = \sqrt{\frac{0{,}00367\,(t_1 - 1)}{1 + 0{,}00367\,t}\,2gh},$$

d. h. annähernd:

$$v = \sqrt{0{,}00367\,(t_1 - t)\,2gh}$$
$$= 0{,}479\sqrt{h\,(t_1 - t)}\ \text{Fuss}.$$

Was die Hindernisse anbetrifft, so ist der Druckhöheverlust wegen der Reibung:

$$h_1 = \zeta\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g},$$

wo l die Länge, d die Weite des Schornsteins und die Berechnung $\zeta = 0{,}024$ ergibt. Jedoch setzt Péclet:

$$\zeta = 0{,}0025 \cdot 19{,}62 = 0{,}049$$

für mit Russ überzogene Schornsteine. Die übrigen Druckhöheverluste sind durch den Erfahrungscoefficienten:

$$\zeta_1 = 12,$$

nach Péclet zu bestimmen, also:

$$\frac{v^2}{2g} = 0{,}00367\,(t_1 - t)2 - 0{,}05\frac{l}{d}\,\frac{v^2}{2g} - 12\,\frac{v^2}{2g},$$

$$\frac{v^2}{2g}\left(13 + 0{,}05\,\frac{l}{d}\right) = 0{,}00367\,(t_1 - t)\,h.$$

Uebrigens ist die halbverbrannte Luft im Schornstein 1,044 mal so dicht als die frische Luft. Dafür ist zu setzen:

$$v = \sqrt{\frac{0{,}00367\,(t_1 - t)\,2gh}{1{,}044\left(13 + 0{,}05\,\frac{l}{d}\right)}},$$

$$v = 0{,}47\sqrt{\frac{(t_1 - t)\,hd}{13d + 0{,}05\,l}}\ \text{Fuss}.$$

Hiernach lassen sich die Dimensionen einer Esse bestimmen, welche ein gewisses Luft- oder Rauchquantum Q in der Secunde abführen soll. Sei S der Querschnitt, so hat man in Cubikfussen:

$$Q = Sv = 0{,}47\,S\sqrt{\frac{(t_1 - t)\,hd}{13d + 0{,}05\,l}},$$

und in Quadratfusssen:

$$S = 2{,}13\,Q\sqrt{\frac{13d + 0{,}05\,l}{(t_1 - t)\,hd}},$$

ist der Querschnitt kreisförmig:

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\sqrt{d^5} = 2{,}13 \frac{4}{\pi} Q \sqrt{\frac{13d + 0{,}05\,l}{(t_1 - t)h}},$$

$$d = 1{,}49 \sqrt[5]{\frac{13d + 0{,}05\,l}{(t_1 - t)h} Q^2},$$

unter der Wurzel muss hier für d ein angenäherter Werth gesetzt werden.

Bei quadratischen Essen ist

$$S = d^2,$$

$$d = 1{,}353 \sqrt[5]{\frac{13d + 0{,}05\,l}{(t_1 - t)h} Q^2}.$$

Nimmt man im Durchnitt:

$$t_1 - t = 290^\circ,\ l = 100d,$$

so kommt:

$$S = 2{,}13\, Q \sqrt{\frac{18}{290h}} = 0{,}531 \frac{Q}{\sqrt{h}} \text{ Quadratfuss.}$$

Sei jetzt K das stündlich verbrannte Kohlenstoffquantum, und setzt man voraus, dass jedes Pfund davon 600 Cubikfuss abzuführendes Gas gibt, so ist:

$$Q = \frac{600\,K}{60^2} = \frac{K}{6},$$

$$S = 0{,}885 \frac{K}{\sqrt{h}},$$

$$h = 0{,}00783 \left(\frac{K}{S}\right)^2 \text{ Fuss.}$$

Ist F die Hauptfläche

$$S = \frac{F}{50},\ K = 2F,$$

so hat man also:

$$h = 0{,}00783\,(100)^2 = 78{,}3 \text{ Fuss,}$$

in der That beträgt dieselbe 60 bis 120 Fuss.

Aber auch aus den nöthigen Stabilitätsbedingungen lässt sich eine Formel für die Essenhöhe herleiten.

Habe der gegen die Esse stossende Wind die Geschwindigkeit c, die Dichtigkeit γ, ist h die Höhe, b die mittlere äussere Breite des Schornsteins, so ist die Stärke des Windstosses:

$$P = \frac{3c^2}{2g} bh\gamma,$$

(vergl. den Artikel Windrad) und das Moment dieser Kraft in Bezug auf eine Kante am Fusse der Esse:

$$\frac{Ph}{2} = \frac{3c^2}{2g} \frac{bh^2}{2} \gamma.$$

Ist e die mittlere Dicke der Wände, γ_1 die Dichtigkeit der Mauer, so ist das Gewicht der Esse:

$$G = 4(b - e)eh\gamma_1,$$

also das Moment derselben:

$$\frac{Gb}{2} = \frac{4(b-e)ehb\gamma_1}{2} = 2\left(1 - \frac{e}{b}\right) eh b^2 \gamma_1,$$

die Gleichheit beider Momente gibt:

$$\frac{sc^2}{2g} \frac{bh^2}{2} \gamma = 2\left(1 - \frac{e}{b}\right) eh b^2 \gamma_1,$$

$$\frac{h}{b} = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{e}{b}\right) \frac{2ge\gamma_1}{c^2\gamma}.$$

Diese Formel gilt aber nur für quadratischen Querschnitt; bei kreisförmigen macht man $\frac{h}{b}$ um die Hälfte grösser:

$$\frac{h}{b} = 2\left(1 - \frac{e}{b}\right) \frac{2ge\gamma_1}{c^2\gamma},$$

für achteckige nimmt man den Mittelwerth:

$$\frac{h}{b} = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{e}{b}\right) \frac{2ge\gamma_1}{c^2\gamma}.$$

Es ist jetzt der Wirkungskreis der Dampfkessel zu bestimmen. Nach Péclet ist die mittlere Temperatur t_1 in der Esse gleich 300° zu setzen; diejenige t_2, welche die Luft im Brennheerde bei der Verbrennung annimmt, ergibt sich aus der Wärmemenge W eines Pfundes Brennstoff, aus der Luftmenge V (in Cubikfuss), welche das letztere erfordert. Ist die Wärmecapacität der Luft gleich $\frac{1}{4}$ (die des Wassers als Einheit genommen) das Gewicht eines Cubikfusses γ derselben gleich 0,0865, so hat man:

$$W = \frac{3}{4} \cdot 0{,}086\, V(t_2 - t_0),$$

$$t_2 = 46{,}5 \frac{W}{V} + t_0,$$

t_0 ist die Temperatur der zutretenden Luft. Der Wärmeverlust durch das Fortgehn der Wärme in der Esse ist:

$$W_1 = \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} W.$$

Im Mittleren kann man $W = 6000$ Calorics, $V = 225$ Cubikfuss, $t_0 = 0^\circ$ nehmen, also:

$$t_2 = \frac{46{,}5 \cdot 6000}{225} = 1240^\circ,$$

der Wärmeverlust durch den Abzug in die Esse ist dann:

$$W_1 = \frac{300}{1240} W = 1450 \text{ Calorics,}$$

also etwa $\frac{1}{4}$ der erzeugten Wärme.

Setzt man das zur Dampferzeugung verwendete Wärmequantum proportional der

Temperaturdifferenz, so kann auch die Temperatur t_1 beim Eintritt in die Esse ermittelt werden. z sei die Temperatur an irgend einer Stelle des Zuges, Y die Grösse der Heizfläche bis zu dieser Stelle, k die Wärmemenge, welche für den Quadratfuss Heizfläche bei 1° Temperaturdifferenz in der Secunde auf das Wasser des Kessels übertragen wird, so wird bei der Temperaturdifferenz $z-t$ dem Elemente dY mitgetheilt die Menge:

$$k(z-t)\,dY = -\omega V\gamma\,dz,$$

wo ω die Wärmecapacität der Luft ist.

$$Y = -\omega\frac{V\gamma}{k}\int\frac{dz}{z-t} = -\frac{\omega V\gamma}{k}\lg(z-t) + \text{const.}$$

Für $Y=o$ ist $z=t_2$, für $Y=F$, $z=t_1$, wo F die ganze Hauptfläche ist, also:

$$F = \frac{\omega V\gamma}{k}\lg\frac{t_2-t}{t_1-t},$$

und die Temperatur beim Eintritt in den Schornstein:

$$t_1 = t + (t_2-t)\,e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}},$$

die nach dem Schornstein abgeführte Wärme:

$$W_1 = \frac{t_1-t_0}{t_2-t_0}W$$

$$= \frac{t-t_0+(t_2-t)\,e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}}}{t_2-t_0}W,$$

also der Wirkungsgrad, d. h. das Verhältniss der vom Kessel aufgenommenen Wärme zur Gesammtwärme:

$$\eta = 1-\frac{W_1}{W} = \frac{t_2-t}{t_2-t_0}\left(1-e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}}\right),$$

oder auch:

$$\eta = \left(1-\frac{t-t_0}{t_2-t_0}\right)\left(1-e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}}\right),$$

und, da $t_2-t_0 = \frac{W}{\omega V\gamma}$:

$$\eta = \left(1-(t-t_0)\frac{\omega V\gamma}{W}\right)\left(1-e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}}\right).$$

Im Mittleren war $t_2-t_0=1200$, also:

$$\eta = \left(1-\frac{t-t_0}{1200}\right)\left(1-e^{-\frac{kF}{\omega V\gamma}}\right).$$

Setzt man noch:

$$\omega\gamma = \tfrac{1}{4}\,0{,}086 = 0{,}0215,$$
$$k = 0{,}0007,$$
$$\frac{F}{V} = \frac{60\cdot 60 f}{22} = 163 f,$$

wo unter f die Hauptfläche verstanden ist, welche stündlich 1 Pfund Dampf gibt, so ist:

$$\eta = \left(1-\frac{t-t_0}{1200}\right)\left(1-e^{-5{,}3 f}\right).$$

Oben werden auf ein Quadratfuss Heizfläche 4 Pfund Dampf gerechnet. Dies gibt:

$$f = 1{,}4$$

also:

$$\eta = 0{,}9(1-e^{-1{,}33}) = 0{,}66.$$

Macht man die Heizfläche aber doppelt so gross, also:

$$f = \tfrac{1}{2},$$

so kommt:

$$\eta = 0{,}81.$$

Nimmt man endlich nur die halbe Heizfläche, also:

$$t = \tfrac{1}{8},$$

so wird:

$$\eta = 0{,}44.$$

Zur Gewinnung einer vortheilhaften Dampferzeugung ist also eine grosse Heizfläche nöthig.

Ist die Temperatur im Dampfkessel

$$t = 140_0,$$

so ist beim Eintritt im Schornstein im ersten Falle:

$$t_1 = t + (t_2-t)\,e^{-1{,}33}$$
$$= 140 + 1060\cdot 0{,}2645 = 420°,$$

im zweiten:

$$t_1 = 239°,$$

im dritten Falle:

$$t_1 = 685°.$$

Es kommen nun noch gewisse Nebenapparate in Betracht, nämlich:

a) die zur Speisung des Kessels mit Wasser nöthigen,

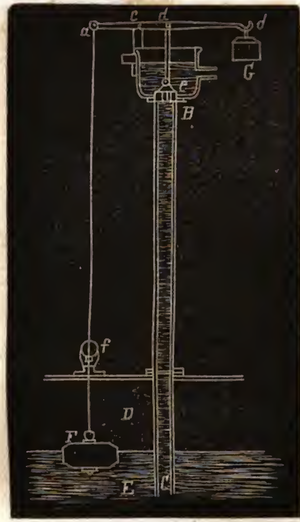
b) die zur Ableitung des Dampfes,

c) die zum Reguliren der Dampferzeugung,

d) die zur Sicherung des Kessels vor dem Zerspringen.

Die Speisung des Kessels muss möglichst gleichmässig geschehn, ferner mit möglichst reinem und warmem Wasser. Durch Röhren im Schornstein wärmt

Fig. 58.

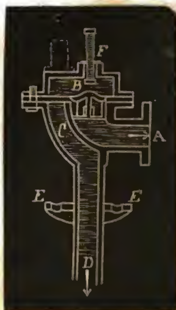


man daher das Wasser oder verwendet einen Theil des Condensationswassers zur Speisung. Bei niederm Druck (¼ bis ½ über die Atmosphäre) so führt ein einfaches Rohr das Wasser in den Kessel, bei höherem wird das Speisewasser durch eine Pumpe hineingedrückt.

Das **Speiserohr** geht durch den Kessel hindurch und endet ½ Fuss über den Boden desselben, möglichst entfernt vom Feuerheerde. Um den Zufluss zu reguliren, wendet man gewöhnlich einen Schwimmer an, der mit dem Wasserspiegel steigt und sinkt (Fig. 58). Es ist *A* der Wasserbehälter, *BC* die etwa 8 Fuss lange Speiseröhre, *D* der vom Dampf, *E* der vom Wasser gefüllte Kesselraum, *F* der aus Kalk oder Sandstein bestehende Schwimmer, der etwas mehr als zur Hälfte ins Wasser taucht, *ab* ein Hebel, der in *C* sich dreht, den Schwimmer und auf der andern Seite das Gewicht *G* trägt, welches den Schwimmer regulirt, so dass es vom Wasser getragen im Gleichgewicht ist; bei *d* ist ein Kegelventil angebracht, welches die Speiseröhre schliesst; sinkt der Schwimmer, so hebt sich das Ventil, es strömt Wasser in die Röhre, beim Steigen des Schwimmers wird letztere geschlossen. Bei *f* ist eine Stopfbüchse zur Bewegung des Kupferdrahtes *a* angebracht. Bei Hochdruckmaschinen setzt sich dem Eindringen des Wasser ein bedeutender Druck entgegen. Man nimmt daher eine Druckpumpe mit Mönchskolben (Speisezunge zu diesem Zweck), die mit einer Speiseröhre in Verbindung steht (Fig. 59). Bei *A* wird das Wasser durch die Pumpe hineingedrückt, bei *B* ist ein Ventil, durch welches es hindurch gehen muss, um in die eigentliche Speisröhre *CD* zu gelangen, bei *EF* setzt dieselbe auf den Kessel auf. Durch eine Schraube *F* in dem Deckel wird der Hub des Ventils *B* regulirt; das letztere schlägt nämlich beim Oeffnen gegen dieselbe an, so dass die Oeffnung vermehrt oder vermindert werden kann. Hier muss der Heizer die Speisevorrichtung reguliren, während es bei der vorhin beschriebenen Vorrichtung der Schwimmer also die Maschine selbst thut.

Vorrichtungen zum Selbstreguliren der

Fig. 59.



Maschinen von hohem Druck sind z. B. bei den Heleschel'schen Dampfkesseln angebracht (Fig. 60). *AB* ist die 6 bis 12 Zoll weite, 10 bis 20 Zoll lange Sieder-röhre, es können jedoch auch mehrere neben einander liegende vorhanden sein. Bei *B* tritt das Speisewasser ein, *C* ist eine horizontale Röhre, worin der bei *A* erzeugte Dampf gesammelt wird. Die warme Luft aus dem Feuerraume umgibt bei ihrer Bewegung die Sieheröhren in dem Kanal *EF* vollständig, welcher letztere unter 24° geneigt ist, und tritt bei *F* in den Schornstein. Der Rost *E* ist um eine horizontale Axe *O* drehbar, und wird durch den oberen Arm des Winkelhebels *K* gestützt. *b* ist eine von den Röhren, welche das Speisewasser den einzelnen Siederöhren zuführen. Dies wird regulirt durch den in Blech gefassten Stein *S*, der in einem gusseisernen Gefässe *D* über dem Speisewasser schwimmt. In Gleichgewicht gehalten wird er durch das Gegengewicht, welches mit ihm an den Doppelhebel *bcd* an verschiedenen Seiten angebracht ist. Der Arm *ce* dieses Hebels ist mit dem Saugeventil der Speisegänge in Verbindung gesetzt.

Sinkt das Wasser in *D*, so sinkt auch *S*, und durch *ce* wird dann das Saugeventil geöffnet und umgekehrt, ganz wie bei der Niederdruckmaschine. Es dient aber derselbe Hebel, eine sehr heftige Dampfentwickelung zu verhindern. Wenn diese nämlich eine gewisse Grenze überschreitet, so hebt das Armende den Arm *DG* eines um *g* drehbaren, mit Gewicht *h* belasteten Winkelhebels *Agi* empor, Stange *il* wird aufgezogen, welche mittelst eines länglichen Gliedes den unteren Arm des Winkelhebels *K* erfasst, der obere Arm dieses Hebels gleitet unter dem äusseren Ende des Rostes weg, dieser, seiner Stütze beraubt, fällt her-

Fig. 60.

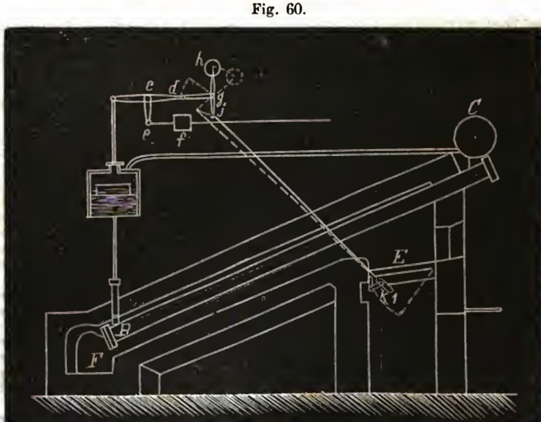
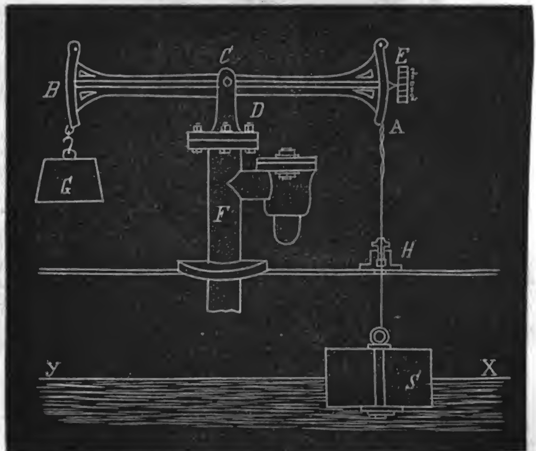


Fig. 61.



unter und schüttet die Kohlen in die Asche hinein.

Dieser Apparat soll nur eine Heizfläche von 4 Quadratfuss für die Pferdekraft erfordern, die Dampferzeugung soll schnell vorgehn und geringere Wartung nöthig machen; indessen steht diesen Vortheilen der Nachtheil gegenüber, dass die Dämpfe bei der geringen Wasserfläche auch viel unverdampftes Wasser mit fortreissen.

Um über den Stand des Wassers im Kessel zu jeder Zeit Auskunft zu haben, wendet man Schwimmer, Probirhähne und Wasserstandsröhren an.

Der S c h w i m m e r auch Schwimmniveau ist ein doppelarmiger Hebel *ABC* (Fig. 61), an dessen einer Seite sich ein steinerner oder eiserner Schwimmer *S*, an der andern ein Gewicht *G* befindet; die Axe *C* ist entweder schneidig oder wird durch 2 Stahlspitzen (Fig. 62) gebildet, welche mittelst einer eingesetzten

Fig. 62.

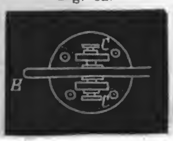


Fig. 63.

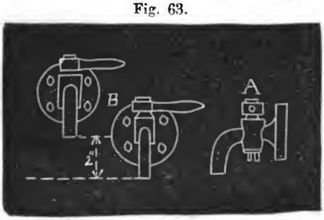
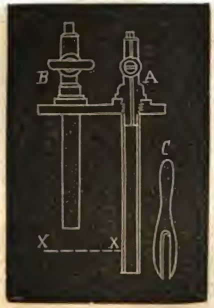


Fig. 64.

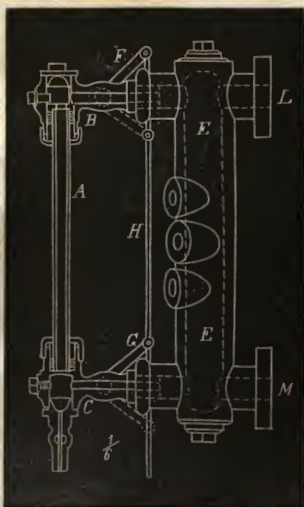


Nuss *AB* erfassen. Das Lager *D* ist auf den Speiseapparat *F* gesetzt. Zeiger *Z* läuft über einer festen Scala *E*, und gibt den Stand des Schwimmers und folglich auch des Wasserspiegels an, *H* ist die Stopfbüchse für den Kupferdrath, welche den Schwimmer trägt.

Mit diesen oft verbunden wird eine Warn- oder Sicherheitspfeife, in welche der Dampf hineinbläst, sobald der Schwimmer zu tief sinkt.

Probirhähne geben den Wasserstand nur dann richtig, wenn die Wallungen des Wassers nicht sehr gross sind, also bei grossen Kesseln und niederm Druck. Man hat stets 2 (selbst 3), die eine 2 Zoll unter dem anderen, eben so viel über der mittleren Wasserhöhe. Bei der Oeffnung des obern muss also Dampf aus dem untern Wasser strömen. Man hat horizontale Hähne, welche an der Stirnfläche (Fig. 63), vertikale, welche an der Decke des Kessels münden. Zu den vertikalen (Fig. 64) *A* und *B* gehört noch der Holzschlüssel *C* zum Oeffnen.

Fig. 65.

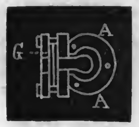


XX ist der Wasserspiegel. Zweckmässiger aber ist die Wasserstandsröhre (Fig. 65). Glasröhre *A* ist mit den metallenen Communikationsröhren *B* und *C* verbunden, von denen die untere im Wasser-, die obere im Dampfraum mündet.

Zwei Hebel *F* und *G*, welche durch die Stange *H* verbunden sind, setzen die Hähne in Bewegung und stellen so die Communikation mit dem Kessel her oder heben sie auf. Die Röhre *EE*, welche bei *L* und *M* in den Kessel mündende Hahnstücke verbindet, trägt noch die Ansatzstücke *K* für 3 Probeventile.

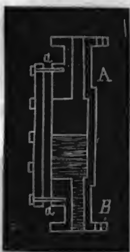
Diese Röhren aber verstopfen sich leicht und werden trüber, sie werden daher oft ersetzt durch den Wasserstandzeiger. Derselbe *AA* ist hier gegeben in hori-

Fig. 66.



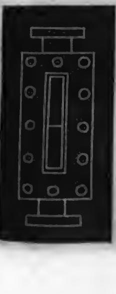
zontalem (Fig 66 und vertikalem Durchschnitt (Fig. 67), so wie in seiner vor-

Fig. 67.



dern Ansicht (Fig. 68). Er besteht aus

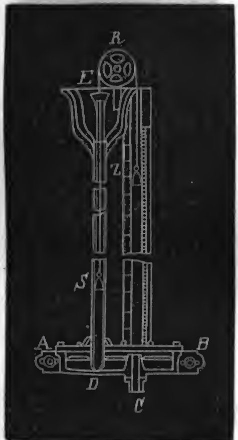
Fig. 68.



einem Messingkasten *AB*, der mit dem Wasser- und Dampfraum communicirt, vorn durch 2 dicke Glastafeln *G* begrenzt ist.

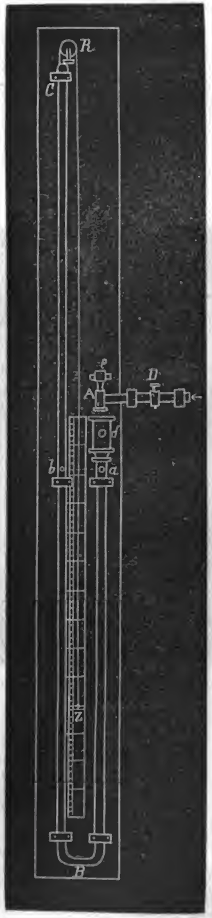
Die Dampfspannung wird durch Manometer angezeigt. Die Manometer sind offen und verschlossen, ganz wie die Luftmanometer eingerichtet, zeigen also die Dampfspannung durch eine Quecksilbersäule an. Jedoch nimmt man häufiger eiserne als Glasröhren, im erstern Falle zeigt dann ein Schwimmer den Quecksilberstand. Es ist *AB* (Fig. 69) das eiserne Quecksilbergefäss eines Gefässmanometers, *C* die Röhre, wodurch

Fig. 69.



er mit dem Kessel communicirt, *S* der Schwimmer, Z der durch eine Leitrolle mit ihm verbundene Zug, welcher auf einer Scala den Quecksilberstand angibt. *ABC* (Fig. 70) ist ein Hebemanometer, auf der einen Seite schliesst er an das mit Wasser gefüllte Gefäss *Aa* an, und mündet auf der andern Seite in die freie Luft. Das Quecksilber füllt den Raum von *a* bis *b*, durch Röhre *D* wird der Dampf über das Wasser in *Aa* geführt, und dieses treibt durch sein Niedersinken das Quecksilber in Schenkel *BC* in die Höhe; ein kleiner Metallschwimmer ist durch Leitrolle *R* mit Zeiger Z in Verbindung gesetzt, welcher auf einer Scala

Fig. 70.



den Quecksilberstand zeigt. Diese Stellung hängt in folgender Weise vom Dampfdruck ab. Sei x die Höhe, um welche der Quecksilberspiegel in Schenkel BC steigt, also der Zeiger sinkt, p der Dampfdruck. Da das Quecksilber in Schenkel AB eben so viel sinkt, als in BC steigt, so ist der Niveauunterschied gleich $2x$. Ist nun der Barometerstand, also der Luftdruck, gleich b, so wird in Schenkel AB von unten nach oben der Druck $2x+b$ wirken. Der Gegendruck besteht aus der Höhe der Wassersäule h in dem weiten Gefässe, welche als constant betrachtet werden kann, und der Höhe x des in den Schenkel eingedrungenen Wassers, beides dividirt durch das specifische Gewicht des Quecksilbers ε, den Dampfdruck p ebenfalls durch eine Quecksilbersäule gemessen, so dass man hat:

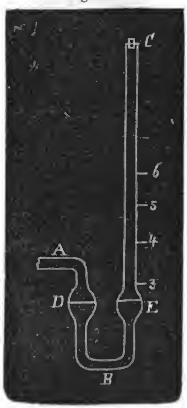
$$2x+b=p+\frac{h+x}{\varepsilon},$$

$$x=\frac{\varepsilon(p-b)+h}{2\varepsilon-1}.$$

Man hat $\varepsilon=13{,}6$. Drückt man p und b aber in Atmosphären, also $b=1$, h und x in Zollen aus, so kommt:

$$x=\frac{13.6029\,(p-1)+h}{26{,}2}=(15{,}09\,(p-1)+0{,}0382\,h)\ \text{Zoll.}$$

Fig. 71.



Bezeichnet man also als Nullpunkt denjenigen, der 0,0382 h über Punkt b der Röhre sich befindet, so entspricht den Punkten der Scala:

$X = 0$, 3,77, 7,545, 11,32, 15,09 Zoll,
$p = 1$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, 2 Atmosph.
$X = 30{,}18$, 45,27 Zoll,
$p = 3$ 4 Atmosph.

Die Füllung mit Quecksilber und das Nachgiessen des Wassers erfolgt durch die mittels Stöpsels verschliessbare Oeffnung e im Kopfe des ersten Schenkels. Während des Eingiessens von Quecksilber wird das Loch a, während des Eingiessens von Wasser das Loch d geöffnet.

Diese Manometer mit Schwimmer wendet man vorzüglich bei niederem Druck an, weil hier die Manometerröhre nur kurz zu sein braucht. Auch bei mittlerem Druck reichen noch 58 bis 87 Zoll aus. Bei hohem Druck dagegen ist das Instrument zu modificiren.

Eine gewöhnliche Luftmanometerröhre BC (Fig. 71) wird mit einem Reservoir E verbunden, aus welchem erst bei höherer Spannung die Luft herausgetrieben wird, also wenn bei 3 Atmosphären Druck das Quecksilber gerade über E steht, so wird es bei 6 Atmosphären die Mitte M von CE einnehmen, auf der Eintheilung EM sind dann die Spannungen je nach dem Stande des Quecksilbers abzulesen.

Fig. 72.

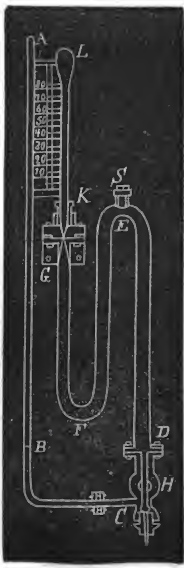
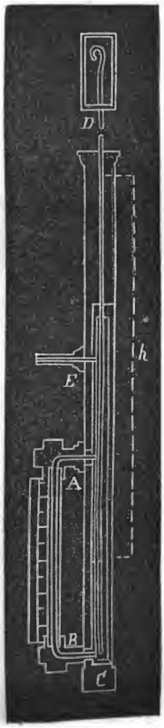


Fig. 73.



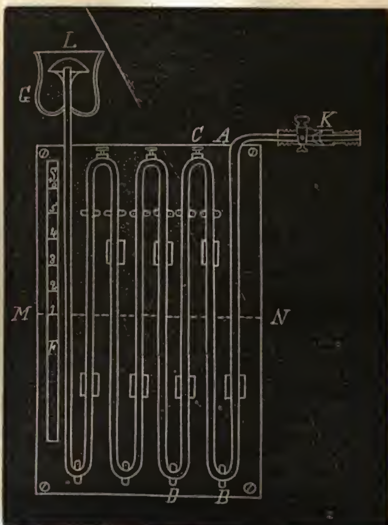
Das hyperbolische Manometer von Delaveye zieht sich nach dem Ende immer mehr zusammen, und läuft in eine Kugel aus. Es hat die Eigenschaft, dass gleiche Veränderungen im Dampfdrucke auch gleiche im Quecksilberstande ergeben.

Ferner ist zu merken das Hofmann-sche Manometer. Kupferröhre *ABC* (Fig. 72) steht mit dem Dampfkessel in Verbindung. *CHD* ist ein Hahnstück, *DEFG* ein zweimal gebogenes Kupferrohr, *KL* eine oben sich etwas verengende, birnenförmig auslaufende Glasröhre. Die Füllung *EFG* des Instrumentes geschieht mit Spiritus. *BCD* ist Wasser; von demselben wird der Dampfdruck aufgenommen und mittels der Luftsäule *DE* auf den Spiritus fortgepflanzt, von diesem aber die Luft in der Röhre *KL* zusammengedrückt. Durch die verschliessbare Mündung *S* wird der Spiritus so lange eingefüllt, bis er durch eine feine Oeffnung *M* ausfliesst, die nachher ebenfalls verschlossen wird. Soll der Dampfdruck gemessen werden, so öffnet man den Dampfhahn und beobachtet den Spiritusstand in der Röhre *KL* auf einer Scala, welche auf experimentellen Wege einzutheilen ist.

Auch offene Hebemanometer werden angewandt. Damit aber die Scala nicht zu gross wird, muss dem Theile *AB* (Fig. 73), an welchem der Quecksilberstand abgelesen wird, eine grössere Weite gegeben werden. Der Dampf drückt von *E* aus, und der weitere Theil befindet sich unten. Bei anderen Einrichtungen kann letzterer sich auch oben befinden.

Das Differenzialmanometer besteht aus einem System paralleler verbundener Röhren *AB*, *BC*... (Fig. 74). Die untere Hälfte bis *MN* ist mit Quecksilber, die obere mit Wasser gefüllt. Ende *K* kann mit dem Dampfe, Ende *L* mit der Luft in Communication gesetzt werden, dann sinkt das Quecksilber im ersten, dritten, fünften u. s. w., und steigt im zweiten, vierten u. s. w.

Fig. 74.



Schenkel. Sind alle Röhren gleich weit, so steigt das Quecksilber im zweiten Schenkel so hoch, wie es im ersten sinkt, also die Niveaudifferenz ist $2x$, wenn x die Steighöhe im zweiten Schenkel ist; ebenso ist diese Differenz im dritten, vierten u. s. w. Schenkel. Dagegen ist die Wassersäule im zweiten Schenkel um $2x$ kürzer als im ersten, im vierten um $2x$ kürzer als im dritten u. s. w.

Ist wieder ε das specifische Gewicht des Quecksilbers, so wird die Höhe einer Quecksilbersäule, welche einer Wassersäule von der Höhe $2x$ das Gleichgewicht hält, sein $\frac{2x}{\varepsilon}$, also durch die Niveaudifferenz der Druck hervorgebracht:

$$2x - \frac{2x}{\varepsilon} = \frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon} x.$$

Dieser Druck wird durch die Niveaudifferenz im dritten und vierten Schenkel verdoppelt u. s. w. Ist also n die Anzahl der Schenkel, p die Dampfspannung im ersten Schenkel, b der Luftdruck, durch eine Quecksilbersäule gemessen, im letzten Schenkel, so hat man:

$$p = b + \frac{n}{2} \frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon} x,$$

$$x = \frac{\varepsilon(p-b)}{(\varepsilon-1)n} = 1{,}079 \frac{p-b}{n} \text{ Zoll},$$

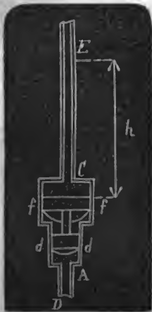
also, wenn p in Atmosphären gegeben, $b=1$ ist:

$$x = 31{,}29 \frac{p-1}{n} \text{ Zoll}.$$

Das Ende FL ist von Glas, und mit der Scala MS versehen. Der Hut L dient dazu, dass bei einem Dampfstosse das Quecksilber nicht ausgeschüttet, sondern in Gefäss G gesammelt werde.

Bei den **offenen Manometern von Galy-Cazalat** sind in einem Gefässe ABC (Fig. 75) zwei fest verbundene Kolben dd und ff von verschiedenen Durchmessern zu verschieben; der

Fig. 75.



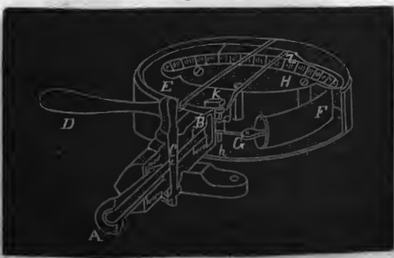
eine nimmt den Druck des bei D zutretenden Dampfes, der andere den der Flüssigkeitssäule CE auf. Seien r und r_1 die Halbmesser der Kolben, p der Dampfdruck, h die Höhe der Flüssigkeitssäule CE, d. h. der Manometerstand, γ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, so ist:

$$r^2 p = r_1^2 h \gamma,$$

$$h = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{p}{\gamma}.$$

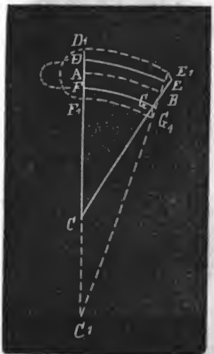
Bei dem Journeux'schen Manometer sind, um die Unsicherheit wegen der Kolbenreibung zu vermeiden, die Kolben durch Metallscheiben ersetzt.

Fig. 76.



Das Metallmanometer von Bonrdom besteht aus einer gebogenen Messingröhre *BEF* (Fig. 76) mit elliptischem Querschnitt, deren Gestalt durch den Druck der in ihr enthaltenen Flüssigkeit geändert wird. Ende *B* ist offen und steht mit der Dampfröhre *AB* in Verbindnng, Ende *F* ist verschlossen und frei beweglich. Durch die stehende Welle *KL* ist hiermit ein Zeiger Z verbunden, der anf der Scala *H* fortrückt, wenn sich die Röhre bewegt. Hierbei geht die Breite *DF* (Fig. 77) in $D_1 F_1$

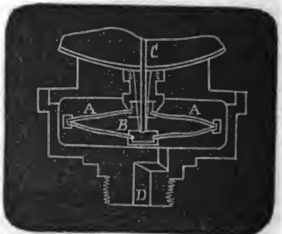
Fig. 77.



über, die Seiten *DE* und *FG* in $D_1 E_1$ und $F_1 G_1$, Querschnitt *EG* in $E_1 G_1$ Krümmungshalbmesser *CA* und *CB* in $C_1 A$ und $C_1 B$.

In dem Metallmanometer von Schäfer und Budenberg ist die Röhre durch eine

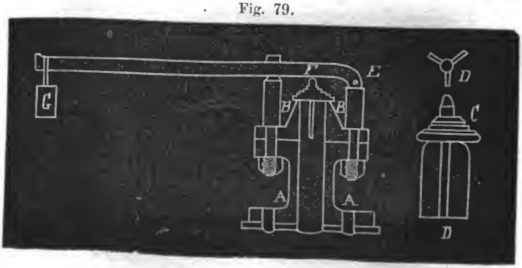
Fig. 78.



wellenförmige Stahlplatte, bei dem von Gäbler und Veithaus durch ein linsenförmig verbnndenes Plattenpaar (Fig. 78) ersetzt. Der Dampf tritt bei *D* ein, nnd drückt die Platte zusammen, dadurch wird Stift *BC* anfwärts geschoben und setzt einen Zeiger in Bewegung. Auch Thermometer dienen diesem Zwecke, da man aus der Temperatur den Dampfdruck berechnen kann. Sie sind durch eine Stopfbüchse in den Kessel zu hängen, nnd durch eine Metallhülle zu schützen.

Die Sicherheitsventile sind der wichtigste Schutzapparat der Dampfkessel. Man unterscheidet äussere Ventile, welche sich nach aussen öffnen, wenn der Dampfdruck eine gewisse Grenze übersteigt, nnd innere, welche sich nach innen öffnen, wenn der Druck unter eine gewisse Grenze fällt; sie lassen dann Luft in den Kessel hinein, bis die Spannung im Innern des Kessels fast dem Luftdrucke gleichkommt. Wie die ersteren das Zerreissen der Kesselwände von innen, so sollen die Letzteren das Zerdrücken durch den Luftdruck von aussen verhindern. **Natürlich treten letz-**

Fig. 79.



tere nur in Thätigkeit, wenn sich beim Ausgehen der Feuerung die Dämpfe condensiren.

Die Belastung ist entweder unmittelbar auf den Ventilen angebracht, und dies findet gewöhnlich bei niederm Drucke statt. oder mittels eines Hebels damit verbunden. Seltener kommen Ventile mit Federkraft vor.

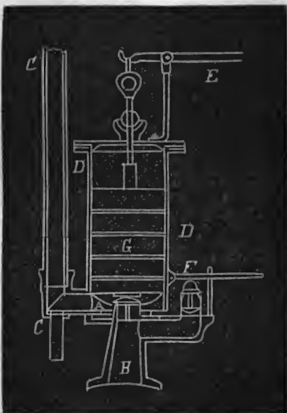
Die Sicherheitsventile sind nicht conisch, sondern haben eine ebene Plattenform, auch sitzen sie nur auf der schmalen Stirnfläche des röhrenförmigen Ventilsitzes. Der Grund ist der, damit sie sich leichter öffnen.

Die Breite der ringförmigen Berührungsfläche zwischen Ventil und Sitz darf nach belgischem Gesetze nur 2 Millimeter betragen, nach französischem soll sie $\frac{1}{30}$ des Durchmessers der inneren Ventilfläche erhalten, wenn dieser Durchmesser wenigstens 30 Millimeter beträgt; ist er kleiner, so soll die Breite 1 Millimeter sein.

Bei dem Ventil mit Hebelbelastung (Fig. 79) ist *AA* das Ventilgehäuse, welches auf den Dampfkessel geschraubt ist, *BB* der oben etwas erweiterte Ventilsitz, *CD* das Ventil selbst, und zwar *C* die Platte, *D* der zum geraden Auf- und Niedergehen nöthige Flügel, *EFH* der um *E* drehbare einarmige Hebel, der in *H* das Gewicht *G* trägt, welches ihn niederdrückt, während das Ventil in *F* ihn hebt.

Ein Ventil mit directer Belastung ist

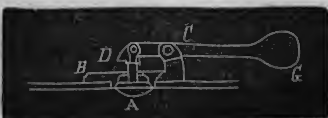
Fig. 80.



A (Fig. 80). *G*, *G* sind die über eine vierkantige Stange geschobenen Gewichte, *B* das auf dem Kessel sitzende Fussstück, zugleich der Ventilsitz, *CC* das Dampfableitungsrohr, *DD* das Ventilgehäuse, welches dem Heizer nicht zugänglich sein darf, *E* ein Hebel zum Probiren des Ventils, *F* ein zweites Hebelventil, welches dem Heizer zugänglich ist

Ein inneres Ventil, auch Luftventil, ist

Fig. 81.



A (Fig. 81). Gelenk D verbindet es mit dem um C drehbaren Hebel DG, Gewicht G drückt es nur schwach von unten nach oben an den Ventilsitz B.

Die äussern Ventile müssen eine gewisse Grösse haben, um einen hinreichend grossen Dampfabfluss zu gestatten, wenigstens muss derselbe die in gleicher Zeit erzeugte Dampfmenge übersteigen. Was die Belastung anbetrifft, sei p die Dampfspannung, b die der Atmosphäre, r der innere Halbmesser des Ventils, P die Belastung, so muss sein:

$$P = \pi r^2 (p - b).$$

Bei directer Belastung ist dies das Gewicht des Ventils mit Belastung. Bei Hebelbelastung ist, wenn a der Hebelarm, G das Gewicht ist:

$$G = \frac{p d - Q s}{a},$$

wenn d der Hebelarm, Qs das statische Moment des unbelasteten Ventils ist. Um die nöthige Ventilfläche zu finden, gehen wir von der Annäherungsformel für die Ausflussgeschwindigkeit des Dampfes aus:

$$v = 1592 \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t) \lg p} \text{ Fuss.}$$

p ist hier das Verhältniss des Dampfdruckes zu dem der äussern Luft, t die Temperatur des Dampfes. Bezeichnen wir den Inhalt der Ventilfläche mit F, so ist die Ausflussmenge, unter dem äussern Luftdruck gemessen, in der Secunde:

$$Q = Fv = 1592\, F \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t) \lg p},$$

dagegen die unter dem inneren Drucke gemessene Ausflussmenge, welche dem in derselben Zeit erzeugten Dampfe gleich ist:

$$Q_1 = \frac{Q}{p} = \frac{1592\, F}{p} \sqrt{(1 + 0{,}00367\, t) \lg p}.$$

Das Gewicht der Dampfmenge Q_1 aber ist:

$$G = Q_1 \gamma = \frac{0{,}003557 \cdot 15{,}09\, p}{1 + 0{,}00367\, t}\, Q_1.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen Q_1, so kommt:

$$F = 0{,}01170\, G \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\, t}{\lg p}}.$$

Wenn man auf den Quadratfuss Heizfläche für die Stunde 4 Pfund Dampf rechnet, so ist für die Heizfläche F_1 in der Secunde:

$$G = \frac{4 F_1}{3600} = \frac{F_1}{900} \text{ Pfund,}$$

also das Verhältniss zwischen Ventil- und Heizfläche:

$$\frac{F}{F_1} = 0{,}00001300 \sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\, t}{\lg p}}.$$

In Preussen soll dies Verhältniss nicht unter $\frac{1}{3000}$ sein. In Frankreich gilt für den Ventildurchmesser die Formel:

$$d = 2{,}6 \sqrt{\frac{F_1}{p - 0{,}412}} \text{ Centimeter,}$$

also da F_1 in Quadratmetern zu geben ist:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{0{,}026^2 \pi}{4 (p - 0{,}412)} = \frac{0.000531}{p - 0{,}412}.$$

Um die Sicherheit zu erhöhen, werden zwei Ventile an den entgegengesetzten Kesselenden, jedes von den vorgeschriebenen Dimensionen, angebracht. Fairbairn räth, den Ventilhebel im Innern des Kessels aufzuhängen, um das Ventil dem Heizer unzugänglich zu machen.

Man hat auch leichtflüssige Metallmischungen (Blei, Wismuth und Zink) vorgeschlagen, welche in die Kesselwand eingesetzt oder als Stöpsel verwandt bei höherer Temperatur schmelzen; indess sind diese Vorrichtungen zu unbequem, um allgemeinere Anwendung zu finden.

Noch gehören endlich zu einem Dampfkessel:

Das Dampfrohr zum Fortleiten des Dampfes in den Cylinder.

Das Mann- oder Fahrloch zum Einsteigen in den Kessel.

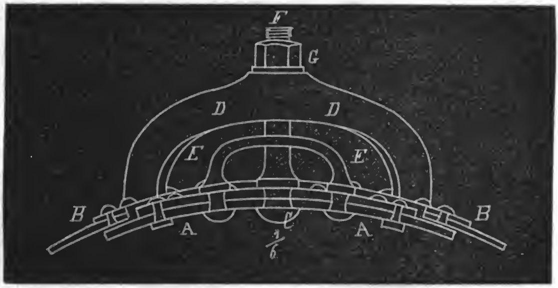
Das Ablassrohr zum Ablassen,

das Ausblaserohr zum Ausblasen des Wassers.

Das Fahrloch ist eine runde Oeffnung von 16 bis 18 Zoll Länge und 13 Zoll Weite im Kesseldeckel. Zum Verschluss dient eine starke Gusseisenplatte AA (Fig. 82). Im Zwischenraume AB zwischen ihr und dem Kessel liegt ein eiserner, mit Hanf und Oelkitt belegter Ring. Zum Handhaben der Platte dient Bügel EE, zum scharf Andrücken derselben der an C befestigte, durch Bügel DD gehende Schraubenbolzen CF sammt seiner Mutter G.

Die Dampfkessel für stehende Maschinen und die Lokomotivkessel werden wohl auch mit einem Dome oder einer Dampfhaube versehen, in welche das Mannsloch, das Speise- und Dampfrohr, die Röhren für die Sicherheitsventile u. s. w. einmünden. Dadurch wird nämlich der Kessel mehr geschont. Diese Haube muss nach preussischer Vorschrift durch Eisenblech zusammen- und auf den Kessel aufgenietet sein.

Fig. 82.



Das Rohr zum Ablassen des Wassers befindet sich am Boden desselben über den Feuerrosten, und wird durch einen conischen Stahlzapfen von innen verschlossen.

Da das Speisewasser nie ganz rein ist, so muss der Kessel von Zeit zu Zeit gereinigt werden. Dazu dient denn auch das Ausblaserohr, welches nahe bis zum Boden reicht, sich dort conisch erweitert, und nach aussen durch einen Hahn verschlossen ist. Oeffnet man, wenn die Feuerung ausgegangen und die Spannung des Dampfes nur noch mässig ist, den Hahn, so wird das trübe Wasser durch den Dampf fortgetrieben. Aber nicht bloss Schlamm ist auf diese Weise zu entfernen, sondern auch Gips, Koch- und Glaubersalz, welche eine feste Rinde — den Kesselstein — bilden, der den Boden des Kessels bedeckt. Hierdurch wird der Durchgang der Wärme erschwert, und auch der Kessel an den überzogenen Stellen sehr leicht glühend. Damit diese Masse sich nicht unmittelbar über dem Heerde ansetzt, führt man das Wasser an der demselben entgegengesetzten Stelle ein, und legt den Kessel hier 1 bis 3 Zoll tiefer als beim Feuerraum. Auch werden besondere Boden- oder Seitenbleche eingesetzt. Das vollständige Entfernen des Kesselsteins gelingt aber nur durch Losschlagen und durch Säure (Salzsäure).

Jeder Dampfkessel ist gewissen Proben zu unterwerfen. Vorgeschrieben ist die hydrostatische Probe. Das Sicherheitsventil erhält hierbei doppelte Belastung, und es darf dann das Wasser nur in den Fugen in Nebelform hervortreten.

Jobard schlägt vor, den Kessel ganz mit Wasser anzufüllen, und so lange zu erhitzen, bis das Manometer 2—3 Atmosphären über den normalen Druck anzeigt. Trotzdem kommt Zerspringen des Kessels zuweilen vor, ohne dass man die jedesmalige Ursache anzugeben im Stande ist.

Im Allgemeinen rührt dies her:

1) von übermässiger Belastung, oft verbunden mit Erschütterungen,

2) vom Wassermangel, wobei der Kessel zu glühen anfängt, der Wasserdampf sich zu rasch entwickelt oder gar zersetzt,

3) vom Loslösen des Kesselsteins,

4) von zu schneller Einführung des Wassers nach vorausgegangenem Wassermangel, wobei ebenfalls zu schnelle Dampfentwickelung wegen des Glühens des Kesselbodens eintritt,

5) durch Einführung zu vieler Luft mit dem Wasser, wodurch Knallgas entsteht.

Selbstverständlich kann auch mangelhafte Construction oder Wartung die Ursache sein.

Vergleiche übrigens den zweiten Band von Weissbach's Ingenieur- und Maschinenmechanik.

3) Dampfmaschinen.

A) Allgemeines.

Dampfmaschinen (*machines à vapeur, steam-engines*) bewirken eine Verwendung der Dampfkraft zur Arbeitserzeugung. Von allen den Versuchen, welche zu diesem Zwecke seit den ältesten Zeiten gemacht worden sind, hat sich keine andere Vorrichtung bewährt, als diejenige, wo durch die Expansivkraft des Dampfes ein Kolben in einem Cylinder

bewegt wird, und von diesen wird daher hier allein die Rede sein.

Die Dampfmaschinen heissen einfach wirkend, wenn der Dampf nur den Kolben in einer Richtung — nach oben — treibt, und die entgegengesetzte Bewegung durch ein Gegengewicht hervorgebracht wird; wirkt aber der Dampf bald nach der einen, bald nach der andern von zwei entgegengesetzten Richtungen, so heisst die Maschine doppeltwirkend.

Die erstere Art, natürlich die ältere, in deren Erfindung sich mehrere Mechaniker theilen, kommt nur noch bei Pumpen und Hammerwerken vor, und ist nicht auch in anderer Art verwendet worden. Die doppelt wirkenden werden zur Erzeugung einer rotirenden Bewegung benutzt, welche bekanntlich leicht für beliebige Arbeiten zu verwenden isi. Ihr Erfinder ist Watt.

Was die grössere oder geringere Spannung des Dampfes anbetrifft, so theilt man die Dampfmaschinen in solche mit niederem, mittlerem und hohem Drucke, je nachdem der Dampfdruck bis zu 1½, bis zu 2 bis 4 Atmosphären oder darüber steigt. Ausserdem sind zu unterscheiden Maschinen ohne und mit Condensation. Bei den ersteren wirkt der Druck der Atmosphäre dem Dampfdrucke entgegen, indem der Dampf nach dem Gebrauche in die freie Luft strömt; bei den letzteren wird der Dampf in einem besonderen Gefässe nach seinem Gebrauche condensirt, dem Dampfdruck wirkt also nur der der unvollkommenen Condensation entsprechende geringe Luft- und Dampfdruck entgegen.

Die Vortheile der Condensation sind offenbar desto geringer, je höher die Dampfspannung ist; bei 2 Atmosphären z. B. ist der Verlust durch den Gegendruck der Atmosphären ½, bei 6 Atmosphären nur ⅙. Man wendet deshalb die Condensation in der Regel nur bei niederem oder mittlerem Drucke an.

In Bezug auf die Einführung des Dampfes unterscheidet man Maschinen ohne und mit Expansion. Bei den ersteren tritt der Dampf fortwährend abwechselnd über und unter den Kolben ein, behält also immer dieselbe Spannung; bei den letzteren wird bei einer gewissen Höhe des Kolbens der Dampf abgesperrt, und bewegt sich dann nur durch die Expansion des Dampfes mit abnehmender Geschwindigkeit. Bei den letzteren Maschinen ist grösserer Nutzeffect vorhanden, da bei den ersteren die ganze Wirkung des abgeschlossenen Dampfes verloren geht.

Dampfmaschinen, die an einem Orte fest angebracht sind, heissen stationäre, sollen sie sich von Ort zu Ort zu gelegentlichem Gebrauche transportiren lassen, locomobile, solche endlich, deren Arbeit eben in der Bewegung ihrer selbst und der von ihnen geführten Last bestehen, Locomotiven; die letzteren zerfallen in Dampfwagen und Dampfschiffe.

B) Haupttheile der Dampfmaschine.

Die Haupttheile sind: der Cylinder, der Kolben mit seiner Stange, und die Steuerung.

Der Cylinder ist von Gusseisen. Er muss genau ausgebohrt sein. Sein Zweck ist, den Kolben zu führen und den Dampf während der Arbeitsleistung zu umschliessen. Er ist oben mit einem Deckel, unten mit einem Bodenstück verschlossen, in der Nähe von beiden sind die Seitenmündungen zum Ein- und Austreten des Dampfes. Gewöhnlich ist die Höhe 2 bis 2½ mal gleich der Weite, bei Maschinen aber, die ein sehr schnelles Spiel haben, ist dies Verhältniss geringer.

Es soll nämlich ein möglichst kleiner Wärmeverlust im Cylinder stattfinden. Es ist aber diese Abkühlung der Oberfläche des abzukühlenden Körpers also der des Weges proportional, den der Kolben durchläuft. Von allen Cylindern von gleichem Inhalt hat nun der die kleinste Oberfläche, dessen Höhe gleich der doppelten Weite ist, der Kolbenhub muss also die doppelte Weite betragen, wozu dann noch die Kolbenhöhe kommt.

Auch ist der Cylinder mit einem schlechten Wärmeleiter, Holz- oder Filzmantel, zu umgeben, statt dessen kann man ihm jedoch eine Luft- oder Dampfhülle geben, d. h. man umgibt ihn mit einem eisernen Dampfmantel, und füllt den Zwischenraum mit Dampf aus; dieser Dampf kann stillstehen, oder vor oder endlich nach seiner Wirkung im Cylinder durch den Zwischenraum strömen. Die letzte Methode ist die beste, da von der Wärme des Dampfes noch Nutzen gezogen wird. Da sich hierbei etwas Wasser niederschlägt, so befindet sich unter dem Dampfmantel ein Ablassrohr mit einem Hahne. Auch muss die Oberfläche der geringeren Ausstrahlung wegen platt sein.

Die Wandstärke des Cylinders ist wie beim Dampfkessel zu berechnen, wegen des allmäligen Ausschleifens ist jedoch ⅜ Zoll zuzugeben. Ist die Cylinderweite

d, die Dampfspannung p in Atmosphären, so ergibt sich für die Dicke:

$$e = (0{,}005(p-1)\,d + \tfrac{3}{8}) \text{ Zoll.}$$

Deckel und Fussstück des Cylinders sind

Fig. 83.



mit letzterem verschraubt oder verkittet. **In** der Mitte des Deckels befindet sich

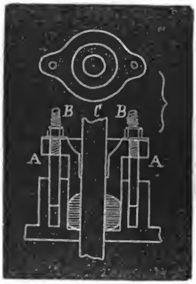
Fig. 84.



die Stopfbüchse, durch welche die Kolbenstange geht. Sie ist mit Hanflunten, die in Oel und Talg getränkt sind, ausgestopft; in neuerer Zeit wird diese Ausstopfung oft durch Metallringe ersetzt, welche über einander liegen und aus je drei Sectoren bestehen, die durch eiserne zwischen dem innern Umfange der Stopfbüchse und dem äussern der Ringe eingeklemmte Federn an die Kolbenstange gedrückt werden.

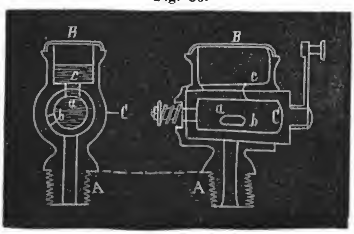
Die Stopfung (Liderung) wird von oben durch einen eisernen Mantel zusammengehalten, der entweder oben auf der Stopfbüchse unmittelbar (Fig. 83 und 84), oder durch zwei Ziehschrauben aufsitzt (Fig. 85). *BB* sind die Ziehschrau-

Fig. 85.



ben. Der Cylinder und auch der Stopfbüchsendeckel sind mit einer Vertiefung zur Aufnahme von Schmiere (Talg) versehen. Bei Hanfkolben sind ausserdem noch ein oder mehrere Schmiertrichter auf den Cylinderdeckel zu setzen. Dieser Schmiertrichter wird mit dem Ende *A*

Fig. 86.



(Fig. 86) auf den Deckel des Cylinders geschraubt, *B* ist das Fettbehältniss und *C* ein Hahn mit zwei Bohrungen *a* und *b*; ist *b* unten, so fliesst das Fett durch die Bohrung des Fussstückes *A* in den Cylinder, ist *a* oben und unter der Bohrung *c* im Boden von *B*, so fliesst das Fett aus dem Trichter *B* in den Hahn *C*.

In einigen Fällen wird die Kolbenstange durch den Boden des Cylinders geführt. Dann ist eine zweite Stopfbüchse nöthig. *AB* (Fig. 87) ist das

Fig. 87.



Gehäuse, *CC* der Deckel, *DD* die Kolbenstange, *ee* eine messingene Scheibe mit einer auswendig herumlaufenden Nuth und 6 bis 8 kleinen, radial laufenden Löchern, *f* die Packung, *g* ein mit der Nuth communicirendes Kupferrohr, *k* der Kelch zur Aufnahme des flüssigen Talgs, *h* ein Hahn zum Abfluss, der nur geöffnet wird, wenn die Maschine steht.

Der Cylinder ist mittels einer starken Grundplatte auf ein festes Gemäüer zu setzen, und mit diesem durch Anker und Schrauben zu verbinden.

Der Kolben nimmt beim Auf- und Niedergehen im Cylinder die Dampfkraft auf und leitet sie mittels der Kolbenstange weiter. Der Kolben ist ein Cylinder, der genau an das Innere des Dampfcylinders anschliesst; er besteht aus dem Kolbenstocke, der Liderung und dem Deckel. In der Mitte des Kolbenstockes ist eine Verstärkung, welche im Innern conisch ausgedreht ist, und zur Aufnahme des ebenfalls conisch abgedrehten Endes der Kolbenstange dient. Kolbenstock und Deckel sind aus Gusseisen, die Liderung von Hanf oder Metall.

Der Kolben mit Hanfliderung ist hier theilweise zerschnitten und abgedeckt dargestellt (Fig 88). *AA* ist der Kolbenstock, *BB* die Liderung aus Hanfzöpfen bestehend, *CC* der durch Schrauben *EE* mit dem Kolbenstock verbundene Deckel, welcher die Liderung zusammendrückt, *D* ist die Kolbenstange, *F* die Splette, womit deren Ende in der die Mitte des Kolbens einnehmenden Hülse festgekeilt ist.

Die Hanfliderung ist aber bei Hochdruckmaschinen nicht anzuwenden, da die Reibung und der heisse Dampf zu schnell abgenutzt werden. Statt dessen dient dann eine Metallliderung. Solche besteht aus genau abgedrehten Metallringen, welche durch Federn an die innere Fläche des Cylinders gedrückt werden. Zwei solcher Liderungen sind hier abgebildet (Fig. 89 und 90). *AA* ist der Kolbenstock, *DD* der Deckel, *FG* das Kolbenstangenende, *EE* die

Fig. 88.

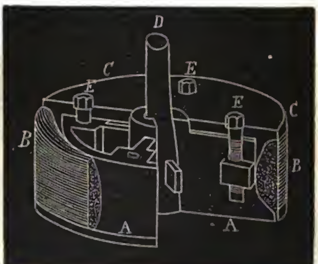
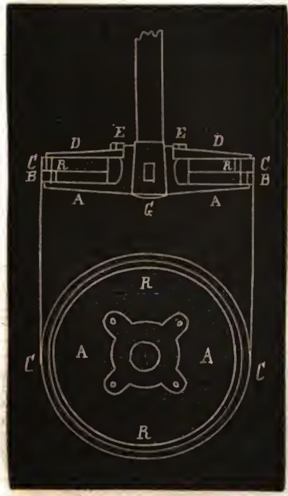


Fig. 89.



Schrauben, welche den Deckel mit der Hülse verbinden. Die Liderung besteht aus zwei über einander liegenden Ringen *BB* und *CC*, die durch Schlagen elastisch gemacht und in Stücke zerschnitten sind, damit sie etwas gegen die Cylinderwand federn. Bei der einen (Fig. 89) ist jeder Ring an der schwächsten Stelle zerschnitten, und durch einen innen anliegenden aufgeschnittenen Stahlring *R* nach aussen gedrückt. Bei der andern (Fig. 90) sind die Ringe an den weitesten Stellen zerschnitten, und Keile *KK* in die Schnitte eingelassen, welche durch Spiralfedern *SS* angedrückt sind.

Genau ist auf das Verhältniss der Kolbenhöhe zum Kolbendurchmesser und der Stärke der Kolbenstange zu demselben zu achten. Da nämlich die innere Cylinderwand nicht völlig glatt ist, so kann die Liderungsfläche nur bei einer gewissen Breite derselben völlig abschliessen. Zu grosse Breite aber würde die Reibung zu sehr vermehren. Erfahrungen geben das Verhältniss der Kolbenhöhe zum Kolbendurchmesser $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{6}$ bei Hanfliderung, $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{8}$ bei Metallliderung. Bei kleineren Kolben ist der grössere Werth zu nehmen.

Die Kolbenstange besteht aus Schmiedeeisen oder Stahl; ihr ist gehörige Stärke zu geben, damit sie bei Uebertragung der Arbeit keine Deformation erleidet. Hierbei ist zu unterscheiden, ob sie, wie bei einfachwirkenden Maschinen, nur einer Ausdehnung, oder, wie bei doppeltwirkenden, auch einer Zusammendrückung ausgesetzt ist. Sei *p* die Differenz der Spannung auf beiden Seiten des Kolbens, *d* der Durchmesser des Kolbens, so wirkt auf ihn die Kraft:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} 15{,}09 p \text{ Pfund.}$$

Sei nun d_1 der Durchmesser der Kolbenstange, *T* der Tragmodul der absoluten Elasticität, so ist die Tragekraft der Stange:

$$P = \frac{\pi d_1^2}{4} T,$$

also durch Gleichsetzen beider Ausdrücke:

Fig. 90.

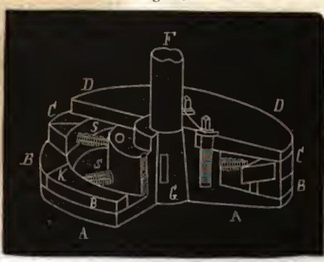
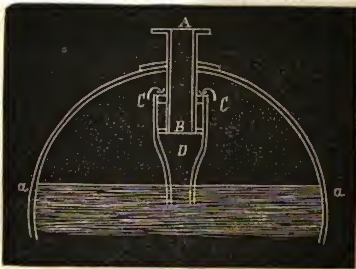


Fig. 91.



$$d_1 = d\sqrt{\frac{15{,}09\,p}{T}}.$$

Für Schmiedeeisen ist $T = 20000$. Nimmt man hier der Sicherheit wegen nur die Hälfte, $T = 10000$, so ist:

$$d_1 = 0{,}01\,d\sqrt{p}\ \text{Zoll},$$

oder, wenn p nicht in Pfunden für den Quadratzoll, sondern in Atmosphären gegeben ist:

$$d_1 = 0{,}04\sqrt{p}\ \text{Zoll}.$$

Bei doppeltwirkenden Maschinen erhält man zwei Formeln, je nachdem man von der Festigkeit des Zerdrückens oder des Zerknickens ausgeht. Man geht am besten von der letzten aus, nimmt aber einen sehr verkleinerten Werth von T an. Erfahrungsmässig bedient man sich der Formel:

$$d_1 = 0{,}08\,d\,(\sqrt{p} + 0{,}25)\ \text{Zoll}.$$

Das Dampfrohr führt den Dampf aus dem Kessel in die Dampfkammer, einen Raum, von welchem aus die regelmässige Vertheilung durch die Steuerung stattfindet. Im Dampfrohre befindet sich die Admissionsklappe, ein Drosselventil, durch welches der Dampfzufluss regulirt werden kann.

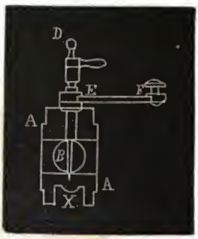
Das Dampfrohr mündet an derjenigen Stelle des Kessels ein, wo die Dampfentwickelung am stärksten ist.

Damit noch das Fortreissen des Wassers mit dem Dampfe möglichst verhindert wird, gibt man dem Rohre eine aufsteigende Stellung, wobei das fortgerissene Wasser wieder zurückfliesst. Eine gute Einrichtung, um die Dämpfe recht trocken in den Cylinder zu bringen, ist die folgende (Fig. 91). An das Dampfrohr *AB* schliesst sich ein weiteres Rohr *CD* an, welches bis in das Kesselwasser hinabgeht. Der bei *CC* eintretende Dampf lässt bei seiner abwärts gehenden Bewegung dann das Wasser grösstentheils fallen.

Das Dampfrohr ist nicht sehr lang, jedoch weit zu machen, plötzliche Richtungs- und Querschnittsveränderungen zu vermeiden, um Bewegungshindernissen vorzubeugen. Die Verringerung der Abkühlung dagegen erfordert ein kurzes, zugleich aber enges Rohr, ausserdem die Umgebung mit einem schlechten Wärmeleiter oder einem polirten Metallmantel. Die Weite der Röhren beträgt am besten $\frac{1}{5}$ des Dampfkolbendurchmessers, eher etwas weiter als enger namentlich bei hohem Druck und schnellem Spiel.

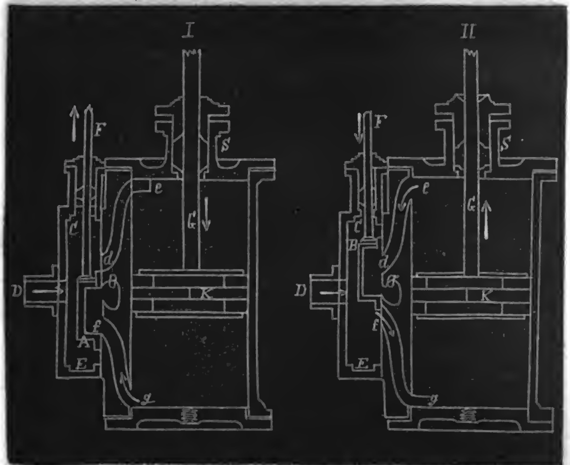
Die Admissionsklappe führt bei *AA* in das Dampfrohr (Fig. 92), *B* ist die

Fig. 92.



Klappe, *CX* ihre Axe, *D* eine Stellschraube mit ihrer Mutter, *EF* der Hebel zur Bewegung der Klappe. Dieselbe schliesst nie den Dampf ganz ab. Bei Hochdruckmaschinen, wo Absperrung

Fig. 93.



nöthig ist, wendet man ein besonderes Absperrventil an. Bei niederem Drucke ist dies aus dem Grunde nicht nöthig, weil durch Einstellung der Condensation die Maschine zum Stillstande gebracht werden kann.

Besondere Kanäle oder Dampfwege führen den Dampf aus der Kammer in den Cylinder und von da in die freie Luft oder in den Condensator.

Die S t e u e r u n g dient zur Regulirung dieses Ein- und Abführens des Dampfes. Man unterscheidet innere und äussere Steuerung (siehe Wassersäulenmaschine). Die erstere befindet sich im Innern des Dampfgehäuses, sie besteht aus Hähnen, Schiebern, Kolben, Klappen, welche die Dampfwege abwechselnd öffnen und schliessen.

Die Kolbensteuerung und die durch Hähne (Vierweghahn) kommen nur selten vor. Vergleiche über dieselben den Artikel: Wassersäulenmaschine.

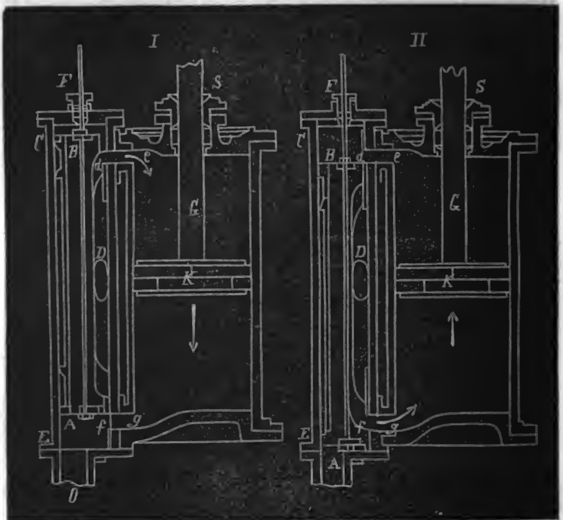
Die häufigst angewandten sind die Schieber- und Ventilsteuerungen

Man unterscheidet bei den ersteren platte und hohle Schieber, Muschel- und Röhrenschieber.

Bei dem M u s c h e l s c h i e b e r ist *AB* (Fig 93) der Schieber. Er befindet sich innerhalb der Dampfkammer *CDE* und wird durch Stange *BF* bewegt; mit seinen abgehobelten Stirnflächen liegt er an die ebenfalls abgehobelte Metallfläche *df* an. Der durch das Dampfrohr *D* eingeführte Dampf tritt bei der Stellung I durch *de* über den Dampfkolben *K*, so dass derselbe abwärts geht, während der benutzte Dampf unter dem Kolben auf Weg *gf* in den Schieberraum, oder von dort durch *O* ins Freie oder den Condensator gelangt. Bei Stellung II führt Weg *fg* den Dampf unterhalb des Kolbens, derselbe geht aufwärts, und der oben befindliche Dampf wird durch *eO* und *O* weggeschafft.

Ist die Maschine sehr gross, so würde das Ausfüllen der Kanäle *de* und *fg* mit Dampf zu viel Arbeitsverlust bewirken, man wendet daher bei solchen den R ö h r e n s c h i e b e r (Fig 94) an. Durch Mündung *D* tritt der Dampf in das Innere *Ad* des Schiebers, von hier in Stellung I bei *de* über, bei Stellung II bei *fg* unter den Kolben. Die auf beiden Seiten offene Röhre *AB* mit halbkreisförmigem Querschnitte ist bei *A* und *B* abgelidert, so dass sie an den halbcylindrischen Theil der Dampfkammer dampfdicht anschliesst. Der be-

Fig. 94.



nutzte Dampf tritt bei Stellung I direct auf dem Wege *gfO*, bei Stellung II aber auf dem Wege *de* durch die Röhre *BA* und durch *O* hinaus.

Der Röhrenschieber hat aber auch den Vorzug, dass er vom Dampfe umgeben ist, also nicht blos von einer Seite gedrückt wird, weshalb auch die Reibung

Fig. 95.

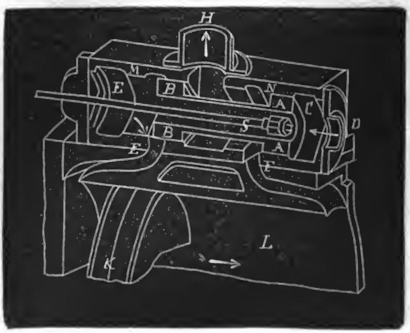
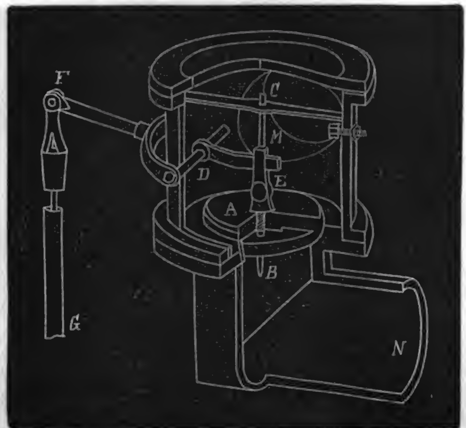


Fig. 96.



bei ihm geringer ist. Da bei grossen Maschinen mit hohem Drucke die Bewegung des Schiebers einen Arbeitsaufwand von mehreren Pferdekräften erfordern kann, so benutzt man hier auch kurze Schieber, die nie von einer Seite allein gedrückt werden. Man nennt sie äquilibrirte oder Entlastungsschieber. Ein solcher ist von Jobin für eine Maschine mit liegendem Cylinder construirt (Fig. 95). *CE* ist die Dampfkammer, *AB*, der Schieber, besteht in einer Verbindung von zwei Steuerkolben *AA* und *BB* mit einer hohlen Kolbenstange. Bei *D* tritt der Dampf in die Kammer, füllt die Räume *C* und *E* zu beiden Seiten des Schiebers und *S* innerhalb desselben aus. Der durch das Ausblaserohr *H* und den Cylinder *L* strömende Dampf umhüllt den mittleren röhrenförmigen Theil *AB* des Schiebers von aussen. Da die Dampfkammer bei *ME* und *NF*, wo die Kanäle einmünden, erweitert ist, so findet auch dann kein einseitiger Druck statt, wenn einer dieser Kanäle abgesperrt ist.

Die Ventilsteuerung wird nur bei grossen, hauptsächlich aber bei einfach wirkenden Maschinen verwendet, da die Schieber zu gross sind, um genau abschliessen zu können, auch das Oeffnen und Schliessen der Wege nur langsam geschieht. Die Ventile sind Kegel- oder Röhrenventile, beide können ferner einfache oder doppelte sein, von diesen sind die doppelten aber die leichter beweglichen. Die Ventile werden durch Stangen und Hebel in Bewegung gesetzt. *A* (Fig. 96) ist ein einfaches Kegelventil mit Hebelbewegung, *BC* sein Stiel, *B* und *C* die büchsenförmige Leitung desselben, *D* eine durchs Gehäuse gehende Drehaxe, *DE* ein Hebelarm im Innern, *DF* ein solcher ausserhalb des Gehäuses. Der erstere greift in den bei *E* ausgehöhlten Ventilstab. Der letztere ist mit Stange *FG* verbunden. Wird

Fig 97.

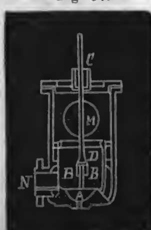
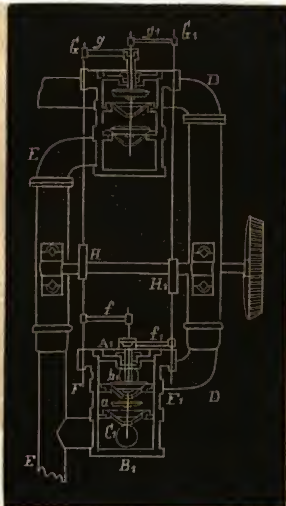


Fig. 98.



diese gezogen, so dreht sich die Hebelverbindung um *D*, *A* wird gehoben, so dass die Räume *M* und *N* communiciren. Dagegen ist *A* (Fig. 97) die Ventilplatte eines Röhrenventils mit Stangenbewegung. Die Ventilplatte *A* ist fest, das Gehäuse *BB* beweglich und zwar durch eine Ventilstange *CD*, welche durch Stopfbüchse *C* geht. In der hier gegebenen Abbildung steht *B* an *fA*, es sind daher die Räume *M* und *N* nicht verbunden. Wird nun *BB* emporgehoben, so tritt diese Verbindung ein, der Dampf strömt von *M* durch *B* nach *N*. Diese Ventile haben vor den Kegelventilen den Vorzug grösserer Beweglichkeit.

Diese Ventile dienen für einfach wirkende Maschinen. Für doppelt wirkende sind zwei Ventile nöthig. Um dieselben von einem Punkte aus mittels Stangen bewegen zu können, steckt man die Stange des einen durch die des andern, welche letztere also hohl sein muss. Diese Construction gibt die **concentrischen Ventile** von Murdoch (Fig. 98). *AB*, $A_1 B_1$ sind zwei Dampfkam-

Fig. 99.

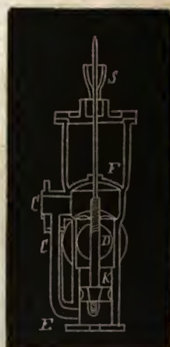
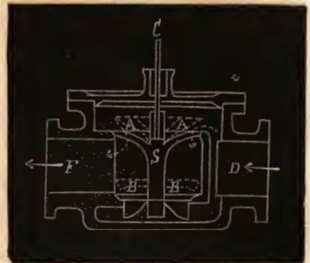


Fig. 100.



mern, welche durch je zwei Ventilsitze wieder jede in drei getheilt sind. Die oberen communiciren mit dem Dampfrohre *DD*, die mittleren mit dem Cylinder, die unteren mit dem Ableitungsrohre *EE*. *FG* und F_1G_1 sind zwei Steuerstangen, welche von den Excentrics *H*, H_1 bewegt werden. Diese ergreifen nämlich durch Querarm ff_1 gg_1 die Stiele der vier Ventile *a*, *b*, a_1, b_1. Die Stiele von *a* und b_1 sind hohl, und die von *b* und a_1 gehen durch dieselben hindurch. Geht Stange *FG* aufwärts, so öffnen sich die Ventile *a*, a_1, der Dampf tritt von *DD* bei *C* in den Cylinder über den Kolben, und bei C_1 aus dem Cylinder heraus ins Ableitungsrohr *EE*; geht aber F_1G_1 aufwärts, also *FG* abwärts, so öffnen sich *b*, b_1 und *a*, a_1 schliessen sich, bei C_1 tritt der Dampf von *DD* unter den Kolben, der oberhalb desselben befindliche aber durch *C* nach EE_1.

Die Röhrenventile sind ringförmig und haben einen kleineren Querschnitt, weshalb zu ihrer Bewegung geringere Arbeit gehört. Um diese auch für Kegelventile zu verringern, wendet man G e g e n v e n t i l e oder G e g e n k o l b e n an. *K* ist der Gegenkolben (Fig. 99) des Kegelventils *V*. *CE* ein Seitenrohr, welches das nach dem Cylinder führende Communicationsrohr *O* mit dem Raum unter dem Gegenkolben verbindet. Der Dampf drückt das Ventil nach oben und den Kolben nach unten mit fast gleicher Stärke, so dass beim Aufziehen nur noch die Reibung zu überwinden ist. Ein

Fig. 101.

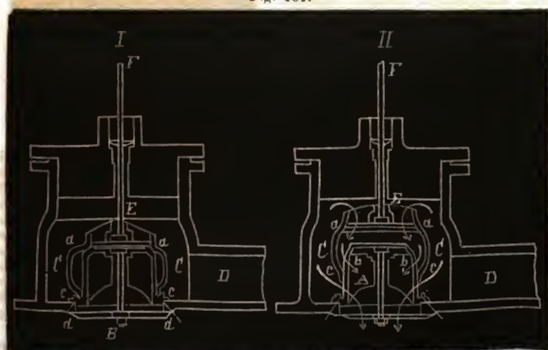
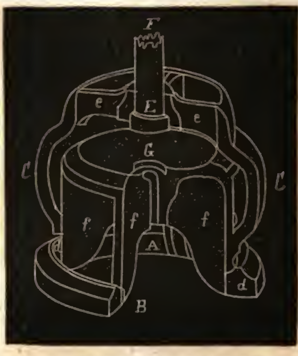


Fig. 102.



zweites Ventil *F*, dessen hohle Stange *FS* die Stange *KL* von *V* und *K* einschliesst, dient, um den Dampf wieder nach seiner Wirkung zu entfernen.

Noch besser aber erfüllt diesen Zweck das Doppel- oder Laternenventil (Fig. 100). *AA* und *BB* sind die beiden Ventilteller, *SC* der Stiel, wodurch das Ganze aufgezogen wird. Der bei *D* eintretende Dampf ist von den Ventilen und ihren Sitzen umschlossen, drückt also das eine nach unten, ganz so wie das andere nach oben. Ein Hebel bei *C* hebt also das Ventil mit geringer Kraft. Hierauf tritt der Dampf aus den beiden ringförmigen Räumen zwischen Ventilen und Sitzen aus dem Ventilgehäuse heraus in die Dampfkammer *F*, von wo er weiter geleitet wird.

Es gibt aber auch doppelte Röhren- oder Glockenventile (Fig. 101). Die Ventilringe *bb* und *dd* sind fest, das Gehäuse *CC* mittels des Stieles *EF* beweglich. In I ist das Ventil geschlossen, die Kegelfläche *aa* des einen trifft den kegelförmigen Umfang des Tellers *bb*, und die Kegelfläche *cc* des andern den kegelförmigen Umfang des Tellers *dd*. Der bei *D* einströmende Dampf drückt das Ganze von oben und unten gleich stark. Nach dem Aufziehen gelangt in II der Dampf zwischen *a* und *b* und auch zwischen *c* und *d* in den Raum *A* und von da durch *B* weiter.

Die Bewegung geschieht (Fig. 102) vermittels der Flügel *ff*, welche vom Teller *G* herablaufen, und der durch die Stange *EF* bewegten Glocke *CC* zur Führung dienen; die Arme *ee* verbinden die Glocke mit der Stange.

Es gibt aber auch doppelsitzige Röhrenventile (Fig. 103). Ventil *ABBA* sitzt an Stange *CS*, und ist

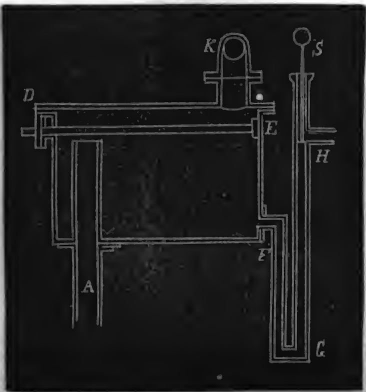
Fig. 103.



an beiden Mündungen erweitert, aussen aber kegelförmig abgedreht. Das Ventilgehäuse *EEFF* ist mit den Sitzen *EE* und *FF* versehen. In der Abbildung ist der bei *D* zutretende, den inneren Ventilraum ausfüllende Dampf von dem mit dem äusseren Ventilraum communicirenden Rohre *G* abgesperrt. Wird das Ventil geöffnet, so geht zwischen *AA* und *EE* einerseits, zwischen *BB* und *FF* andererseits der Dampf hindurch nach *G*.

Der Condensator dient zum Conden-

Fig. 104.



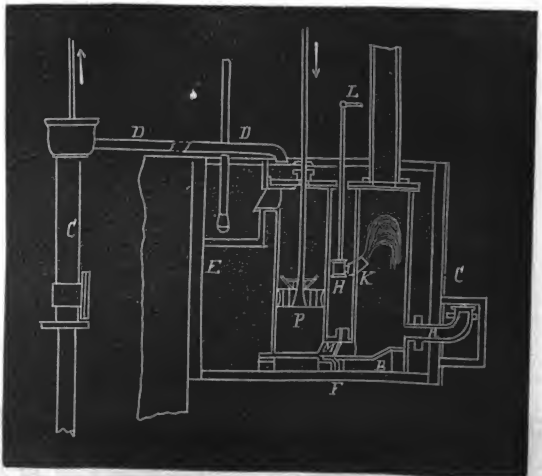
siren des Dampfes nach vollbrachter Arbeit. Es ist oben erwähnt, dass bei vielen Maschinen ein solcher nicht vorhanden ist. Man lässt, wenn das letztere stattfindet, oft den verbrauchten Dampf durch einen Vorwärmer gehen, wo er das Speisewasser vor dessen Eintritt in die Speisepumpe erwärmt (Fig. 104). *A* ist das Blaserohr eines solchen Vorwärmers, welches den Dampf zuerst ins Reservoir *BC* leitet, *DE* ist das Ausgussrohr der Kaltwasserpumpe; dasselbe ist mit vielen kleinen Löchern versehen, welche das Wasser strahlenförmig nach *BC* führen, wo es vom Dampfe erwärmt grösstentheils durch die bei *C* mündende Speisepumpe in den Dampfkessel gedrückt wird. Das überflüssige Wasser fliesst durch die mit Schwimmer *S* versehene Röhre *FGH*, der übrige Dampf durch Röhre *K* ab.

Der Condensator selbst ist ein gusseisernes Gefäss *AB* (Fig. 105), welches von aussen stets mit kaltem Wasser umgeben ist, und in welches auch stets kaltes Wasser (Injections- oder Einspritzwasser) in einem feinen Strahlenbündel einströmt. Das kalte Wasser wird durch die Kühlwasserpumpe *C* und Rohr *DD* in das Reservoir *EFG* geführt, welches den Condensator umgibt. Apparat *H* dient zum Einspritzen in den Condensator selbst. In diesen Apparat tritt das Wasser von unten aus dem Reservoir *EFG*, und durch das mit einem Seiherbleche geschlossene Mundstück *HK* in den Condensator, und zwar mit grosser Geschwindigkeit, da der Condensator fast luftleer ist. Ein Ventil an Hebel *L* und Stange *LH* dient zum Reguliren des Injectionswassers. Die Luftpumpe hat zum Zweck, die im Einspritzwasser befindliche atmosphärische Luft und den nicht condensirten Dampf, sowie das condensirte Wasser fortzuschaffen. Es ist eine Saugpumpe mit durchlöchertem Kolben *O*, Saugventil *M* und Druckventil *N*; bei *N* fliesst das warme Wasser in das Heisswasserreservoir *NO*, ein kleiner Theil davon wird durch die Speisepumpe mittels des Saugrohrs *O* dem Kessel als Speisewasser wieder zugeführt. Das Ausblaserohr *R*, welches ein nach aussen sich öffnendes Ventil hat (Ausblaseklappe), dient zum Ableiten der Luft, welche sich bei längerer Ruhe der Maschine im Condensator sammelt. Um den Druck im Condensator zu messen, dient die Barometerprobe, ein verkürztes Barometer.

C) Anordnung der Maschinentheile.

Die Dampfmaschine erzeugt wie die Wassersäulenmaschine zunächst nur eine auf- und abgehende Bewegung des Kolbens. Mittels eines Hebels lässt sich derselbe weiter fortpflanzen, wenn die Art der Arbeit eben auch nur eine solche Bewegung erfordert. Soll aber

Fig. 105.



eine Kreisbewegung entstehen, so ist eine Zwischenmaschine nöthig. Dieselbe besteht aus der Kurbel oder dem Krummzapfen, der Kurbel-, Lenk- oder Pleielstange, endlich dem Schwungrade.

Die Kurbel *CA* (Fig. 106) ist ein Theil der Welle *C*, durch die Kurbelstange *AB* ist sie mit der Kolbenstange *BF* verbunden. Die Gradführung *B* dient dazu, dass der Stangenkopf *B* von der Kurbelstange nicht zur Seite gezogen wird. Damit ferner die Kurbelwelle *C* bei der veränderlichen Wirkung der Kurbelstange sich nicht ungleichförmig bewegt, ist ein an der Peripherie schweres Schwungrad angebracht.

Die Maschinen theilt man ein:

I. Nach der Anzahl der Cylinder in ein- und zweicylindrige.

II. In Hinsicht auf deren Art in solche mit festen und mit beweglichen Cylindern Im ersten Falle können die Cylinder sein vertical, horizontal oder geneigt, im zweiten schwingend oder rotirend.

III. Der Dampfwirkung nach sind die Maschinen einfach oder doppelt wirkend,

IV. In Rücksicht auf die Uebertragung

Fig. 106.

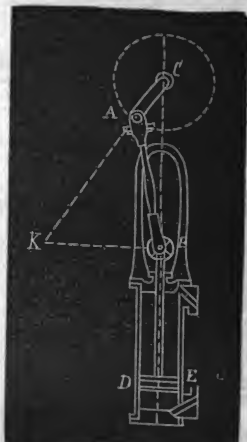
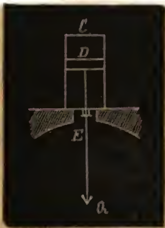


Fig. 107.



der Kraft direct oder indirect wirkend. Im letzteren Falle sind die Maschinen in solche mit und ohne Balancier zu theilen.

Direct rotirend wirkende, sogenannte Rotationsmaschinen sind zwar vorgeschlagen worden, haben aber nie allgemeinere Verbreitung gefunden. Bei ihm würde der Dampf auf die Schaufeln eines Rades strömen und dies direct in Bewegung setzen.

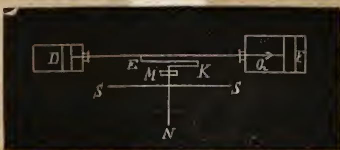
Eine einfach und direct wirkende Maschine (Fig. 107) wirkt unmittelbar durch die Kolbenstange *DE*, an welcher sich die Last *Q* befindet, welche mit dem Kolben durch den Dampf emporgehoben wird, und durch eigene Schwere wieder sinkt.

Bei der einfachen Maschine mit Balancier (Fig. 108) greift die Kolbenstange *DE* ins Balancier *AOB*, welches sich um *O* dreht, *AL* ist das Verbindungsglied beider, an Stange *BQ* ist die Last angebracht.

Fig. 108

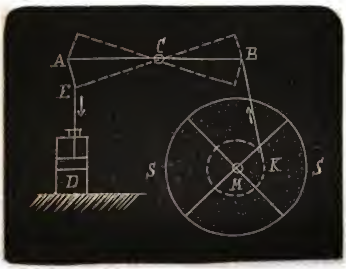


Fig. 109.



Bei der liegenden, doppelt und direct wirkenden Maschine bewegt der Kolben *D* (Fig. 109) mittels der Stange *DF* einen zweiten Kolben *F*.

Fig. 110.

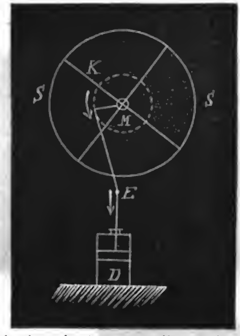


Kurbelstange *EK* und Kurbel *MK* sowie Schwungrad *SS* dienen zur Erzeugung einer regelmässigen Bewegung.

Bei der doppeltwirkenden Maschine mit Balancier und Drehbewegung (Fig. 110) ist *MK* der Krummzapfen, *BK* die Lenkstange, *SS* das Schwungrad.

Maschinen ohne Balancier (Fig. 111)

Fig. 111.



und ohne Lenkstange (Fig. 112) sind leicht verständlich. Die letztere enthält zugleich einen schwingenden Cylinder, der ebenso wie die andern doppelt wirkenden Maschinen bei *F* mit einem Leitungsapparat versehen ist.

Die schwingende Bewegung geht in eine drehende über, wenn die Entfernung *CM* der Schwingungsaxe *C* von der Drehaxe *M* kleiner als die Länge *MK* des Kurbelarmes ist.

Fig. 112.



Die zweicylindrige doppeltwirkende Maschine ohne Balancir-

Fig. 113.



Fig. 114.

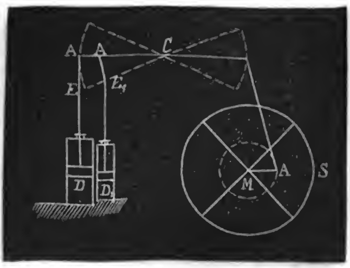


Fig. 115.



stange nach Maudslay (Fig. 113) hat 2 Kolbenstangen BD durch Querhaupt BAB verbunden, welche durch eine dritte Stange AE mit einem zweiten Querhaupt E verbunden ist, welches in einer Führung zwischen beiden Cylindern sich bewegt, und mit der Kurbelstange in Verbindung steht.

Die Woolfsche zweicylindrige Maschine (Fig. 114) hat 2 ungleiche Cylinder, deren Kolben gleichzeitig auf- und niedergehn, und durch die Kolbenstangen DE und D_1E_1 in ein Balancier ACB eingreifen. Der Dampf wirkt erst im kleineren Cylinder und tritt dann in den grössern.

Bei der Maschine mit 2 schiefliegenden Cylindern (Fig. 115) beschliessen die Kolbenstangen DE und D_1E_1 an die Kurbeln MK und MK_1 an. Winkel $KMK^1 = DMD_1 - 90°$. Bei den Dampfwagen liegen beide Cylinder auf einer Seite, und dann ist $DAD = 0$, $KMK^1 = 90°$.

Die innere Steuerung wird durch die Maschine selbst auf- und abgeschoben, dies geschieht entweder mittelst des Excentrik, einer excentrischen Scheibe, oder mittelst oscillirender Hebel; das erstere wird gewöhnlich bei doppelwirkenden, die letztern bei einfachwirkenden Maschinen angewandt, die keine Kreisbewegung haben.

Das Excentrik kommt in verschiedenen Formen vor. Am gewöhnlichsten ist das Kreisexcentrik, bestehend aus einer gusseisernen cylindrischen Scheibe ACA (Fig. 116) die sich um Axe D dreht, welche nicht durch den Mittelpunkt C geht und an der Schwungwelle angebracht ist; sie wird von einem eisernen oder messingenen Bande umgeben, welches an eine aus 2 Eisenstäben bestehende Stange ABA (Excentrikstange) anschliesst. Das Ende dieser Stange ist mit der Handhabe H versehn und greift in den Ort des Winkelhebels KB, an dessen anderm Ende die Schiebestange sich befindet. Ein dritter Arm KF trägt ein Gewicht G, um das der Schieber-

Fig. 116.

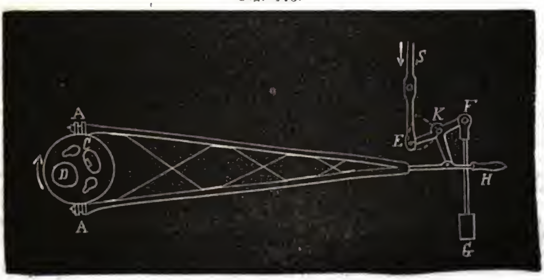
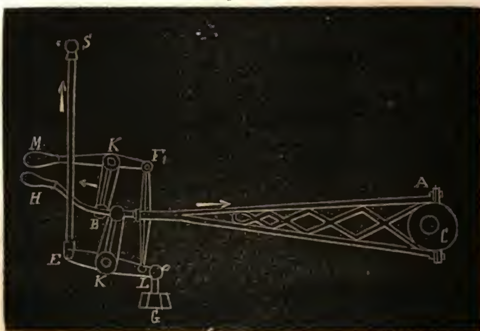


Fig. 117.



stange auszugleichen. In dem der Mittelpunkt *C* des Excentrik bei jeder Drehung der Schwungwelle einen Kreis beschreibt, wird die Scheibe um die Entfernung *CD* auf- und abgeschoben, die Lenkstange geht also um das Stück 2 *CD* hin und zurück; diese Bewegung wird auf die Schieberstange übertragen und das Schieberventil auf und ab geschoben.

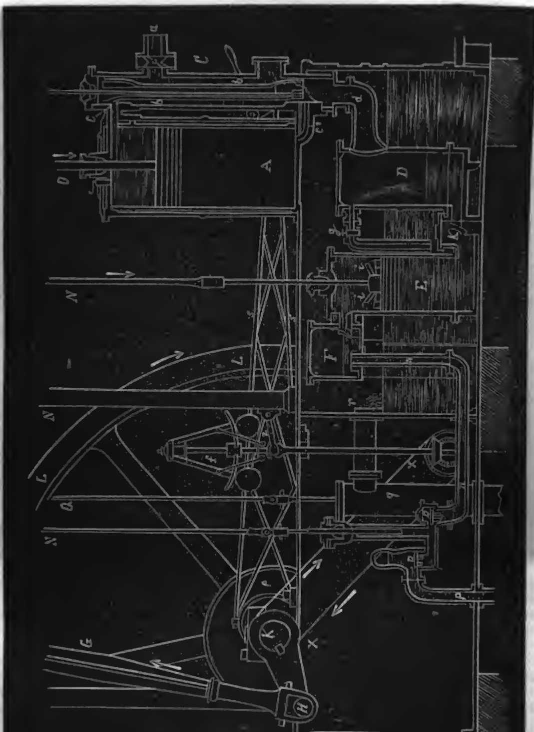
Es ist bei manchen Maschinen nöthig, sie zu jeder Zeit umsteuern zu können, d. h. ihre Bewegung in die entgegengesetzte zu verwandeln. Dazu muss man der Steuerung die entgegengesetzte Stellung geben.

Dies geschieht, wenn das Excentrik (Fig. 117) noch mit einem zweiten Winkelhebel $E_1 K_1 B_1$ verbunden ist, welches durch die Stange $E_1 L$ mit dem ersten zusammenhängt. Beim Umsteuern wird beim mittleren Stande des Dampfkolbens die Excentrikstange mit ihrem Auge von dem Bolzen *B* des ersten Hebels abgehoben und mittelst der Handhabe *M* dem obern Hebel so zu bewegt, dass das Auge über dem Bolzen B_1 liegt. — Die Gesammtanordnung einer Watts'chen Niederdruckmaschine kann am besten als Schema für die Dampfmaschinen überhaupt dienen. *A* (Fig. 118) ist der Dampfcylinder, *B* der Triebkolben, *C* die Dampfkammer, in welcher der durch das Dampfrohr *a* zugeleitete Dampf durch den Schieber *bb* vertheilt, bald über bald unter den Kolben tritt. *D* ist der Condensator, *E* die Luftpumpe. Der durch Rohr *d* aus dem Cylinder in den Condensator tretende Dampf wird hier condensirt. Die Pumpe *E* führt die ausgepumpte Luft und das Wasser in Reservoir *F*, wo die Luft durch Oeffnungen im Deckel entweicht, das Wasser zum grössten Theil durch ein Seitenrohr abfliesst, zum kleineren Theil auf dem Wege *nn* in die Speisegänge *m* fliesst und durch Rohr $oo_1 p$ in den Dampfkessel gedrückt wird. Kaltwasserpumpe *q* findet sich hinter der Speisepumpe; sie führt fortwährend kaltes Wasser durch Rohr *qr* in das Reservoir, welches *D* und *E* umgibt. *O* ist die Kolbenstange, *NMQ* die Luftpumpe; Speise- und Kaltwasserpumpenstangen, alle 4 befinden sich an dem hier nicht sichtbaren Balancier, welches durch Watt'sches Parallelogramm (vergl. den entsprechenden Artikel) geführt wird. Die Kurbelstange theilt die schwingende Luft dem Krummzapfen *HK* mit, und durch das Schwungrad *LL* wird dieselbe in eine drehende verwandelt. Auf der Welle dieses Rades sitzt das Kreisexcentrik, welches durch die Lenkstange *st* und den (nicht sichtbaren) Winkelhebel die Steuerstange auf und ab bewegt.

In *f* ist der Centrifugalregulator (vgl. den entsprechenden Artikel) angebracht, der durch eine Schnur ohne Ende *xx* und das Räderwerk *v* mit der Schwungradwelle verbunden und durch dieselbe umgedreht wird. Dieser Regulator steht durch seine Stangen und den Hebel *z* mit dem Drosselventil im Dampfrohre der Art in Verbindung, dass bei zunehmender Geschwindigkeit, wobei die Metallkugeln auseinandergehn, das Ventil geschlossen, also der Dampfzutritt verhindert wird.

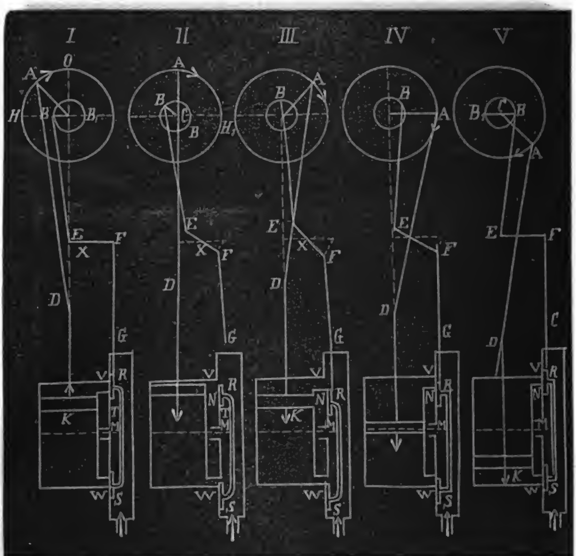
Die Querschnitt der Canäle, welche

Fig. 118.



der Dampf von der Dampfkammer bis zum Cylinder durchläuft, müssen eine gewisse Grösse haben, um dem Dampf ungehinderten Durchgang zu gewähren. Man macht denselben am besten gleich dem Querschnitte des Dampfrohres, also $\frac{1}{25}$ der Kolbenfläche, bei Hochdruckmaschinen $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{15}$. Die Mündung der Wege ist aus dem Grunde mehr breit als hoch, damit die Bewegung des Schiebers weniger Arbeit erfordert, das Verhältniss der Breite zur Höhe ist 4 zu 1 auch 5 zu 1 Da aber die Dampfwege auch nach und nach geschlossen und geöffnet werden, so ist der Gleichmässigkeit der Bewegung wegen nöthig, dass der Dampfweg schon dann sich zu öffnen und zu schliessen beginnt, wenn der Kolben seinen Weg noch nicht ganz vollendet hat. Das nennt man Voreilen

Fig. 119.



des Schiebers. Dazu sind gewisse Verhältnisse zwischen den Dimensionen der Dampfwege und des Schiebers und gewisse Stellungen des Excentrik zum Krummzapfen nöthig. Das Voreilen des Schiebers in Bezug auf den Abfluss beträgt $\frac{1}{20}$ bis $\frac{1}{15}$, d. h. der Schieber stellt beim höchsten oder tiefsten Kolbenstande eine Abflussöffnung her, deren Höhe $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{15}$ von dem ganzen Wege des Schiebers ist. In Bezug auf den Dampfzutritt ist das Voreilen aber nur $\frac{1}{100}$.

Seien *V W* und *M* (Fig. 119) die drei Dampfwege; *V* führt den Dampf über *W* unter den Kolben, *M* in die freie Luft oder den Condensator. Vor seinem Eintritt in den Cylinder umgibt der Dampf den Schieber von Aussen, und geht durch *W*, wenn derselbe heraufgelassen, durch *V*, wenn er herabgelassen ist. (Diese Einrichtung ist bei den Hochdruckmaschinen gewöhnlich, während bei den Niederdruckmaschinen gewöhnlich der Dampf durch die Oeffnung *M* eintritt, und nach seiner Wirkung den Schieber von Aussen umgibt.)

In der mittlern Stellung des Schieber I und V ist der Cylinder völlig geschlossen, bei Herabrücken in II öffnen sich eben beide Kanäle; in der tiefsten Stellung III sind sie ganz offen, und beim Heraufrücken IV beginnt wieder der Abschluss, der in V vollendet ist. Es soll aber ein Voreilen des Schieber stattfinden, d. h. beim höchsten und tiefsten Kolbenstande die Wege schon etwas eröffnet sein. Dies geschieht, wenn, wie hier, die Stellungen I und V etwas vor dem höchsten und tiefsten Kolbenstande eintreten. Die Breite der Schieberfläche *RT* wirkt ebenfalls auf Beginn, Zeit und Ende des Verschlusses ein.

Um nun zu ersehen, welche Stellung des Excentrik gegen den Krummzapfen die bezeichneten Schieberstellungen erfordern, ist etwas über die Bewegung dieser Maschinentheile voranzuschicken.

Sei *A* der Mittelpunkt der Warze der

Fig. 120.

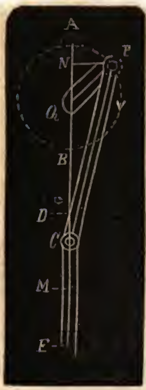


Fig. 121.



Kurbel, C die Drehaxe derselben, $CA=r$ (Fig. 120) wenn derselbe Weg AP zurücklegt, vom höchsten (todten) Punkt zu einem beliebigen, so wird Lenkstange $AD=l$ in PQ gelangen, also der Weg des Stangenendes D in der Centrallinie wird sein:

$$DQ=AN+NQ-AD,$$

oder wenn $DQ=s$, Winkel $ACP=\beta$ gesetzt wird:

$$s=r-r\cos\beta+\sqrt{l^2-r^2\sin\beta^2}-l$$
$$=r(1-\cos\beta)-l\left(1-\sqrt{l-\frac{r^2\sin\beta^2}{l^2}}\right),$$

oder da $\frac{r}{l}$ sehr klein ist, annähernd:

$$s=r(1-\cos\beta)=\frac{r^2\sin\beta^2}{2l}.$$

Für das folgende soll sogar:

$$s=r(1-\cos\beta)$$

gesetzt, also l unendlich gross gedacht werden. Denkt man sich eine Warze, die grössern Durchmesser als der Warzenkreis hat, so ist dies eben ein Excentrik, und diese Formel gilt auch für letzteres. Bedenkt man nun, dass der Dampfschieber durchs Excentrik, die Kurbel aber durch den Kolben gestellt wird, so folgt, dass bei der mittlern Stellung des Schieber auch das Excentrikmittel in der Mitte O (Fig. 121), die Warzenaxe O_1 aber um einen Winkel $O_1CA=\alpha$ vor dem todten Punkte A stehen soll, weil ja dies vor Beendung des Spieles eintreten soll. Dreht sich nun die gemeinschaftliche Welle des Excentrik und der Kurbel im Winkel $OCP=\beta=O_1CP_1$, so ist der Weg des Schieber

$$MP=r\sin\beta;$$

während dieser Zeit aber legt der Kolben den Rest AE seines Aufganges, und den Weg AM_1 seines Niederganges zurück. Die Entfernung von seinem mittleren Stande C ist also;

$$CM_1=r_1\cos(\beta-\alpha).$$

Setzt man nun $MP=y$, $CM_1=x$, für β alle Werthe von 0 bis 2π, so hat man die Beziehung der Kolben zur Schieberstellung vor.

Aus den Gleichungen:

$$\frac{y}{r}=\sin\beta,$$

$$\frac{x}{r_1}=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha,$$

$$\text{oder}\quad \frac{x}{r_1}\cos\alpha+\frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha=\cos\beta,$$

erhält man durch Elimination von $\sin\beta$:

$$\frac{y^2}{r^2}+\left(\frac{x}{r_1\cos\alpha}+\frac{y}{r}\operatorname{tg}\alpha\right)^2=1$$

offenbar die Gleichung einer Ellipse.

Denkt man sich also x und y als Coordinaten, so erhält man diejenige Curve, welche die Beziehung der Schieber- zur Kolbenstellung versinnlicht, und dies ist eine Ellipse. Es ist hierbei nicht gradezu nöthig, x und y als rechtwinklige Coordinaten zu betrachten. Mögen dieselben daher den Winkel λ mit einander machen, und führen wir mit Beibehaltung des Anfangspunktes neue rechtwinklige Coordinaten ξ und η ein, wo die Axe der ξ mit der der y zusammenfallen soll, dann ist, wie leicht zu sehn:

$$\eta=-x\sin\lambda,\ \xi=y+x\cos\lambda,$$

$$x = -\frac{\eta}{\sin\lambda} = y = \xi + \eta\cot\lambda.$$

Es ist dann leicht zu sehen, dass das mit $\xi\eta$ multiplicirte Glied verschwindet, wenn man

$$\cos\lambda = \frac{r}{r_1}\sin\alpha$$

setzt, in welchem Falle also die Axen ξ und η die Hauptaxen sind.

Uebrigens ist dann die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{r^2\cos\alpha^2} + \frac{\eta^2}{r_1{}^2\sin\lambda^2} = 1,$$

also die Halbachsen gleich $r\cos\alpha$ und $r_1\sin\lambda$.

Die Figur (Fig. 122) zeigt nun die Bewegung des Dampfschiebers mittelst des Excentrik. Vom Dampfkolben *K* mittels der Kolbenstange *KD* und der Kurbelstange *DA* wird der Krummzapfen *CA* umgedreht, auf dessen Welle *C* das Excentrik festsitzt. Der Mittelpunkt *B* des letztern dreht sich wie die Warze eines zweiten Krummzapfens gemeinschaftlich mit der Welle *O*, beschreibt also einen Kreis mit Halbmesser *CB*. Der Schieber *RS*, dessen Bewegung oben betrachtet worden ist, ist auch die gegliederte Stange *FGR* mit dem gleicharmigen Hebel *EF* verbunden, welcher mittelst einer andern Stange *BC* an den Mittelpunkt *B* des Excentrik angeschlossen ist. Der Schieber bewegt sich also in entgegengesetzter Richtung, als wenn er unmittelbar in *E* an die Excentrikstange angebracht wäre, d. h. ganz so, als wenn er unmittelbar an einer Excentrik sich befände, dessen Warze B_1 gegenüber *B* läge.

Wäre nun ACB_1, d. h. der Centriwinkel zwischen Warzenmitte und Excentrikmitte gleich einem Rechten, so würde der Schieber *RS* in der Mitte stehn, wenn der Kolben *K* am Ende seines Weges sich befindet, und wenn Letzterer den halben Hub erreicht hat, Ersterer am Ende seines Weges sein. Das Voreilen des Schiebers also bedingt, dass

Fig. 122

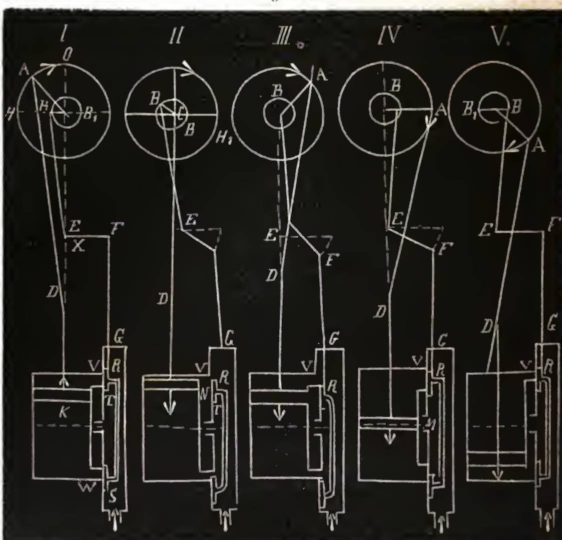
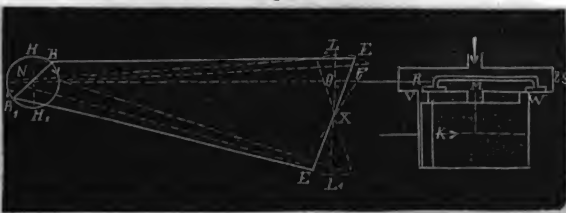


Fig. 123.



ACB_1 um eine gewisse Grösse $ACO = \alpha$ grösser als 90° sei.

Soll nun der Schieberweg verändert werden, um eine andere Zeit des Dampfabsperrens und Dampfzulassens zu erzielen, so muss der Drehungspunkt X des Hebel *EF* verändert werden. Dann verwandelt sich dieser Hebel in einen ungleicharmigen. Zu demselben Zweck dient ein Doppelexcentrik (Fig. 123).

B und B_1 sind die Mittelpunkte zweier um *C* laufenden Excentriks, die einander genau gegenüberstehn. Sie sind durch Stangen *BE* und B_1E_1 an den gleicharmigen Hebel EE_1 befestigt, dessen Drehpunkt beliebig gehoben und gesenkt werden kann.

Dieser Hebel ergreift den Kopf *F* der Schieberstange *FR*, mit der er jedoch nicht fest verbunden ist. Der Schieber wird also nur in der Richtung seiner Stange *FR* vom Hebel hin und hergeschoben. Nimmt man die Stangenlänge $BE = B_1E_1$ sehr gross gegen die Armlänge *CB* und *XE*, so ist anzunehmen, dass die Angriffspunkte *E* und E_1 in der Richtung *CF* denselben Weg machen, wie die Excentrikmitten *B* und B_1. Der Weg von E_1 ist nun dem von *E* entgegengesetzt, so dass der Mittelpunkt *X* des Hebels EE_1 seinen Ort behält, und der Weg eines andern Punktes um so viel kleiner als der Weg von *E* ist, als seine Entfernung *XF* kleiner als *XE* ist.

Ist also $s = NB = LE$ der Weg des Schiebers für den Fall, dass er unmittelbar an das Excentrik *B* angebracht wäre, so ist jetzt:

$$OF = \frac{XF}{XE} LE,$$

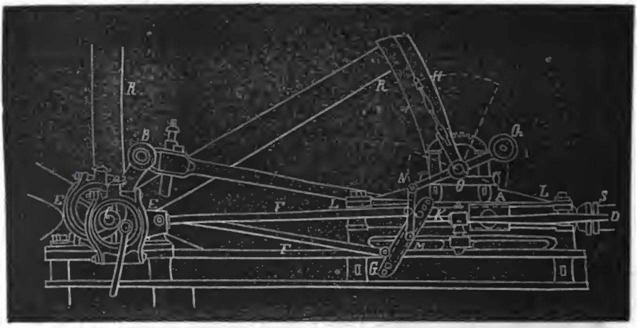
$$s_1 = \frac{y}{c} s$$

also der Weg, wenn der Angriffspunkt *F* der Schieberstange von der Hebelmitte *X* um $y = XF$ entfernt und $XE = XL = c$ die Armlänge ist.

Durch Heben und Senken des Centrums kann nun die Armlänge *XF* zwischen den Werthen $\pm C$ und also auch der Schieberweg zwischen den Werthen *s* und $-s$ beliebig ändern. Hebt man *X* in das Niveau der Schieberstange, so findet Ruhe statt; hebt man *X* darüber hinaus, so wird die Bewegung der Stange die entgegengesetzte. Es kann also auch ein Umsteuern stattfinden. Der Apparat heisst Stephenson'sche Coulissensteuerung. Auch die Ventile können durch Excentriks bewegt werden, jedoch eignen sich hierzu Hebelwerke besser, weil hierbei ein schnelleres Oeffnen und Schliessen stattfindet.

Bei Maschinen, wo keine Rotation stattfindet, ist natürlich nur die letztere Steuerungsart möglich. — Eine vollkommene Ventilsteuerung mit Excentrik hat z. B. die Révollier'sche Maschine. *A* ist (Fig. 124) der in der Leitung *LL* gleitende Kopf der Kolbenstange; diese wird mittels der Stopfbüchse *S* aus dem Dampfcylinder geführt. *AB* ist die Kurbelstange, *BC* die Kurbel, durch welche die Umsetzung der gradlinigen Bewegung von *A* in die rotirende Bewegung der Welle *O* des Schwungrades *RR* erfolgt. Auf dieser Welle sitzen 2 Excentriks *E* und E_1, an dem erstern ist noch die Kurbelstange *P* für die Speisepumpe angebracht; beide greifen mit ihren Stangen *F* und und F_1 in die Stephenson'sche Coulisse GG_1, in welche der Kopf der Stange *KD* eingreift, wodurch die Steuerventile bewegt werden. Die Coulisse ist in der Mitte *M* an einen um *O* drehbaren Hebel *NQ* aufgehängt, welcher mittelst des Gewichts *Q* äquilibrirt ist. Arm *OH*, der mit Hebel *NQ* ein Ganzes bildet, dient, um die Coulisse so zu stellen, dass sie den Stangenkopf *K* in jeder beliebigen Stelle zwischen den Aufhängepunkten *G* und G_1 ergreift. Die Einwirkung auf

Fig. 124.



die Ventile geschieht dann mittels der Stange *KD*.

Die Steuerung der Ventile durch Hebel- und Sperrklinkenapparat geschieht im Wesentlichen wie bei der Wassersäulenmaschine (vergleiche den betreffenden Artikel).

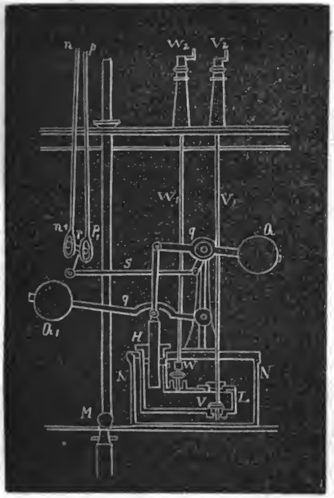
Soll lange vor dem Ende des Kolbenweges der Dampfzufluss aufgehoben werden, also Expansion eintreten, so muss noch eine Absperrungsklappe angebracht werden, welche durch ein besonderes Hebelwerk in Bewegung gesetzt wird, oder der Mechanismus ist so einzurichten, dass zwar Zulass- und Ablassventil sich gleichzeitig eröffnen, jedoch das Zulassventil sich eher als das jenseitige Ablassventil schliesst. Dies wird durch die am Steuerbaume angebrachten Knaggen bewirkt. Dasselbe wird auch durch den Expansionsschieber erreicht, von dem sogleich die Rede sein soll.

Einfach wirkende Maschinen bedürfen aber auch noch besonderer Vorrichtungen zur Regulirung ihres Ganges.

Ein Stellventil im Dampfrohre regulirt die Geschwindigkeit. Dasselbe kann mit der Hand gestellt werden. Der Kolbenweg wird regulirt entweder durch Heben und Senken des Lagers der Einlassklappe, oder Veränderung der Stellung der Knaggen am Steuerbaume. Zur Regulirung der Zeit des Kolbenspieles aber dient der Katarakt, ein Apparat, durch welchen am Ende jedes Kolbenspieles eine beliebige Pause hergestellt werden kann. Einer der gebräuchlichsten Katarakten ist der folgende. Eine Wasserpumpe *HL* (Fig. 125) ist mit dem Mönchskolben *H* und zwei Ventilen *V* und *W* versehen; das erstere schliesst nach innen, das letztere nach aussen. Der Ausschub dieser Ventile aber kann durch die Stellung der Stangen V_1 und W_1 mit Hülfe der Kurbeln V_2 und W_2 beliebig geändert werden. Der ganze Pumpenkörper befindet sich in dem mit Wasser angefüllten Kasten *NN*. Wird der Pumpenkolben aufgezogen, so fliesst durch Ventil *V* Wasser aus dem Kasten in den Pumpenkörper, beim Niedergange wird durch Ventil *W* das Wasser aus dem Pumpenkörper in den Kasten zurückgedrängt. Zum Auf- und Niederziehen aber dienen zwei mit Gewichten *Q* und Q_1 beschwerte Hebel *q* und q_1; der eine davon *q* hat jedoch noch einen dritten Arm, welcher mittels einer horizontalen Stange *s* an einen andern dreiarmigen Hebel *r* angeschlossen ist, dessen beide Arme in die Scheeren n_1 und p_1 der Stangen *n* und *p* eingreifen. Dieses sind die Stangen, welche durch ihr Auf- und Absteigen die Sperrklinken aushaken, wodurch Gewichte niederfallen und die Ventile sich öffnen.

Während des Kolbenaufganges nun ergreift eine besondere Knagge *M* des Steuerbaumes den Hebel q_1, hebt Gewicht Q_1, wodurch das Gewicht *Q* in Thätigkeit tritt und den Kolben *H* des Kataraktes hebt, und zwar um so langsamer, je mehr der Hub des Saugventils *V* beschränkt ist. Das niedersinkende Gewicht aber hebt durch *s* und *r* die Stange nn_1, was durch Aushaken eines Gewichtes den Anfang eines neuen

Fig. 125.



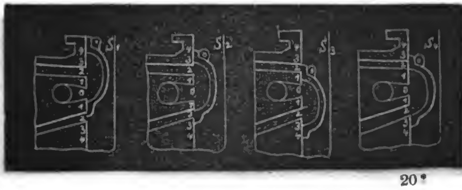
Spiels einleitet; beim Niedergange des Dampfkolbens zieht sich die Knagge unter q_1 zurück, Gewicht Q_1 drückt auf den Kolben H mittels des Hebels q_1 und es wird Wasser aus dem Pumpenkörper herausgedrückt; der Mechanismus *sr* macht dann eine rückgängige Bewegung, die Stange $p_1 p$ wird gehoben, es wird ein anderes Gewicht ausgehakt, welches den Aufgang des Dampfkolbens bewirkt. Die Zeit des Auf- und Niederganges des letzteren hängt also von der Oeffnung der Ventile V und W ab, welche beliebig regulirt werden können.

Wir kommen jetzt zum Expansionsschieber, d. h. demjenigen, welcher den Dampf während des Kolbenweges absperrt.

Schon oben wurde aber gezeigt, dass ein solches Absperren durch einen einzigen Vertheilungsschieber bewirkt werden kann, wenn man ihn so einrichtet, dass er noch über die Dampfwege hinausgreift (eine Bedeckung erhält).

Aber noch vollständiger wird dies durch ein gezahntes oder abgestuftes Excentrik erreicht. Ein solches besitzt die Saulnier'sche Maschine. Das Excentrik so-

Fig. 126.



wohl wie die Welle wird hier von einem mit Frictionswalzen versehenen Doppelrahmen umfasst, mit dem eine horizontale Excentrikstange fest verbunden ist. Ein Winkelhebel verbindet damit die verticale Schieberstange. Das Excentrik hat nun vier Stufen (Fig. 126), zwei aufsteigende und zwei absteigende, a, b und a_1, b_1. Im Anfang sei der Schieber oben wie S_1, beim weitern Umdrehen gelangt die erste Stufe a an ein Rädchen rechts r, der Rahmen wird nach rechts, der Schieber nach unten geschoben in die Stellung S_2, dann schiebt sich die zweite Stufe b unter r, die Excentrikstange wird weiter rechts, der Schieber noch mehr nach unten geschoben, so dass er die Stellung S_3 annimmt. Dann gelangt aber die Stufe a_1 unter ein Rädchen links r_1, das Excentrik schiebt die Excentrikstange nach links, den Schieber aufwärts in Stellung S_4. Endlich kommt Stufe b_1 unter r_1, die Excentrikstange geht weiter links, und der Schieber nimmt Stellung S_1 an.

Damit die Dampfwege rechtzeitig geöffnet werden, muss seine innere Länge viermal, seine äussere sechsmal, sein Weg dreimal so gross sein als die Höhe eines Dampfkanals oder einer Zwischenwand. Ferner muss er beim mittleren Kolbenstande um $\frac{1}{3}$, beim Ende des Hubes um die andern $\frac{2}{3}$ seines Weges fortrücken, die Stufe b muss also die doppelte Höhe der Stufe a haben.

Die Stufen sind folgendermaassen zu construiren.

Zwei Durchmesser AA_1 und BB_1 (Fig. 127) theilen das Excentrik in vier Theile, die jedoch ungleich sein können. Am Endpunkte jeder Linie befindet sich eine Stufe, A und B sind die aufsteigenden, A_1 und B_1 die absteigenden, und zwar haben B und B_1 die doppelte Höhe von A und A_1. Damit sich das Excentrik nicht zwischen den Rahmen klemme, müssen die Stufen so geformt sein, dass alle Durchmesser, welche gegenüberliegende Punkte derselben ver-

Fig. 127.



binden, gleich der inneren Weite des Rahmens sind.

Da das Excentrik ferner nicht vom Rahmen selbst, sondern von den im Innern desselben befindlichen Frictionswalzen umfasst wird, so ist in einem dem Walzenhalbmesser gleichen Abstande von der krummen Linie ABA_1B_1 eine äquidistante Curve aba_1b_1 zu zeichnen, nach welcher die Gestalt des Excentrik zu bilden ist. Es geschieht dies, indem man aus den Punkten von ABA_1B_1 Kreise mit dem Walzenhalbmesser beschreibt und die Berührungscurve dieser Kreise zeichnet.

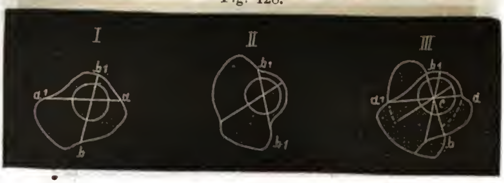
Um aber den Expansionsgrad zu ändern, setzt man das Excentrik aus zwei Scheiben I und II (Fig. 128) zusammen, so dass der Scheibe I die Stufe b, der Scheibe II die Stufe a fehlt. Beide werden mittels einer Schraube über einander befestigt. Decken sich die gemeinschaftlichen Theile, so hat man das obige Excentrik, dreht man aber I um irgend einen Winkel, etwa wie in III, so werden die Centriwinkel ab_1 und a_1b grösser, ab und a_1b_1 kleiner, so dass das Absperren später stattfindet.

Um den Centriwinkel $acb_1 = a_1cb$, welcher einer gewissen Absperrung entspricht, zu berechnen, haben wir, wenn β dieser Winkel, s der Kolbenweg ist, schon früher gefunden:

$$s = r(1 - \cos\beta),$$

also wenn:

Fig. 128.



$$\frac{1}{n} = \frac{s}{2r}$$

das Verhältniss des augenblicklichen zum ganzen Kolbenwege ist:

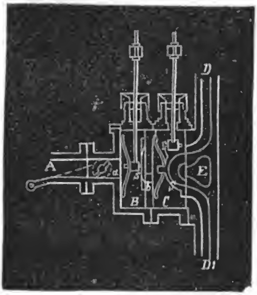
$$\cos\beta = 1 - \frac{2}{n},$$

also wenn $\frac{1}{3}$ des Kolbenweges abgesperrt werden soll:

$$\cos\beta = \tfrac{1}{3}, \quad \beta = 70\tfrac{1}{2}{}^{\circ}.$$

Es gibt aber auch wirklich in einer besonderen Kammer befindliche Expansionsschieber. Derselbe kann einfach oder durchlocht sein. Im ersten Falle sperrt er beim Aufliegen den Dampf

Fig. 129.



ab (Fig. 129), im zweiten lässt er ihn durch (Fig. 130). Bei beiden Arten ge-

Fig. 130.

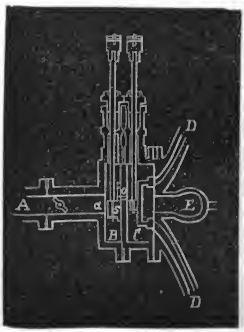
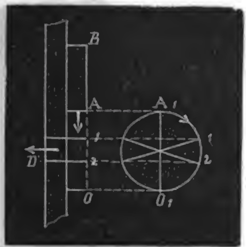


Fig. 131.



langt der aus dem Dampfrohre *A* strömende Dampf durch Mündung *a* in die Dampfkammer *B*, dann durch Mündung *b* in die zweite Kammer *C*, von hier auf den Wegen *D* oder D_1 in den Cylinder. *S* ist der gewöhnliche Schieber, *E* der Kanal für den benutzten Dampf, *s* der Expansionsschieber, welcher die Mündung *b* verschliesst und öffnet.

Ist er massiv (Fig. 129), so kann er sich entweder nur auf einer oder beiden Seiten der Dampfmündung bewegen. Im ersten Falle (Fig. 131) geht der Schieber *AB* nur mit dem Ende *A* vor der Dampfmündung *D* vorbei, also bei jedem Kolbenschube einmal hin und zurück, also macht er zwei Spiele, während Kolben und Vertheilungsschieber eins verrichten. Es muss also entweder ein zweites Kreisexcentrik vorhanden sein, welches doppelt so viel Umdrehungen macht als das des Vertheilungsschiebers, oder er wird durch eine elliptische Scheibe oder auch durch die Kurbelwelle mittels zweier Daumen bewegt. Soll

Fig. 132.

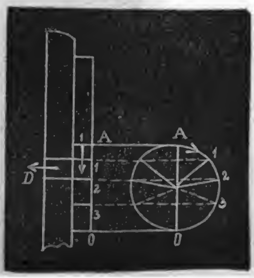
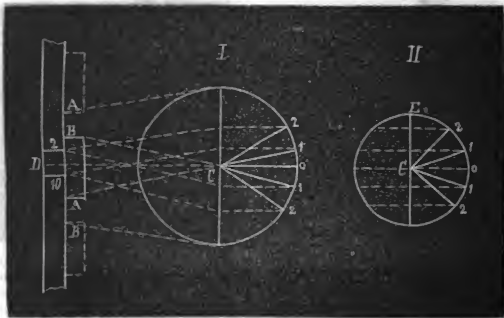


Fig. 133.



die Expansion verändert werden, so ist mittels einer Schraube die Länge der Schieberstange zu verändern.

Es rückt bei Verlängernng derselben der Schieber herab (Fig. 132). Der Weg während der Bedeckung wird folglich grösser, und zwar um das doppelte Stück O_2.

Es kann aber auch der Schieber von beiden Enden A und B aus (Fig. 133) absperren. Dann kann nur die Veränderung des Schieberweges Veränderung der Expansion herbeiführen. Während der Schieber den Weg:

$$s = A1 = B2$$

zurücklegt, findet nämlich Expansion statt. Dem entspricht der Winkel:

$$\beta = 0\,C\,1,$$

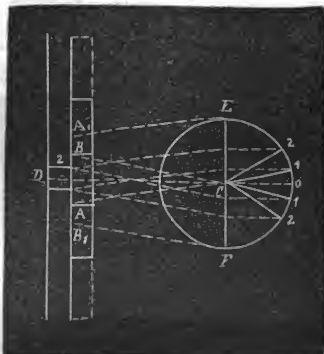
welchen das Excentrik zurücklegt, und hat man die Armlänge $CE = r$, so ist:

$$\sin \beta = \frac{s}{r};$$

also die Absperrungszeit wächst, wenn die Armlänge des Excentrik abnimmt.

Aehnlich verhält es sich beim durchlochten Schieber. Derselbe AB (Fig.

Fig. 134.



134) sperrt den Dampf ab während des Weges:

$$2s = 2A_1 + A_1 2 + 1B_1 + B_1 1,$$

wo das Excentrik den Winkel:

$$2\beta = 2 \cdot EC2 + 2 \cdot FC2$$

zurücklegt, und es ist:

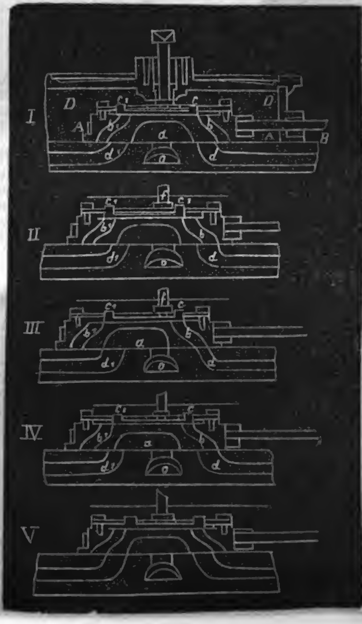
$$\cos\beta = \frac{r-s}{r}.$$

Auch hier wächst die Absperrungszeit, wenn der Arm abnimmt.

Bei dieser Einrichtung sind Vertheilungs- nnd Expansionsschieber von einander getrennt, sie könneu aber auch über einander liegen. In diesem Falle ist aber noch zu unterscheiden, ob der anf dem Vertheilungsschieber aufliegende Expansionsschieber durch den erstern oder durch eine besondere Stange bewegt wird.

Im ersteren Falle enthält der Vertheilungsschieber AA (Fig. 135) ausser der gewöhnlichen Höhlung a noch die Kanäle b und b_1; der bei D zuströmende Dampf wird durch dieselben in die Dampfwege d und d_1 geführt. Die ebene Platte cc_1 bildet den Expansionsschieber; er ist am Ende mit den Nasen c und c_1 ausgerüstet, und eine Leitung auf dem Rücken des Vertheilungsschiebers verschiebbar. Zwischen den Nasen befindet sich die elliptische Scheibe f, sie ist durch eine Welle ef drehbar und durch einen Hebel stellbar. Wird der Schieber AA fortgeschoben, so geht cc_1 nur so weit mit, bis eine Nase den Umfang der elliptischen Scheibe berührt, so dass der Expansionsschieber den einen oder den andern der Kanäle b, b_1 bedecken kann.

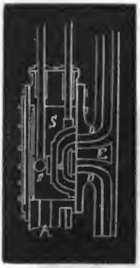
Fig. 135.



Stellung I ist die mittlere des Vertheilungsschiebers, wo der Dampfkolben am Ende des Weges ist, in II hat der Kolben einen Theil des entgegengesetzten Weges zurückgelegt, in III schliesst der Schieber cc_1 den Dampfgang ab, der Steuerschieber ist am Ende des Weges, in IV ist der Steuerschieber zurückgegangen, in V in seiner mittleren Stellung, der Kolben aber am andern Ende des Weges.

Sei jetzt der Expansionsschieber *s* durch ein besonderes Kreisexcentrik bewegt (Fig. 136). Derselbe bedeckt dann

Fig. 136.



die Dampföffnung *a*, wenn der Vertheilungsschieber *S* seinen höchsten oder tiefsten Stand hat, oder es können auch (Fig. 137) zwei durch den Vertheilungsschieber *S* gehende Kanäle *a* und a_1 durch den Expansionsschieber abwechselnd geöffnet und verschlossen werden. In Stellung I versperrt *S* beide Dampfwege, der Treibkolben ist nahe dem Ende des Weges. In der tiefern Stellung II tritt *a* mit *D* in Communication, so dass frischer Dampf über den Kolben tritt und er niederzugehen anfängt, in Stellung III steht *a* grade über *D*, der Expansionsschieber *s* versperrt den Weg *a*, die Expansion beginnt also. In Stellung IV sind beide Schieber emporgestiegen, Kanal *a* noch verschlossen, in Stellung V ist nur der Verstellungsschieber gestiegen, der Expansionsschieber gesunken, *a* geöffnet; da der Vertheilungsschieber aber die mittlere Stellung eingenommen, so findet noch Absperrung statt. Der Kolben ist nahe am Ende des Niederganges. Jetzt steigt der Vertheilungsschieber gerade so herauf wie früher herab, die Absperrung erfolgt also wie früher. Uebrigens ist das Excentrik des Vertheilungsschiebers nahe 90°, das des Expansionsschiebers nahe 180° gegen den Krummzapfen zu stellen.

Es gibt auch eine Steuerung mit variabler Expansion, die Meiersche (Fig. 138). Der bei *A* zutretende Dampf geht bei Mündung *a* in die Dampfkammer. Erstere ist durch den kegelförmigen Spund *K* geschlossen. Die Vertheilung durch Schieber *S* erfolgt wie gewöhnlich. Es kommt nur darauf an, den Spund regelmässig einzusetzen und auszuheben. Zu dem Ende läuft, wie in II dargestellt, der Stiel *BH* dieses Kegels in

Fig. 137.

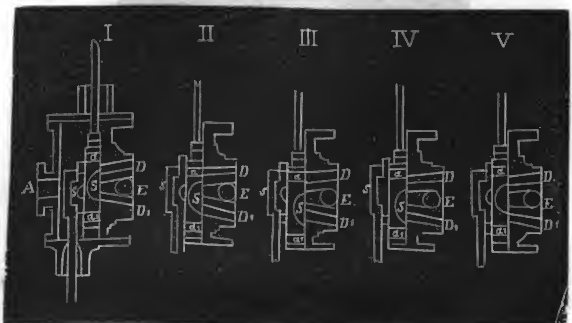
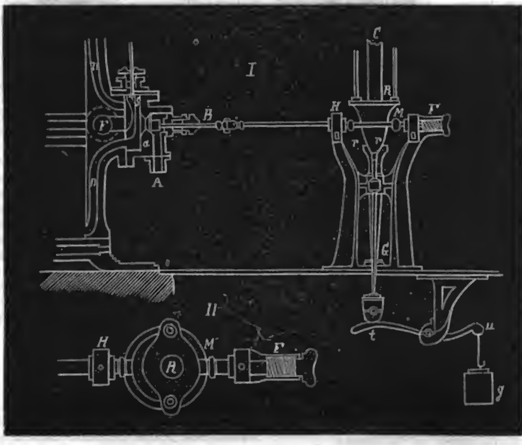


Fig. 138.



einem Ringe *HM* aus, und stemmt sich gegen die Spiralfeder *F*. Der Ring *HM* umfasst einen mit zwei Längenrippen versehenen Kegel *R*, der durch eine Spindel *CG* und die Maschine selbst in Umdrehung erhalten wird. Feder *F* schiebt den Ring in Richtung *MH*, dadurch den Spund *K* in die Mündung *a*, Hülse *R* bewegt mittels ihrer etwas spiralförmig gebildeten Rippen *r*, r_1 den Ring in der entgegengesetzten Richtung *HM*, zieht also den Spund aus der Mündung *a* zurück. Im ersteren Falle findet Absperrung, im letzteren Zufluss des Dampfes statt. Wenn Spindel und Hülse mit der Krummzapfenwelle in derselben Zeit gleich viel Umdrehungen machen, so wird bei jedem Spiele zweimal (beim Auf- und Niedergange) Dampf eingelassen. Hebt man aber die Hülse *R* höher, so kommt eine schwächere Stelle der Rippe *r* in die Ringebene, die Zeit der Oeffnung von *a* wird kürzer, umgekehrt wird sie länger, wenn man *R* höher stellt. Dies Heben und Niederlassen der Hülse wird, dem Bedürfniss an Dampf entsprechend, durch die Maschine selbst hervorgebracht, indem man sie mit dem Schwungkugelregulator durch vertikale Stäbe verbindet.

Bei den Woolf'schen Maschinen (auch Edward'sche genannt) wird Expansion dadurch hervorgebracht, dass man den Dampf, nachdem er in einem Cylinder gewirkt hat, in einen zweiten weiteren Cylinder leitet.

Es wird Dampf von 3 bis 4 Atmosphären Spannung verwendet; man lässt denselben im grossen Cylinder bis auf das Vierfache sich ausdehnen, worauf er dann condensirt wird. Die Kolbenstangen beider Cylinder befinden sich gewöhnlich an demselben Balancier, die des kleineren ist von innen, die des grösseren von aussen angeschlossen. Auch gehen beide Kolben gleichzeitig auf und nieder.

Die Legavrian'sche Maschine ist nach demselben Prinzip, aber sogar mit drei Cylindern versehen.

Bei der Sims'schen Maschine sind zwei Cylinder von verschiedener Weite vorhanden, die mit ihren Endflächen zusammenstossen. Die zugehörigen Kolben sitzen auf einer Kolbénstange, und der obere Theil des kleineren Cylinders ist mit dem unteren des grösseren durch ein Rohr verbunden, und dieser durch ein Ventil mit dem Condensator, während der Raum zwischen den Kolben immer mit dem Condensator communicirt. Da die Verbindungsröhre durch ein Ventil geschlossen werden kann, so kann man durch Schliessen desselben

den Dampf erst von oben nach unten wirken lassen, dann von unten nach oben, indem man aber das Ventil öffnet, wo dann der unten liegende grössere Kolben einen Ueberdruck ausübt. Die Sims'schen Maschinen sind also ihrem Prinzip nach einfach wirkende, insofern die Gesammtwirkung des Dampfes nach zwei entgegengesetzten Richtungen geht.

D) Leistung der Dampfmaschinen.

Bei Maschinen ohne Expansion ist die Theorie der Leistung eine sehr einfache, da hier der Kolben eine gleichmässige Geschwindigkeit hat.

Sei p der Dampfdruck auf den Quadratzoll, F der Inhalt der Kolbenfläche, so ist die Kraft des Dampfes:

$$P = Fp.$$

Sei s der Kolbenweg, so ist also die Arbeit während eines Auf- oder Niederganges:

$$Ps = Fsp = Vp,$$

wenn V das verbrauchte Dampfvolumen ist. Macht die Maschine n Spiele in der Minute, so ist der Weg des Kolbens in dieser Zeit $2ns$; sei v die mittlere Geschwindigkeit, so ist dann:

$$v = \frac{2ns}{60} = \frac{ns}{30}.$$

Die Leistung ist dann in der Secunde, vorausgesetzt dass vollständige Condensation stattfindet, also kein Gegendruck von der andern Seite des Kolbens stattfindet:

$$L = Pv = \frac{Fnsp}{30} = \frac{Vnp}{30} = Qp,$$

wenn Q die in der Secunde verbrauchte Dampfmenge ist. — Erleidet aber der Kolben einen Druck q auf den Quadratzoll, so ist:

$$P = F(p-q),$$

$$L = \frac{ns}{30} F(p-q) = \frac{n}{30} V(p-q) = Q(p-q).$$

q ist der Dampfdruck im Condensator, oder wenn keine Condensation stattfindet, der atmosphärische Druck (15,07 Pfund alt Gewicht oder 14,1 Zoll-Pfund auf den Quadratzoll) Sind V und Q in Cubikfuss, p und q in Quadratzoll gegeben, so kommt:

$$L = 4{,}8\, nV(p-q) = 144\, Q(p-q)$$

in Fusspfund. Sei V und Q in Cubikmetern, p und q in Quadratcentimetern gegeben, so ist dagegen:

$$L = 333{,}3\, nV(p-q) = 10000\, Q(p-q)$$

in Kilogrammmetern.

Diese Formeln gelten aber für Expansionsmaschinen nur für die Zeit, wo der Dampf nicht abgesperrt ist. Findet aber diese Absperrung statt, so kommt es auf den Zustand des Dampfes während dieser Zeit an. — Man nahm früher allgemein an, dass dann die Temperatur constant bleibt; da der Dampf sich ausdehnt, könnte dies nur unter der Annahme geschehn, dass von der Umgebung aus dem Cylinder die verlorene Wärme wieder zuströme. Dies ist höchstens dann möglich, wenn die Bewegung sehr langsam erfolgt. Dies kann im Allgemeinen nicht zugegeben werden, und es wird daher jetzt gewöhnlich nach Pambour angenommen, dass während der Expansion Temperaturabnahme erfolgt. Gehen wir von der ersten Voraussetzung zunächst aus, und legen wir das Mariotte'sche Gesetz zu Grunde, welches allerdings für Dampf nur annähernd richtig ist, so hat man, da das Gas sich bei constanter Temperatur ausdehnt, für die geleistete Arbeit:

$$P = vp \lg \frac{v_1}{v}.$$

(Vergl. den Artikel Wärme, S. 205, No. 11) Es ist hier Q die geleistete Arbeit, p, v Druck und Volumen im Anfang, v_1 das Volumen beim Ende der Expansion. Die Logarithmen sind natürliche.

Ist also s der Werth des Dampfkolbens, den er beim Eintritt der Expansion zurückgelegt hat, s_1 der ganze Kolbenweg, so ist:

$$V = Fs, \quad V_1 = Fs_1,$$

$$P = Fsp \lg \frac{s_1}{s}.$$

Hierzu kommt die Arbeit Fsp vor der Absperrung, also die Gesammtarbeit ist:

$$P_1 = Fsp\left(1 + \lg \frac{s_1}{s}\right)$$

$$= Fs_1 p_1 \left(1 + \lg \frac{s_1}{s}\right).$$

Unter p_1 den Druck am Schlusse verstanden. Findet aber ein Gegendruck q, dem die Arbeit $Fs_1 q$ entspricht, auf der andern Seite des Cylinders statt, so folgt:

$$P_1 = Fsp\left(1 + \lg \frac{s_1}{s} - \frac{q}{p_1}\right),$$

und die Arbeit in der Secunde folgt wie oben:

$$L = \frac{n}{30} Fsp\left(1 + \lg \frac{s_1}{s} - \frac{q}{p_1}\right)$$

$$= 144 \frac{nVp}{30}\left(1 + \lg \frac{s_1}{s} - \frac{q}{p_1}\right)$$

in Fusspfunden. Oder auch wenn Q die in der Secunde verbrauchte Dampfmenge von Spannung p ist:

$$L=144\,Qp\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{q}{p_1}\right)$$

in Fusspfunden.

Nach Morin soll diese Annahme gute Resultate geben.

Nach Pambour wird dagegen angenommen, dass während der ganzen Expansion der Dampf immer im Maximum der Spannung bleibt, dass also im Cylinder keine Condensation von Dampf stattfindet. Unter dieser Voraussetzung kann man (vergl. den Artikel Wärme, Seite 214) annähernd setzen:

$$\mu=\frac{\alpha}{\beta+p},$$

wo μ das specifische Dampfvolumen (Volumen der Gewichtseinheit Dampf) α und β Constante sind, also:

$$p=\frac{\alpha}{\mu}-\beta.$$

Ist s der Kolbenweg im Anfang der Expansion, s_1 zu irgend einer Zeit derselben, so ist:

$$\frac{1}{\mu}=\frac{s}{s_1},$$

und die Arbeit, während eines unendlich kleinen Weges ds:

$$Fpds_1=F\frac{\alpha s}{s_1}ds_1-F\beta\,ds_1,$$

also durch Integration, die Arbeit während der Expansion:

$$\int_{s_0}^{s_1}Fpds_1=P=F\alpha s\lg\frac{s_1}{s}-F\beta(s_1-s).$$

Im Anfange der Expansion war

$$\frac{1}{\mu}=\frac{s}{s}=1,\text{ also }\alpha=\beta+p,$$

also wenn p auf den Anfangswerth geht:

$$P=F(\beta+p)s\lg\frac{s_1}{s}-F\beta(s_1-s),$$

also wenn man die Arbeit während der Zeit, wo keine Expansion stattfindet, Fps hinzuzählt, die durch den Gegendruck q bedingte Fqs_1 aber abzieht:

$$P_1=F(\beta+p)s\lg\frac{s_1}{s}-F\beta s_1-Fqs_1+Fs(\beta+p)$$

$$=Fs(\beta+p)\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{\beta+q}{\beta+p}\,\frac{s_1}{s}\right),$$

oder wegen:

$$\frac{s_1}{s}=\frac{\beta+p}{\beta+p_1},$$

$$P_1=Fs(\beta+p)\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)=144\,V(\beta+p)\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)$$

in Fusspfunden, und die Leistung in der Secunde:

$$L=\frac{n}{30}\,144\,V(\beta+p)\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)$$

$$=144\,Q(\beta+p)\left(1+\lg\frac{s_1}{s}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)$$

in Fusspfunden.

Sind aber wie bei den Maschinen von Woolf 2 Cylinder vorhanden, sei F die Kolbenfläche des kleinern, in dem der Dampf ohne Expansion wirken soll, ferner s der Kolbenhub, mögen sich $F_1 s_1$ auf den grössern beziehn, sei p die Spannung des Dampfes im kleinern Cylinder, p_1 die während der Expansion, q der Gegendruck, (auf den Quadratzoll), so ist die Leitung während der Zeit, wo der Dampf keine Expansion erleidet:

$$Fps.$$

Die Leistung während der Fxpansion nach dem Mariotte'schen Gesetze:

$$Fsp\lg\frac{F_1 s_1}{Fs}-F_1 s_1 q,$$

und nach dem Pambour'schen:

$$Fs(\beta+p)\left[\lg\frac{F_1 s_1}{Fs}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right];$$

in beiden Fällen ist die verlorne Arbeit $F_1 s_1 q$ bereits in Rechnung gebracht. Es ist also die Gesammtleistung für die

Secunde berechnet nach der ersten Annahme:

$$L = \frac{n}{30} 144\, Vp \left(1 + \lg \frac{F_1 s_1}{Fs} - \frac{q}{p_1}\right)$$
$$= 144\, Qp \left(1 + \lg \frac{F_1 s_1}{Fs} - \frac{q}{p_1}\right),$$

und nach der zweiten:

$$L = 144\, Q(\beta + p) \left(1 + \lg \frac{F_1 s_1}{Fs} - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right)$$

in Fusspfund.

Die Bedenken gegen die erste Theorie, dass der Dampf während der Expansion seine Temperatur nicht ändere, sind bereits oben auseinandergesetzt. Aber auch das Pambour'sche Gesetz lässt sich mit den Grundbetrachtungen der mechanischen Wärmelehre nicht vereinigen. Denn da nach erfolgter Expansion die Temperatur des Dampfes ein Maximum sein soll, also nur von dem Volumen abhängig ist, so muss er dieselbe Wärmemenge enthalten (welche ja von Temperatur und Volumen allein abhängt), die Arbeit während der Expansion möge eine grössere oder geringere sein, während keine Wärme zufliesst, was der mechanischen Wärmelehre widerspricht.

Es giebt aber Theorien der Dampfmaschine, die auf letztere Wissenschaft sich stützen; dergleichen rühren von Clausius, Zeuner, Rankim und Andern her. Ohne uns auf das Mehr oder Weniger der Begründung derselben einzulassen, bemerken wir, dass dieselben praktische Verwerthung noch nicht gefunden zu haben scheinen, die Pambour'sche Betrachtung aber gut mit der Erfahrung übereinstimmt.

Wollte man näherungsweise annehmen, dass die Dämpfe dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze folgten, und während der Expansion kein Zufluss von Wärme stattfände, so käme man, indem man $\triangle\ Q = o$ setzt, wieder zu der Formel (vergl. Wärme Seite 205).

$$A = \frac{1}{k-1} p_1 v_1 \left(1 - \frac{v_1}{v_2}\right)^{k-1}$$

für die Leistung, wo v_1 auf den Anfangs-, v_2 auf den Schlusszustand geht, $k = \frac{c}{c_1}$ das Verhältniss der specifischen Wärme ist. Also wenn man v_1 und v_2 mit s und s_1 vertauscht, und F der Kolbeninhalt ist:

$$A = \frac{1}{k-1} Fpsk \left(\frac{1}{s^{k-1}} - \frac{1}{s_1^{k-1}}\right)$$

Also wenn man die Arbeit wegen des Gegendrucks abzieht, und die, welche von der Expansion verrichtet wird, hinzufügt:

$$A = Fps\left[1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{k-1}\right] - Fqs_1$$
$$= Fps\left[1 + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k-1}\left(\frac{s}{s_1}\right)^{k-1} - \frac{qs}{ps}\right],$$

oder wenn man mit Rankine setzt:

$$k - 1 = \frac{1}{q},$$

$$A = Fsp\left[10 - q\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{1}{q}} - \frac{qs_1}{ps}\right],$$

also die Arbeit in der Secunde:

$$L = 144 Qp\left[10 - q\left(\frac{s}{s_1}\right)^{\frac{1}{q}} - \frac{qs_1}{ps}\right]$$

in Fusspfund.

Für die zweicylindrige Maschine kommt dann:

$$L = 144\, Qp\left[10 - q\left(\frac{Fs}{F_1 s_1}\right)^{\frac{1}{q}} - \frac{qF_1 s_1}{pFs}\right].$$

Es ist jetzt die Leistung durch den verwandten Brennstoff auszudrücken.

Das Verhältniss des Dampfvolumen zum Wasservolumen (specificisches Dampfvolumen) war:

$$\mu = \frac{\alpha}{\beta + p}.$$

Ist also Q die verbrauchte Dampf-, Q_1 die Wassermenge, so hat man:

$$Q_1 = \frac{(\beta + p)\, Q}{\alpha},$$

und dessen Gewicht, den Cubikfuss Wasser zu 66 (alten) Pfund angenommen:

$$Q_1 \gamma = \frac{66(\beta + p)\, Q}{\alpha}.$$

Um $Q\gamma$ Pfund Wasser von der Temperatur t_1 in Dampf von der Temperatur t zu verwandeln, wird gebraucht die Wärmemenge:

$$W = (606{,}5 + 0{,}305\, t - t_1)\, Q\gamma$$

in Calorics, wofür annähernd zu setzen ist:

$$W=(640-t_1)\,Q\gamma,$$

also:

$$W=66\,(640-t_1)\,\frac{\beta+p}{\alpha}\,Q,$$

$$Q=\frac{\alpha\,W}{66(640-t_1)(\beta+p)}.$$

Ist w die Anzahl der Calorics, welche aus 1 Pfund Brennstoff entsteht, K der Brennstoffaufwand, so ist:

$$K=\frac{W}{w},$$

also:

$$K=66(640-t_1)\,\frac{\beta+p}{\alpha\,w}\,Q,$$

$$Q=\frac{\alpha\,w\,K}{66(640-t_1)(\beta+p)}.$$

Die Grösse w ist der im ersten Abschnitt dieses Artikels enthaltenen Tabelle zu entnehmen.

Setzen wir $t_1=40^\circ$, und nehmen für ein Pfund Kohle 7500 Kalorien, wovon jedoch nur 60 % zur Wirkung kommen sollen; dann ist:

$$Q=\frac{5}{44}\,\frac{\alpha}{\beta+p}\,K,\quad K=\frac{45}{5}\,\frac{\beta+p}{\alpha}\,Q.$$

Um die Grösse $\mu=\frac{\alpha}{\beta+p}$ zu berechnen, hat man je nach der Spannung für α und β andere Zahlen zu setzen (vergl. den Artikel: Wärme). Wir fügen hier noch eine Tafel für das specifische Dampfvolumen μ hinzu.

Tafel der specifischen Dampfvolumina von 0,1 bis 15,9 Atmosphären.

0,1	14505	3,3	566	6.5	302	9,7	206	12,9	156
2	7563	4	550	6	298	8	204	13,0	154
3	5175	5	535	7	294	9	202	1	153
4	3957	6	528	8	290	10,0	200	2	152
5	3185	7	515	9	286	1	198	3	151
6	2702	8	503	7,0	282	2	196	4	150
7	2371	9	490	1	278	3	194	5	149
8	2112	4,0	479	2	274	4	192	6	148
9	1904	1	467	3	271	5	190	7	147
1,0	1734	2	457	4	267	6	188	8	146
1	1591	3	447	5	264	7	187	9	145
2	1470	4	438	6	260	8	185	14,0	144
3	1366	5	429	7	257	9	184	1	143
4	1276	6	420	8	254	11,0	182	2	142
5	1197	7	412	9	251	1	180	3	141
6	1127	8	403	8,0	248	2	178	4	140
7	1065	9	396	1	245	3	177	5	139
8	1010	5,0	388	2	242	4	175	6	138
9	960	1	381	3	239	5	174	7	137
2,0	914	2	374	4	236	6	172	8	136
1	873	3	367	5	234	7	171	9	135
2	835	4	361	6	231	8	169	15,0	134
3	801	5	355	7	228	9	168	1	133
4	769	6	349	8	226	12,0	167	2	133
5	740	7	343	9	223	1	166	3	132
6	713	8	337	9,0	221	2	164	4	131
7	689	9	332	1	219	3	163	5	130
8	664	6,0	326	2	216	4	162	6	129
9	642	1	321	3	214	5	161	7	128
3,0	621	2	316	4	212	6	159	8	128
1	602	3	312	5	210	7	158	9	127
2	584	4	307	6	208	8	157		

Man setzt nach Pambour bei Condensationsmaschinen:

$$\alpha=29.251,\quad \beta=1,755,$$

für Hochdruckmachinen:

$$\alpha=310,53,\quad \beta=4,417.$$

Die Zahlen sind hier andere, wie in dem Artikel: Wärme, weil dort p in Kilogrammen auf den Quadratmeter, hier in Pfunden auf den Quadratzoll gegeben ist,

eine Atmosphäre $=15{,}07$ Pfund alt Druck auf den Quadratzoll gerechnet. Man erhält im erstern Falle:

$$Q=\frac{3324\,K}{1{,}755+p},$$

und im letztern:

$$Q=\frac{3529\,K}{4{,}417+p}.$$

Hiernach ergibt sich, wenn man in die Pambour'sche Formel für Q einsetzt:

$$L=\frac{144\,w}{640-t_1}\,\frac{\alpha}{\beta+p}\,\frac{K}{66}\,(\beta+p)\left(1+\lg\frac{F_1 s_1}{Fs}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)$$

$$=\frac{24}{11}\,\frac{w\,\alpha}{640-t_1}\left(1+\lg\frac{F_1 s_1}{Fs}+\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)K,$$

oder wenn $t_1=40$, $w=4500$ gesetzt wird:

$$L=\frac{180}{11}\,\alpha K\left(1+\lg\frac{F_1 s_1}{Fs}-\frac{\beta+q}{\beta+p_1}\right)$$

in Fusspfund. Für Niederdruckmaschinen ist:

$$\frac{180}{11}\,\alpha=478653,$$

für Hochdruckmaschinen:

$$\frac{180}{11}\,\alpha=508140.$$

Ist nur ein Cylinder vorhanden, so ist $F_1=F$, findet keine Expansion statt $s_1=s$ $p_1=p$.

Findet Condensation statt, so beträgt dieselbe $\frac{1}{16}$ im Minimum des Gegendruckes, die Expansion höchstens $\frac{1}{4}$ Atmosphäre, bei Maschinen ohne Condensation die letztere bis $\frac{3}{4}$ Atmosphären Spannung.

Im erstern Falle ist also im Maximum:

$$\frac{F_1 s_1}{Fs}=\frac{\beta+p}{\beta+p_1}=\frac{1{,}755+p}{1{,}755+7{,}525}=0{,}1891+0{,}10776\,p,$$

im zweiten:

$$\frac{F_1 s_1}{Fs}=\frac{4{,}417+p}{4{,}417+22{,}575}=0{,}1636+0{,}037048\,p,$$

ebenso im ersten Falle:

$$\frac{\beta+q}{\beta+p_1}=\frac{3{,}26}{9{,}28}=0{,}3513,$$

und im zweiten:

$$\frac{\beta+q}{\beta+p_1}=\frac{19{,}467}{26\,992}=0{,}7212.$$

Also wenn Expansion und Condensation stat findet:

$$L=478653\,[1+\lg(0{,}1891+0{,}10776\,p)-0{,}3513]\,K,$$

findet nur Expansion statt:

$$L=508140\,[1+\lg(0{,}1636+0{,}037048\,p)-0{,}7212]\,K,$$

findet nur Condensation statt:

$$L=478653\left(1-\frac{3{,}26}{1{,}755+p}\right)K,$$

und wenn weder Condensation noch Expansion stattfindet:

$$L=508140\left(1-\frac{19{,}467}{4{,}417+p}\right).$$

Die Einheit ist wie immer das Fusspfund.

Setzt man $K=1$, $p=1.\ 1\frac{1}{2}$ u. s. w., so ergibt sich folgende Tafel für die Leistungen der verschiedenen Maschinen bei einem Pfunde Kohle in Pferdekräften.

Dampfdruck in Atmosphären		1	1½	2	3	4	5	6	7	8	∞
Expansion	mit Condensation	1166	1513	1766	2130	2391	2595	2762	2904	3028	∞
	ohne Condensation	0	278	523	883	1147	1356	1528	1675	1805	∞
keine Expans.	mit Condens.	756	812	842	873	889	899	905	910	913	939
	ohne Condens.	0	278	434	605	696	753	792	820	841	997

Aus dieser Tafel ergibt sich der grosse Vortheil der Condensation und Expansion, sowie der hohen Dampfspannung. Jedoch sind hier die Hindernisse noch nicht berücksichtigt. Diese aber bewirken namentlich, dass Dampfspannungen über acht Atmosphären, abgesehen von den Gefahren, welche sie mit sich führen, keinen Nutzen mehr gewähren.

Rechnet man das Wärmeäquivalent zu 1344 Fusspfund, und erzeugt die Verbrennung von 1 Pfund Kohle 7500 Calories, so ist die theoretische Leistung desselben:

$$1344 \cdot 7500 = 10080000 \text{ Fusspfund}$$
$$= 19765 \text{ Pferdekräfte,}$$

also $6\frac{1}{2}$ mal so gross als der grösste Werth (3028) unserer Tafel.

Es ist indess zu bemerken, dass bei jeder Maschine ein bedeutender Verlust stattfinden muss, wie sehr sie auch die Dampfmaschine etwa noch an Vollkommenheit übertreffen möge, da ja bei der Verwandlung von Wärme in Arbeit zugleich ein Ueberströmen der Wärme vom wärmern zum kältern Körper stattfinden muss.

Es ist nun aber auf die Hindernisse, welche die eben entwickelte theoretische Leistung verhindern, einzugehen.

Diese zerfallen in Eintritts- und Austrittshindernisse. Die ersteren bestehen aus der Reibung des Dampfes an den Röhren, aus den Widerständen bei plötzlicher Geschwindigkeits- und Richtungsänderung, Abkühlung an den Wänden; hierdurch kann die Spannung bis auf 20 Procent herabgezogen werden, bei gut construirten nicht sehr schnell gehenden Maschinen jedoch höchstens 5 Procent. Die Kolbenreibung ist wie bei den Wassersäulenmaschinen in Rechnung zu bringen.

Sei v die Kolbengeschwindigkeit, d der Durchmesser des Cylinders, d_1 der des Dampfrohres, so ist die Geschwindigkeit des Dampfes in dem letzteren:

$$v_1 = \frac{d^2 v}{d_1^2},$$

die zugehörige Geschwindigkeitshöhe:

$$\frac{v_1^2}{2g} = \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Sei ferner ζ_1 der Widerstandscoefficient beim Eintritte ins Dampfrohr, so ist der Druckhöheverlust:

$$h_1 = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Sei l_1 die Länge des Dampfrohres, ζ_2 der Reibungscoefficient des Dampfes, so ergibt sich hieraus ein Druckhöheverlust:

$$h_2 = \zeta_2 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_2 \frac{l_1 d^4 v^2}{d_1^5 \cdot 2g}.$$

Ist ζ_3 der veränderliche, von der Klappenstellung abhängige Coefficient des Widerstandes beim Durchgange durch die Admissionsklappe, so ist der Verlust:

$$h_3 = \zeta_3 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_3 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Da der Querschnitt F_4 der Dampfkammer viel grösser ist als der des Dampfrohres F_1, so verliert der Dampf beim Eintritt in die letztere einen grossen Theil seiner Geschwindigkeit. Der betreffende Druckhöhenverlust ist:

$$h_4 = \zeta_4 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g},$$

wo:

$$\zeta_4 = \left(1 - \frac{F_1}{F_4}\right)^2$$

zu setzen ist. ζ_4 ist immer nahe gleich 1. Also der gesammte Druckhöheverlust beim Eintritt in die Dampfkammer:

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$
$$= \left(\zeta_1 + \zeta_2 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_3 + \zeta_4\right) \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Ist die Dichtigkeit des Dampfes gleich γ, so ist der Verlust an Spannung:

$$(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)\gamma,$$

also wenn p_0 die Spannung im Dampfkessel ist, so ist die in der Dampfkammer:

$$x = p_0 - (\zeta_1 + \zeta_2 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_3 + \zeta_4) \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2 \gamma}{2g}:$$

Auch kann man:

$$\left(\frac{d}{d_1}\right)^4 = \left(\frac{F}{F_1}\right)^2$$

setzen, wo F, F_1 bezüglich die Querschnitte des Cylinders und des Dampfrohres sind.

Es finden aber auch Verluste beim Eintritte aus der Dampfkammer in den Cylinder statt.

Der Durchgang durch das Dampfventil veranlasst den Druckhöhenverlust:

$$h_3 = \zeta \frac{v_3^2}{2g} = \zeta \left(\frac{F}{F_3}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \zeta \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \frac{v^2}{2g},$$

ζ ist der Widerstandscoefficient, v_3 die Eintrittsgeschwindigkeit, F, F_3 die Flächen des Kolbens und der Ventilröhre, also wenn man setzt:

$$\zeta_3 = \left(\frac{F_2}{F_3}\right)^2 \zeta,$$

wo F_2 der Querschnitt des Dampfweges ist, so erhält man:

$$h_4 = \zeta_3 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Es tritt aber auch, selbst wenn eine Schiebersteuerung vorhanden ist, beim Eintritt in den Dampfkanal ein Verlust ein, der namentlich gross ist, wenn der Schieber einen Theil der Einmündung des Dampfes deckt. Derselbe gibt:

$$h_6 = \zeta_2 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \zeta_6 \left(\frac{F}{ab}\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

wo a, b die Dimensionen des rechteckigen Querschnittes, F_2 des Dampfweges bezeichnen. Bei völlig offenen Dampfwegen ist:

$$\zeta_6 = 0{,}505,$$

und um so grösser, je mehr der Schieber die Einmündung deckt.

Durch die Reibung des Dampfes auf dem Wege zwischen Kammer und Cylinder entsteht ein Verlust:

$$h_7 = \zeta_7 \frac{l_2 (a+b)}{2ab} \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \zeta_7 \frac{l_2}{d_2} \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

wo:

$$d_2 = \frac{2ab}{a+b}$$

gesetzt ist, und beim Eintritt in den Dampfcylinder, wo die Geschwindigkeit von:

$$v_2 = \frac{F}{F_2} v$$

in v übergeht:

$$h_8 = \zeta_8 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g},$$

wo:

$$\zeta_8 = \left(1 - \frac{F_2}{F}\right)^2$$

gesetzt ist.

Für die Krümmungen der Dampfwege ergibt sich:

$$h_9 = \zeta_9 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Ist ein besonderer Expansionsschieber vorhanden, so bereitet der Durchgang durch die zugehörige Mündung einen neuen Verlust. Sei F_6 ihr Querschnitt, F_7

der der Kammer, in welchen der Dampf aus dieser Mündung tritt, α der F_8 entsprechende Contractionscoefficient, ferner:

$$\zeta_{10}=\left(\frac{F_7}{\alpha F_8}-1\right)^2\left(\frac{F_2}{F_7}\right)^2,$$

so hat man:

$$h_{10}=\zeta_{10}\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\frac{v^2}{2g}.$$

Wegen der allmäligen Oeffnung der Dampfwege sind h_8 und h_{10} veränderlich und im Allgemeinen grösser, als die Formeln angeben.

Vereinigen wir diese Verluste, indem wir setzen:

$$\zeta_1+\zeta_2\frac{l_1}{d_1}+\zeta_3+\zeta_4=k_1,$$

$$\zeta_5+\zeta_6+\zeta_7\frac{l_2}{d_2}+\zeta_8+\zeta_9+\zeta_{10}=k_2,$$

so erhält man für die wirkliche Spannung:

$$p=p_0-\left[k_1\left(\frac{F}{F_1}\right)^2+k_2\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}\gamma.$$

Wenn p und p_0 auf den Quadratzoll bezogen werden, ist:

$$\gamma=\frac{66}{\alpha}\left(\beta+\frac{p+p_0}{2}\right)$$

zu setzen, also:

$$p_0-p=\frac{11}{24\alpha}\left(\beta+\frac{p+p_0}{2}\right)\left[k_1\left(\frac{F}{F_1}\right)^2+k_2\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Es finden aber auch Austrittshindernisse statt. Beim Eintritt aus dem Cylinder in den Dampfweg kommt nämlich:

$$h_1=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}=\zeta_1\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

wo $\zeta_1=0{,}505$ zu setzen ist.

Durch Reibung im Dampfwege entsteht der Verlust:

$$h_2=\zeta_2\frac{l_2}{d_2}\left(\frac{F}{F_1}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

durch die Krümmungen der Wege:

$$h_3=\zeta_3\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

beim Eintritt in die Dampfkammer oder den Schieberraum, dessen Querschnitt F_4 sei:

$$h_4=\zeta_4\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

wo $\left[1-\left(\frac{F_2}{F_4}\right)^2\right]=\zeta_4$ gesetzt ist; also der Gesammtverlust an Spannung beim Austritte aus dem Cylinder in die Dampfkammer:

$$(h_1+h_2+h_3+h_4)\gamma.$$

Bei der Ventilsteuerung ist noch der Verlust beim Durchgange durchs Ablassventil zu berücksichtigen.

$$h_5=\zeta_5\left(\frac{F}{F_3}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

wo F_3 der Querschnitt des Ausblaserohrs ist. Bei der Schiebersteuerung findet ein ähnlicher Verlust für die Schieberhöhlung statt.

Für den Eintritt ins Ausblaserohr hat man:

$$h_7=\zeta_7\frac{l_3}{d_3}\left(\frac{F}{F_3}\right)^2\frac{v^2}{2g},$$

und endlich für den Austritt in den Condensator oder in die freie Luft:

$$h_8 = \left(\frac{F}{F_3}\right)^2 \frac{v^2}{2g}.$$

Der Spannungsverlust von der Dampfkammer bis zum Austritt ist also:

$$(h_5 + h_6 + h_7 + h_8)\gamma.$$

Ist also q_0 die Dampfspannung im Condensator, q die während des Kolbenrückganges, setzt man ferner:

$$\zeta_1 + \zeta_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_3 + \zeta_4 = \lambda_1,$$

$$\zeta_5 + \zeta_6 + \zeta_7 \frac{l_7}{d_7} + 1 = \lambda_2,$$

$$\gamma = \frac{66}{\mu} = \frac{66}{\alpha}\left(\beta + \frac{q+q_0}{2}\right),$$

so ist:

$$q - q_0 = \left[\lambda_1 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{F}{F_3}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g} \frac{66}{144\,\mu}$$

$$= \frac{11}{24\alpha}\left(\beta + \frac{q+q_0}{2}\right)\left[\lambda_1 \left(\frac{F}{F_2}\right)^2 + \lambda_2 \left(\frac{F}{F_3}\right)^2\right] \frac{v^2}{2g}.$$

Es ist noch der Werth des mittleren Quadrates der Kolbengeschwindigkeit zu bestimmen. Ist s der Kolbenweg, t die Zeit beim Durchlaufen desselben, so erhielte man, wenn die Geschwindigkeit gleichmässig wäre:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Ist dies nicht der Fall, so theilt man den Kolbenweg in n gleiche Theile $\frac{s}{n}$ oder ds; ist $\tau = dt$ die veränderliche Zeit, in der ein solches Theilchen zurückgelegt wird, so ist das entsprechende Geschwindigkeitsquadrat:

$$\left(\frac{s}{n\,t}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

und der mittlere Werth davon:

$$\frac{1}{n} \Sigma \left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

oder da $\frac{1}{n} = \frac{ds}{s}$ ist:

$$v^2 = \frac{1}{s} \Sigma \frac{ds^3}{dt^2} = \frac{1}{s} \int_0^t \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 ds,$$

wo s der ganze Kolbenweg ist.

Bei gleichförmig beschleunigter Bewegung des Kolbens z. B., wo $\frac{ds}{dt} = ct$ ist, ergibt sich:

$$v^2 = \frac{1}{s} \int_0^t c^3 t^3 \, dt = \frac{c^3 t^4}{4s},$$

aber da:

$$s = \int_0^t \frac{ds}{dt} dt = \int_0^t ct \, dt = \frac{c t^2}{2}$$

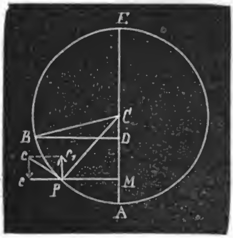
ist:

$$v^2 = \frac{c^2 t^2}{2}.$$

t ist hier die Zeit, in der der ganze Kolbenweg zurückgelegt wird.

Diese Betrachtungen würden aber nur für einfach wirkende Maschinen gelten, wo keine Rotation stattfindet. Bei Rotationsmaschinen muss man dagegen von der als gleichförmig anzusehenden Bewegung des Krummzapfens ausgehen.

Fig. 139.



Sei $AE=2r$ (Fig 139) der ganze Kolbenweg, $AD=s$ ein beliebiger Theil davon. Ferner sei $AM=x$, die Geschwindigkeit des Kolbens in M sei $Pc_1=c_1$, sie ist dann bestimmt aus der Warzengeschwindigkeit $Pc=c$ durch die Gleichung:

$$\frac{c_1}{c}=\frac{P\mu}{CP}=\frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r},$$

also:

$$c_1{}^2=\frac{c^2(2rx-x^2)}{r^2}=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Um nun das mittlere Geschwindigkeitsquadrat während der Zurücklegung des Werthes AD zu finden, hat man ganz wie oben:

$$v^2=\frac{1}{s}\int_0^s\left(\frac{dx}{dt}\right)^2dx=\frac{c^2}{r^2s}\int_0^s(2rx-x^2)\,dx=\frac{c^2s}{r}\left(1-\frac{s}{3r}\right).$$

Für den vollständigen Kolbenweg aber, wo $s=2r$ ist:

$$v^2=\tfrac{4}{3}c^2.$$

Während die Warze den Weg πr macht, legt der Kolben den Weg $2r$ zurück; ist also v_1 die mittlere Geschwindigkeit des letzteren, so hat man:

$$v_1:c=2r:\pi r,$$

$$v_1=\frac{2c}{\pi},$$

und:

$$v^2=\frac{\pi^2}{6}v_1{}^2.$$

Es entsteht noch ein Arbeitsverlust durch die Abkühlung in der Dampfleitung und im Cylinder. Sei U der Gesammtinhalt aller vom Dampfe ausgefüllten Oberflächen, t die Dampftemperatur, t_1 die äussere Temperatur, so findet in der Secunde ein Wärmeverlust von:

$$W=(t-t_1)wU \text{ Calorics}$$

statt, wo w eine Erfahrungszahl ist. Strömt nun Dampfmenge $Q\gamma$ in der Secunde durch die Maschine, so wird jedem Pfunde entzogen:

$$W_1=\frac{w(t-t_1)U}{Q\gamma},$$

und dadurch eine Condensation eintreten. Die Menge des condensirten Dampfes findet man, wenn man W durch die Anzahl der Wärmeeinheiten, die nöthig sind, ein Pfund Wasser in Dampf zu verwandeln, dividirt also durch 540; diese Wassermenge ist also:

$$\frac{w(t-t_1)U}{540\,Q\gamma}.$$

Ist der Spannungsverlust diesem Dampfverlust proportional, so kann dieser Ausdruck gleich $\frac{p_0-p}{p_0}$ gesetzt werden, und es ist:

$$p=p_0\left(1-\frac{w(t-t_1)U}{540\,Q\gamma}\right).$$

Nach Tredgold ist für den Quadratfuss als Einheit:

$$w=0{,}0011.$$

Setzt man noch:

$$\gamma=\frac{66}{\mu},$$

wo $\mu=\frac{\alpha}{\beta+p}$ ist, so kommt:

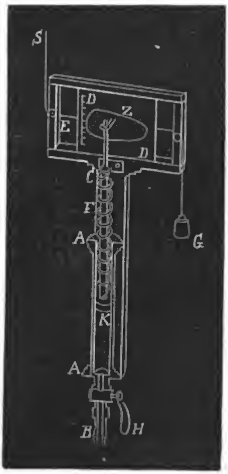
$$p=p_0\left(1-\frac{\mu(t-t_1)U}{32400000\,Q}\right).$$

Mit dem Dampfe aber wird auch Wasser aus dem Kessel mechanisch mit fortgerissen, und da dieses Wasser zugleich mit dem Dampfe bewegt wird, so dient es ebenfalls als Hinderniss. Sei ν das Verhältniss des Gewichts dieser Wassermenge zu der des gleichzeitig aus dem Kessel tretenden Dampfes, so ist die Druckformel mit $1+\nu$ zu multipliciren. Man erhält schliesslich also:

$$p_0 - p = \frac{11(1+v)}{2\alpha}\left(\beta+\frac{p+p_0}{2}\right)\left[k_1\left(\frac{F}{F_1}\right)^2 + k_2\left(\frac{F}{F_2}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}.$$

Um die Spannung innerhalb des Treibcylinders zu prüfen, dient ein besonderes Instrument, Indicator genannt. Die einfachsten gibt Watt an. *AA* ist ein Cylinder von $1\frac{1}{2}$ Zoll Weite und 1 Fuss Länge (Fig. 140), der in eine engere Röhre *B* nach unten zuläuft, und durch

Fig. 140.



Kolben *K* nach oben hin verschlossen ist. Das schraubenförmige Ende der Röhre *B* wird in ein Loch im Deckel des Cylinders eingesetzt. Es kann also, wenn man Hahn *H* in Röhre *B* öffnet, der Dampf nach *AA* treten, und gegen den Kolben *K* drücken. Die Kolbenstange *KC* geht durch die ringförmige Führung *F* und ist von der Spiralfeder *F* umgeben, welche durch den Kolben zusammengedrückt wird, je nach der Spannung des Dampfes. Zeichenstift *Z* am Ende der Stange gibt dann durch seine Stellung die Stärke der Dampfkraft an. Diese aber ist während der Kolbenbewegung veränderlich, und es ist ihr mittlerer Werth, d. h. die mittlere Stellung von *Z* zu bestimmen. Drückt nun *Z* auf die Tafel *DD*, welche durch die Schnur *ES* vermöge der Stange des Treibkolbens nach einer Seite, wenn der Kolben hinaufgeht, und durch Gegengewicht *G* nach der entgegengesetzten Seite, wenn der Kolben hinabgeht, fortgezogen wird, so wird während des Kolbenspiels eine Curve vom Stifte *Z* gezeichnet. Der Flächeninhalt derselben ist dann das Maass der während des Kolbenschubes verrichteten Arbeit, und diese durch den Kolbenweg dividirt gibt die mittlere Dampfspannung. Sei nämlich die Spannung des Dampfes beim Aufgange gleich p, der atmosphärische Druck gleich a, die Spannung der Feder für den Quadratzoll der Kolbenfläche gleich y_1, so ist für den Aufgang des Treibkolbens:

$$p = y_1 + a.$$

Sei ferner q die Spannnng des Dampfes beim Niedergang, y_2 die der Feder, also:

$$q = a - y_2,$$

also die bewegende Kraft des Treibkolbens für den Quadratzoll:

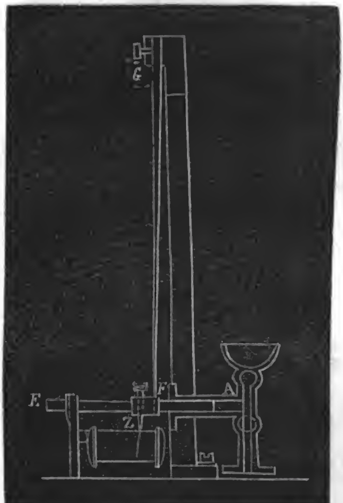
$$p - q = y_1 + y_2.$$

Es sind aber die Spannungen der Feder der Ausdehnung bezüglich Zusammendrückung derselben proportional, also y_1 und y_2 durch die Abstände des Stiftes von einer horizontalen Linie zu messen, welche derselbe in natürlicher Lage der Feder beschreiben würde. Da nun die Tafel selbst sich proportional der Kolbenbewegung verschiebt, so wird die Summe der Producte aus Kolbenbewegung und Spannung d. h. die Arbeit durch die Summe der Producte der horizontalen Tafelverschiebungen und der zugehörigen vertikalen Stiftverschiebungen, d. h. durch den Flächeninhalt der gezeichneten Curve gemessen.

Eine complicirtere Vorrichtung ist die von Clair. Nach Poncelet werden jetzt auch statt der Spiralfeder Federschienen angewandt. Bei einem solchen Ponceletschen Indicator ist *A* (Fig. 141) der Cylinder, mit der Stange *KE* desselben ist die parabolische Feder *FG* und der Zeichenstift *Z* verbunden, welcher auf einen um zwei bewegliche Trommeln gelegten Papierstreifen die Curve zeichnet.

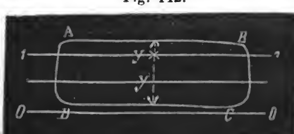
Je nach der Art der Maschine ist die Indicatorcurve von verschiedener Gestalt. Bei Tiefdruck und mangelnder Expansion werden beim Auf- und Niedergang zwei fast parallele und ziemlich

Fig. 141.



grade Linien, beim tiefsten und höchsten Kolbenstande zwei darauf senkrechte zurückgelegt. Die ungefähre Gestalt ist ein Rechteck (Fig. 142). Die Ordinaten

Fig. 142.



über der einer Atmosphäre Spannung entsprechende Linie *l* sind kleiner als die unter derselben. Wird der Dampf aber erst am Anfange des Kolbennieder- und Aufganges eingelassen (Fig. 143), so erleidet die Curve bei *A* und *C* Abstumpfungen. Durch Voreilen des Schiebers beim Zu- und Ablassen erfolgen

Fig. 143.

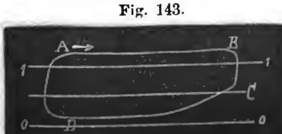


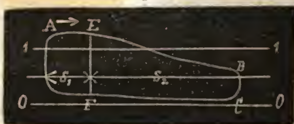
Fig. 144.



dagegen Abstumpfungen bei *B* und *D* (Fig. 144).

Bei Expansionsmaschinen sind die Curven noch unregelmässiger. Für die

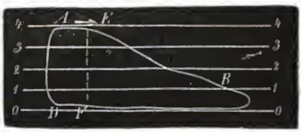
Fig. 145.



Niederdruckmaschine gilt dann Fig. 145. Weg *AE* entspricht dem Theile, wo keine

Expansion stattfindet, Fig. 146 ist gültig für eine Maschine von hohem Druck

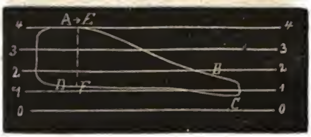
Fig. 146.



Condensation und Expansion, bei Fig. 147 findet keine Expansion statt, daher

fällt hier der untere Curventheil mit der Linie, welche 1 Atmosphäre Druck be-

Fig. 147.



zeichnet, zusammen, und Fig. 148 gilt für Hochdruckmaschinen ohne Condensation und Expansion.

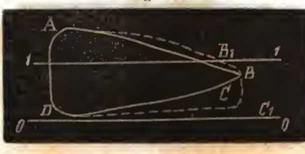
Aber die Indicatorcurve weist auch die Mängel der Steuerung nach.

Sind die Dampfkanäle zu

Fig. 138.



Fig. 149.



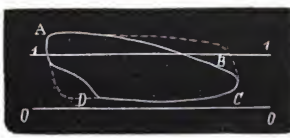
klein, so tritt der Dampf mit zu grosser Geschwindigkeit zu und ab, und die Curve wird sehr zugespitzt (Fig. 149).

Ist die Schieberstange zu kurz, so durchläuft der Schieber auf einer Seite der Dampfwege einen grösseren Weg als auf der anderen, die beiden Theile der Indicatorcurve sind dann von verschiedener Länge.

Uebrigens ist die Expansion des Dampfes auf einer Seite des Kolbens nicht ganz dieselbe als auf der andern, man thut daher wohl, mit dem Indicator auf beiden Seiten des Cylinders Versuche zu machen.

Sind die Schieberflächen nicht angemessen breit, so findet z. B. eine zu grosse Bedeckung statt, die

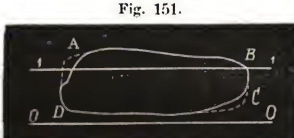
Fig. 150.



Indicatorcurve zieht sich zu zeitig herab und herauf (Fig. 150).

Hat das Excentrik nicht die richtige Stellung zur Warze des Krummzapfens, so ist die Voreilung entweder zu gross (Fig. 150), oder zu

Fig. 151.



klein (Fig. 151). Fig 150 gilt auch wenn der Schieber zu klein, Fig. 151, wenn er zu gross ist.

Fig. 152 gilt für eine Maschine ohne Condensation, wenn die Expansion zu weit getrieben wird. Gegen Ende des Kolbenschubs ist der Gegendruck grösser als der Dampfdruck, es findet in *K* ein Knoten statt.

Fig. 153 findet statt, wenn das Regu-

Fig. 152.

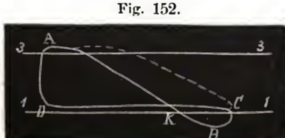


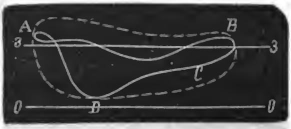
Fig. 153.



lirungsventil im Dampfrohre zu stark geschlossen ist, Fig. 154, wenn der Kolben nicht dampfdicht abschliesst.

In die Formel für L sind nun die Werthe p und q zu setzen, wie sie sich aus der Betrachtung der Hindernisse ergeben, ausserdem:

Fig. 154.



$$\beta + p_1 = \frac{s}{s_1} (\beta + p).$$

Wird statt der Dampfmenge Q eingeführt die Brennstoffmenge K, so wird:

$$Q = \frac{w}{640 - t_1} \frac{\mu}{66} K = \frac{w}{640 - t_1} \frac{\alpha}{66(\beta + p)} K,$$

also die Leistung:

$$L = \frac{24\,\alpha w}{11\,(640 - t_1)} \left(1 + \lg \frac{s_1}{s} - \frac{\beta + q}{\beta + p_1}\right) K.$$

Hierin ist p nur in p_1 enthalten.

Bei Hochdruckmaschinen ohne Expansion und vollständiger Condensation war:

$$q = 0, \quad s_1 = s,$$

es kann dann, wenn p sehr gross ist:

$$L = \frac{24\,\alpha w}{11\,(640 - t_1)} K$$

gesetzt werden. Dies Verhältniss wird aber, wenn p kleiner ist, sehr herabgezogen, noch mehr bei unvollständiger Condensation, es kann sogar gleich Null werden.

Schädlicher Raum heisst derjenige, welcher am Ende des Kolbenweges sich zwischen Kolben und Schieber oder Ablassventil befindet. Er muss beim Rückwege von Neuem mit Dampf gefüllt werden, ehe dieser vollständig auf den Kolben wirkt, und bringt daher Arbeitsverlust zu Wege. Dieser Raum besteht aus zwei Theilen von ungleicher Weite, der eine im Cylinder, der andere im Dampfwege, ihre Inhalte sind bezüglich $F\sigma_1$ und $F_2 l_2$, wo σ_1 die Höhe des kleinsten Zwischenraums zwischen Kolbenfläche und Cylinderboden oder Deckel anzeigt. Der schädliche Raum hat dann den Inhalt:

$$V_1 = F\left(\sigma_1 + \frac{F_2}{F} l_2\right) = F\sigma,$$

wenn man:

$$\sigma = \sigma_1 + \frac{F_2}{F} l_2$$

setzt. Dieser Raum beträgt selten mehr als $\frac{1}{10}$ des Kolbenweges. Anfänglich hat derselbe Dampf von der Spannung q, am Schlusse des Weges von der Spannung p, der Dampfverlust ist also:

$$F\sigma\left(1-\frac{p}{q}\right) \text{ annähernd } = F\sigma,$$

also die während des Spiels verbrauchte Dampfmenge:

$$V=F(\sigma+s),$$

und:

$$Fs=\frac{s}{s+\sigma}V.$$

Die Leistung aber, wenn Expansion nicht stattfindet:

$$L=\frac{n}{30}Fs(p-q)=\frac{n}{30}\frac{s}{s+\sigma}\frac{V}{p-q}=\frac{s}{s+\sigma}(p-q)Q,$$

oder in Fusspfunden:

$$L=144\frac{s}{s+\sigma}(p-q)Q.$$

Bei den Expansionsmaschinen geht aber bei jedem Kolbenwege das Volumen des Dampfes $F(s+\sigma)$ über in $F(s_1+\sigma)$, es muss also in den entsprechenden Formeln s und s_1 vertauscht werden. Bei den zweicylindrigen Maschinen aber hat man zwei schädliche Räume, σ im kleinen, σ_1 im grossen Cylinder. Es wird daher:

$$\frac{p}{p_1}=\frac{F_1(s_1+\sigma_1)+F\sigma}{F(s+\sigma)+F_1\sigma_1}.$$

Hierdurch verwandelt sich die oben gegebene Formel in die folgende:

$$L=144\,Q(\beta+p)\left[\frac{s}{s+\sigma}-\frac{s_1}{s+\sigma}\frac{F_1}{F}\frac{\beta+q}{\beta+p}+\lg\left(\frac{F_1(s_1+\sigma_1)+F\sigma}{F(s+\sigma)+F_1\sigma_1}\right)\right]$$

in Fusspfund.

Für eincylindrige Maschinen ist eben nur F_1 gleich F zu setzen, und $\sigma_1+\sigma$ mit σ zu vertauschen. Also:

$$L=144\,Q(\beta+p)\left(\frac{s}{s+\sigma}-\frac{s_1}{s+\sigma}\frac{\beta+q}{\beta+p}+\lg\frac{s_1+\sigma}{s+\sigma}\right).$$

Geht man, wie früher allgemein geschah, von dem Mariotte'schen Gesetze aus, so ist nur $\beta=0$ zu setzen.

Ein neuer Verlust entsteht aber aus der Kolbenreibung, der wie bei der Wassersäulenmaschine (vergl. den betreffenden Artikel) zu berechnen ist.

Sei b die Liderungsbreite, d der Kolbendurchmesser, p die Spannung, dann ist die Kraft, welche die Liderung an die Cylinderwand andrückt, $\pi d b p$, woraus die Reibung entsteht:

$$R=\varphi\,\pi\,d\,b\,p.$$

Es ist aber die Dampfkraft:

$$P=\frac{\pi d^2 p}{4},$$

also:

$$R=\frac{4\varphi\,b\,P}{d}.$$

Es muss also der Dampfdruck auf den Kolben im Verhältnisse $1-\frac{4\varphi\,b}{d}$ vermindert werden. Bei Metallliderungen setzt Tredgold:

$$\varphi=0{,}08,$$

und bei Hanfliderungen:

$$\varphi=0{,}15.$$

Uebrigens ist auch der Gegendruck in Abzug zu bringen, so dass die Leistung während des Spieles um $\frac{4 \varphi b}{d} F(p-q) s_1$ herabgezogen wird.

Es kommt also für eincylindrige Maschinen nach der Pambour'schen Theorie:

$$L = 144 Q (\beta + p) \left(1 + \lg \frac{s_1}{s} - \frac{\beta + q + \frac{4 \varphi b}{d}(p-q)}{\beta + p_1}\right).$$

Die Reibung der Kolbenstange in der Stopfbüchse ist ebenso wie die des Kolbens zu berechnen.

Ist b_1 die Breite der Liderung der Büchse, d_1 der Durchmesser der Stange, so kommt also wie oben:

$$R_1 = R \frac{d_1 b_1}{db},$$

also die Kolbenreibung wird im Verhältniss $\frac{d_1 b_1}{db}$ vermehrt.

Der Querschnitt der Kolbenstange vermindert die Druckfläche, und macht, dass beim Niedergange (wo von der anderen Seite der Druck erfolgt) etwas weniger Kraft nöthig ist. In der Berechnung der Leistung nimmt man deshalb für F den Mittelwerth:

$$F = \frac{\pi}{4}\left(d^2 - \frac{d_1^2}{2}\right).$$

Es kommen nun noch verschiedene Hindernisse, z. B. die durch die Steuerung verursachten, hinzu, welche oft nur eine Abschätzung zulassen. Man kann aber auch dieselben im Verein mit der Kolbenreibung als einen Druck Fq_1 betrachten, der zu dem Gegendruck Fq hinzukommt, dann ist eben nur in der Hauptformel q mit $q_1 + q$ zu vertauschen, also für eincylindrige Maschinen ist dann:

$$L = 144 Q (\beta + p)\left(\frac{s}{s+\sigma} + \lg \frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma} - \frac{s_1}{s+\sigma} \frac{\beta + q + q_1}{\beta + p}\right).$$

q_1 ist dann für den Quadratzoll berechnet, also der von der Kolbenreibung herrührende Theil davon gleich $\frac{4 \varphi b}{d}(p-q)$.

Es stellt sich nun die Frage: Welche Expansion gibt die grösste Leistung?

Offenbar ist dies dann der Fall, wenn während keines Theils der Bewegung der Gegendruck grösser als die Spannung ist, also die Maschine Arbeit rückgängig macht. Es muss also im Falle der grössten Leistung die Dampfspannung am Ende des Kolbenlaufes p_1 gerade gleich dem Gegendrucke $q + q_1$ sein. Nun war aber:

$$\frac{s+\sigma}{s_1+\sigma} = \frac{\beta + p_1}{\beta + p}.$$

Setzt man also:

$$p_1 = q + q_1,$$

so kommt:

$$\frac{s+\sigma}{s_1+\sigma} = \frac{\beta + q + q_1}{\beta + p}.$$

Bezeichnet man die den Spannungen p und $q + q_1$ entsprechenden specifischen Dampfvolumina $\frac{\alpha}{\beta + p}$ und $\frac{\alpha}{\beta + q + q_1}$ bezüglich mit μ und μ_1 und vernachlässigt σ, so ist also:

$$s : s_1 = \mu : \mu_1,$$

d. h.:

„Im Falle der Maximalleistung verhält sich der Kolbenweg vor der Expansion zum ganzen Kolbenwege, wie das dem eintretenden Dampfe entsprechende specifische Volumen zu dem, welches dem Gegendrucke $(q + q_1)$ entspricht.“

In der Praxis wird aber gewöhnlich die wirkliche Leistung durch Multiplication der theoretischen mit einem durch Versuche zu ermittelnden Erfahrungscoefficienten η (auch Wirkungsgrad genannt) bestimmt.

Setzt man bei Maschinen ohne Expansion demnach:

$$L = 144\, Q\, \eta\, (p_0 - q_0) \text{ Fusspfund},$$

wo Q wieder das in der Secunde verbrauchte Dampfquantum, p_0 die Spannung im Kessel, q_0 die im Condensator ist, so findet Morin (*Leçons de mécanique pratique*):

A) Für Niederdruckmaschinen:

Pferdekräfte	η (Wirkungsgrad)
4–8	0,50–0,42
10–20	0,56–0,47
30–50	0,60–0,54
60–100	0,60–0,54

B) Für Hochdruckmaschinen:

Pferdekräfte	η (Wirkungsgrad)
1–10	0,50–0,40
10–20	0,55–0,44
20–30	0,60–0,48
30–40	0,65–0,52
40–50	0,70–0,56

Setzt man ferner für Expansionsmaschinen:

$$L = 144\, Q\, p_0\, \eta \left(1 + \lg \frac{p_0}{p_1} - \frac{q_0}{p_1}\right),$$

wo:

$$p_1 = \frac{F s p_0}{F_1 s_1}$$

zu setzen ist, so kommt:

Pferdekräfte	η (Wirkungsgrad)
4–8	0,33–0,30
10–20	0,42–0,35
20–30	0,47–0,38
30–40	0,49–0,39
40–50	0,57–0,46
50–60	0,62–0,50
60–70	0,66–0,53
70–100	0,76–0,61

Die zuerst geschriebene Zahl geht auf gut unterhaltene Maschinen, die letztere auf solche, die eben ausreichend unterhalten werden.

Pambour führt die Hindernisse in etwas anderer Weise in die Rechnung ein. Derselbe setzt nämlich die auf die Kolbenfläche reducirte Last P der Maschine zusammen aus einer Nutzlast P_1, einem constanten Theile R der Hindernisse, und aus einem der Nutzlast proportionellen δP_1, es ist somit:

$$P = R + P_1 (1 + \delta),$$

$$P_1 = \frac{P - R}{1 + \delta}.$$

Bezieht man diese Kräfte auf den Quadratzoll, so ist, wenn F die Kolbenfläche bedeutet:

$$P = Fp, \quad P_1 = Fp_1, \quad R = Fr,$$

und:

$$p = (1 + \delta) p_1 + r,$$

$$p_1 = \frac{p - r}{1 + \delta}.$$

Der constante Druckverlust r aber besteht aus dem Gegendrucke q, und dem durch die Hindernisse, Kolbenreibung u. s. w. entstehenden Verlust q_1. Pambour nimmt für diesen:

$$q_1 = \frac{25}{p}$$

Pfund preussisch auf den Quadratzoll, wo d der Durchmesser im Kolben ist. Ferner setzt er:

$$\delta = 0,14,$$

also:

$$p = 1{,}14\, p_1 + q + q_1,$$

$$p_1 = 0{,}878 (p - q - q_1).$$

Die Nutzlast ist dann:

$$P_1 = F p_1 = 0{,}878\, F (p - q - q_1) \text{ Pfund},$$

die Nutzleistung, wenn keine Expansion stattfindet:

$$L_1 = P_1 v = \frac{Fv}{1 + \delta} (p - q - q_1)$$

$$= \frac{144\, Q}{1 + \delta} (p - q - q_1)$$

$$= 126{,}4\, Q (p - q - q_1)$$

in Fusspfunden. Bei Expansionsmaschinen aber, wo p veränderlich ist:

$$L_1 = 126{,}4\, Q \left[\left(\frac{s}{s + \sigma} + \lg \frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}\right)(\beta + p) - \frac{s_1}{s + \sigma} (\beta + q + q_1)\right].$$

Ist M die Speisewassermenge, so kann man noch setzen:

$$Q = \frac{\alpha M}{\beta + p},$$

man hat dann:

$$L_1 = 126{,}4 \left[\left(\frac{s}{s+\sigma} + \lg \frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma} \right) \alpha M - \frac{s_1}{s+\sigma} (\beta + q + q_1)\, C \right],$$

und da:

$$Q = \frac{n}{30} F(s+\sigma), \quad v = \frac{n}{30} s_1,$$

also:

$$Q = \frac{s+\sigma}{s_1} F v,$$

so hat man auch:

$$L_1 = 126{,}4 \left[\left(\frac{s}{s+\sigma} + \lg \frac{s_1 + \sigma}{s+\sigma} \right) \alpha M - (\beta + q + q_1) F v \right].$$

Führt man noch den Brennmaterial-Aufwand K ein, so ist:

$$M = \frac{wK}{66\,(640 - t_1)}.$$

Die Leistung fällt also desto grösser aus, je kleiner Q, oder da:

$$\beta + p = \frac{\alpha M}{Q},$$

je grösser die Spannung im Cylinder, also je grösser die im Kessel und je kleiner der Verlust in der Zuleitung ist.

p_0 muss wie oben berechnet werden; hat man dies gethan, so ist die des entsprechenden Dampfvolumen unter der Spannung p_0 im Kessel gemessen:

$$Q_0 = Q \frac{\beta + p}{\beta + p_0}.$$

E) Dimensionen einer Maschine von gegebener Leistung.

Wie so eben aus den Dimensionen der Dampfmaschine die Leistung berechnet worden ist, muss jetzt die umgekehrte Aufgabe gelöst werden.

Es wird hier von der Morin'schen Formel:

$$L = 144\, Q p_0 \eta \left(1 + \lg \frac{F_1 s_1}{Fs} - \frac{q_0}{p_1} \right)$$

ausgegangen, das Dampfquantum Q ergibt sich hieraus:

$$Q = \frac{L}{144\, \eta p_0 \left(1 + \lg \frac{F_1 s_1}{Fs} - \frac{q_0}{p_1} \right)}.$$

Hier müssen ausser der Leistung noch der Wirkungsgrad η, ferner die Spannungen p_0, q_0, endlich das Expansionsverhältniss:

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{Fs}$$

gegeben sein. Was den Wirkungsgraad η anbetrifft, so hat man aus der oben gegebenen Versuchsreihe das Gesetz abstrahirt:

$$\eta = \frac{\mu \sqrt{L_0}}{1 + \nu \sqrt{L_0}},$$

wo L_0 die theoretische Leistung, μ und ν Coefficienten sind. Wir hatten bei Niederdruckmaschinen:

für $L_0 = 4$ $\eta = 0{,}40$,
und für $L_0 = 100$ $\eta = 0{,}50$,

woraus dann folgt:

$$\mu = 0{,}8, \quad \nu = 1{,}5,$$

und es ist für:

$L_0 =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$\eta =$ 0,32	0,40	0,44	0,46	0,47	0,48	0,49	0,495	0,497	0,50	0,51	0,51

Bei Woolf'schen Maschinen mit zwei Cylindern dagegen ergibt sich:

$$\mu = 0{,}255, \quad \eta = 0{,}351,$$

also:

$L_0 =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$\eta =$ 0,19	0,30	0,37	0,42	0,46	0,49	0,52	0,54	0,55	0,565	0,585	0,61

Bei Hochdruckmaschinen mit Condensation:

$$\mu = 0{,}506, \quad \nu = 0{,}988,$$

$L_0 =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$\eta =$ 0,25	0,34	0,38	0,41	0,43	0,44	0,45	0,45	0,46	0,465	0,47	0,48

Bei Hochdruckmaschinen ohne Condensation endlich:

$$\mu = 0{,}433, \quad \nu = 0{,}738,$$

$L_0 =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$\eta =$ 0,25	0,35	0,39	0,43	0.46	0,48	0,49	0,50	0,51	0,515	0,525	0,535

L_0 ist in Pferdekräften gegeben.

Ist das Dampfquantum Q bekannt oder nach der eben gegebenen Formel berechnet worden, so muss die mittere Kolbengeschwindigkeit v und die Grösse der Kolbenfläche F gefunden werden. Die Geschwindigkeit ist gewöhnlich nur mässig, und es soll nach Watt v ungefähr $3\frac{1}{2}$ Fuss (3 Fuss bei kleinen, 4 bei grossen Maschinen) betragen. Die genaueren practisch ermittelten Verhältnisse gibt Watt folgenderweise, wo v in Zollen gegeben ist:

$L =$ 4–8	8–15	15–25	25–40	40–60	60–100
$v =$ 34	37	40	43	46	50

Aus diesen Zahlen abstrahirt man wieder die Formel:

$$v = \frac{\mu \sqrt{L}}{1 + \nu \sqrt{L}},$$

und da:

$$\text{für } L = 4, \quad v = 34,$$
$$\text{für } L = 100, \quad v = 50$$

ist, so findet man für Niederdruckmaschinen:

$$\mu = 42{,}5, \quad \nu = 0{,}75,$$

für $L = \infty$ erhält man den grössten Werth:

$$v = 57 \text{ Zoll},$$

die Scala aber wird dann:

$L =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$v =$ 24	34	39	42,5	45	46	47	48	49	50	51	52

Für Mittel- und Hochdruckmaschinen werden oft grössere als die eben gegebenen Geschwindigkeiten benutzt. Versuche geben:

$$\mu = 56, \quad \nu = 0{,}9,$$

und den Maximalwerth:

$$v = 62,$$

also:

$L =$ 1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	144	225
$v =$ 30	40	46	49	51	53	54	55	55,5	56	57	58

v enthält immer Zolle. — Diese letzte Tafel gibt jedoch nur die grössten noch zu benutzenden Geschwindigkeiten an. Gewöhnlich sind die Zwischenwerthe der vorletzten und letzten Tafel zu nehmen.

Wenn man:

$$\varepsilon = \frac{s_1}{s} \quad \text{oder genauer} \quad = \frac{s_1 + \sigma}{s + \sigma}$$

kennt, so hat man die Kolbenfläche:

$$F = \frac{\varepsilon \cdot 144\, Q}{v}$$

in Quadratzollen, und die Cylinderweite:

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon\, Q}{v}} = 1{,}128 \sqrt{F}.$$

Die Anzahl der Kolbenspiele beträgt in der Minute zwischen 16 und 38, und man soll nach Morin setzen:

	Pferdekräfte:					
	4–8	8–15	15–25	25–40	40–60	60–100
I	28	25	22	20	18	16
II	30	27	25	23	21	19
III	38	34	30	28	26	25
IV	30	25	22	19	17	16
V	38	34	30	28	26	24

Die Zahlen bei I bis V geben die Anzahl der Kolbenspiele in der Minute, und zwar gelten die Zahlen I für Watt'sche Niederdruckmaschinen, II für Woolf'sche, III, IV, V für eincylindrige Hochdruckmaschinen, III für Condensation ohne Balancier, IV für Condensation mit Balancier oder oscillirendem Cylinder, V bei mangelnder Condensation.

Aus der Anzahl der Kolbenspiele n in der Minute folgt dann:

$$s_1 = \frac{30v}{n}, \quad s = \frac{30v}{\varepsilon n},$$

also der ganze Hub und der Hub bei der Absperrung. Das Verhältniss des Kolbenhubs zum Durchmesser, also $\frac{s_1}{d}$ liegt gewöhnlich in den Grenzen 2 und $2\frac{3}{4}$. Legt man dasselbe zu Grunde, so kann man s_1 und $n = \frac{300}{s_1}$ bestimmen. Man kann zu dem Ende setzen:

$$\frac{s_1}{d} = \frac{\varphi}{1 + \psi d}.$$

Erfahrungen geben für die Niederdruckmaschinen:

$$\varphi = 3{,}058, \qquad \psi = 0{,}01106.$$

Für Woolf'sche Maschinen gelten dieselben Zahlen, wenn d und s_1 sich auf den grossen Cylinder beziehen. Für Hochdruckmaschinen mit Condensation ist, wenn kein Balancier vorhanden ist:

$$\varphi = 3{,}182, \qquad \psi = 0{,}02273,$$

und wenn dasselbe vorhanden ist:

$$\varphi = 3{,}618, \qquad \psi = 0{,}00945,$$

bei Hochdruckmaschinen ohne Condensation und ohne Balancier:

$$\varphi = 2{,}917, \qquad \psi = 0{,}02091,$$

und falls ein Balancier vorhanden ist:

$$\varphi = 3{,}3285, \qquad \psi = 0{,}00869.$$

Haben also die Zahlen I–IV dieselbe Bedeutung wie in der obigen Tafel, und gehen V und VI auf Hochdruckmaschinen ohne Condensation, V bei fehlendem, VI bei vorhandenem Balancier, so hat man folgende Tafel, bei welcher d in Zollen gegeben ist, und die Reihen I–VI die Grösse $\frac{s_1}{d}$ geben.

$d =$	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
I	2,87	2,70	2,56	2,42	2,30	2,19	2,09	2,00	1,91	1,84
II	2,87	2,70	2,56	2,42	2,30	2,19	2,09	2,00	1,91	1,84
III	2,80	2,50	2,25	2,06	1,89	1,75	1,63	1,52	1,43	1,35
IV	3,42	3,25	3,09	2,95	2,82	2,70	2,59	2,49	2,40	2,31
V	2,60	2,34	2,13	1,95	1,80	1,67	1,56	1,46	1,37	1,30
VI	3,16	3,01	2,88	2,76	2,64	2,54	2,44	2,35	2,27	2,19

Bei mangelnder Expansion ist $s = s_1$ zu setzen. Bei Woolf'schen Maschinen ist s der Kolbenhub im kleineren Cylinder, gewöhnlich hat man $s = \frac{2}{3} s_1$, jedenfalls aber ist das Verhältniss $\nu = \frac{s}{s_1}$ als gegeben zu betrachten, also nur das Verhältniss $\frac{F}{F_1}$ zu bestimmen. Die Geschwindigkeit im grossen Cylinder v ist bereits bestimmt worden, nämlich $v = \frac{\mu \sqrt{L}}{1 + \nu \sqrt{L}}$, und die Formel $F = \varepsilon \frac{144\,Q}{v}$ gibt den Flächeninhalt des Kolbens im kleinen Cylinder. Man hat ferner:

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s},$$

also:

$$F_1 = \frac{\varepsilon F}{\nu},$$

und für den Durchmesser der grösseren Kolbenflächen:

$$d_1 = 1{,}128 \sqrt{\frac{\varepsilon F}{\nu}}.$$

Zuweilen findet aber auch schon eine gewisse Expansion im kleinen Cylinder statt; möge der Dampf dann am Ende des Kolbenweges s_0 abgesperrt werden, dann ist das Expansionsverhältniss:

$$\varepsilon = \frac{F_1 s_1}{F s_0},$$

sei dann ε_0 dasjenige im kleinen Cylinder, also:

$$\frac{s}{s_0} = \varepsilon_0,$$

so kommt:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{F_1 s_1}{F s},$$

also:

$$F = \frac{144\,Q\,\varepsilon_0}{v} \text{ Quadratzoll,}$$

$$d = \sqrt{\frac{4F}{4}} = 1{,}128 \sqrt{F} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 Q}{v}} \text{ Zoll,}$$

$$F_1 = \frac{\varepsilon F s}{\varepsilon_0 s_1} = \frac{\varepsilon F}{\varepsilon_0 s} = \frac{144\,Q\,\varepsilon}{v \nu} \text{ Quadratzoll,}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{4 F_1}{\pi}} = 1{,}128 \sqrt{F_1} = 13{,}54 \sqrt{\frac{\varepsilon Q}{\nu v}} \text{ Zoll.}$$

Wenn die passende Anzahl der Spiele n vermöge der oben gegebenen Tabelle gefunden ist, so hat man endlich:

$$s_1 = \frac{30v}{n}, \quad s = \nu s_1 = \frac{30\,\nu v}{n}.$$

s_1 und s können aber auch mittels der Formeln:

$$\frac{s_1}{d_1} = \frac{\varphi}{1+\psi\,d}, \qquad s = \nu s_1$$

unmittelbar bestimmt werden.

Bei Condensationsmaschinen ist aber noch auf den Condensator und die Pumpen Rücksicht zu nehmen. Sei M_1 die Injectionswassermenge. Da Q Kubikfuss Dampf in der Secunde zu condensiren sind, so hat man:

$$66\,M = \frac{66\,Q}{\mu} = \frac{66}{29251}\,(1{,}785+p)\,Q = \frac{(1{,}755+p)\,Q}{443} \text{ Pfund.}$$

Ist t_0 die Temperatur des Injectionswassers, t_2 die im Innern des Condensator, so ist die Wärmemenge:

$$66\,M_1\,(t_2 - t_0),$$

welche M_1 beim Condensiren aufnimmt, gleich derjenigen:

$$66\,M\,(640 - t_2)$$

zu setzen, welche der Dampf beim Niederschlagen in Wasser von t_2 Grad verliert. Es ist also:

$$M_1 = \frac{640-t_2}{t_2-t_0}\,M = \frac{640-t_2}{t_2-t_0}\,\frac{Q}{\mu} \text{ Kubikfuss.}$$

Es ist hier das Watt'sche Gesetz zu Grunde gelegt. Nach Regnault ist (vergl. den Artikel: Wärme, Seite 190):

$$(t_2 - t_0)\,M_1 = (606{,}5 + 0{,}305\,t - t_2)\,M,$$

also:

$$M_1 = \frac{606{,}5+0{,}305\,t-t_2}{t_2-t_0}\,M.$$

Beide Formeln geben für die gewöhnlichen Verhältnisse nur geringe Unterschiede.

Aus der Injectionswassermenge sind jetzt die Dimensionen der Kaltwasserpumpe zu finden. Setzt man:

$$\frac{640-t_2}{t_2-t_0} = 28,$$

und bei Niederdruckmaschinen:

$$\mu = 1470,$$

dagegen bei Mitteldruckmaschinen:

$$p = 4 \text{ Atmosphären}, \quad \mu = 479,$$

so ergibt sich bei Niederdruck:

$$M_1 = \frac{28\,Q}{1470} = 0{,}0195\,Q,$$

und bei Mitteldruck:

$$M_1 = \frac{28\,Q}{479} = 0{,}0585\,Q.$$

Die Kaltwasserpumpe ist einfach wirkend, also das Product V_1 aus Kolbenfläche und Kolbenweg (Fassungsraum) gleich dem in jedem Spiele gehobenen Wasserquantum. $2\,V = 2\,F s$ ist das im Spiele verbrauchte Dampfquantum, also:

$$\frac{V_1}{2V} = \frac{M_1}{Q} = \frac{M_1}{\mu M},$$

und somit:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{2\,(640-t_2)}{\mu\,(t_2-t_0)},$$

das gibt:

$$V_1 = 0{,}039\,V \text{ für Niederdruck,}$$

$$V_1 = 0{,}117\,V \text{ für Mitteldruck.}$$

Für Watt'sche Maschinen ohne Condensation ist s der ganze Kolbenhub, und:

$$V_1 = 0{,}039\,V = \frac{V}{28} \text{ (ungefähr).}$$

Da aber stets etwas Wasser zurückgeht, sind wenigstens 10 Procent zuzusetzen. Watt setzt:

$$V_1 = \frac{V}{24},$$

und Andere sogar:

$$V_1 = \frac{V}{18}.$$

Bei Woolf'schen Maschinen von 4 Atmosphären ist:

$$V_1 = 0{,}117\, V,$$

oder:

$$V_1 = 0{,}13\, V,$$

je nachdem man den Wasserverlust berechnet oder nicht. Gewöhnlich wird V_1 hier gleich $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{6}$ des kleinen Cylinderraums V genommen. Uebrigens bezieht sich bei eincylindrigen Maschinen V natürliah nur auf den Raum vor der Absperrung.

Der Fassungsraum V_2 der Speisepumpe ergibt sich sogleich:

$$V_2 = \frac{2}{\mu}\, V,$$

wenn man:

$$\mu = \frac{Q}{M}$$

setzt. Bei Niederdruckmaschinen also:

$$V_2 = \frac{V}{735},$$

und bei Mitteldruck:

$$V_2 = \frac{V}{240},$$

wenn man die obigen Werthe für μ setzt. Um aber, wenn es nöthig ist, schnell speisen zu können, wird dieser Raum drei- bis sechsmal so gross genommen.

Durch die Luft- und Wasserpumpe muss in der Secunde die Wassermenge $M + M_1$, also ungefähr $28\, M$ fortgeschafft werden. Das Injectionswasser enthält ausserdem an Luft $\frac{1}{14}$ seines Volumens. Diese geht im Condensator von 1 Atmosphäre zu 0,1 über, ebenso von 12° Temperatur zu 35°, sein Raum ist also der Theil:

$$\tfrac{10}{14}\,[1 + 0{,}00367\,(35 - 12)] = 0{,}775$$

vom Raume des Wassers. Es findet sich ausserdem ein fast gleiches Volumen Dampf, und man muss also nehmen als fortzuschaffende Wasser-, Luft- und Dampfmenge:

$$M + (1 + 2 \cdot 0{,}775)\, M_1 = M + 2{,}55\, M_1$$
$$= 72\, M,$$

wenn man $M_1 = 28\, M$ setzt.

Ist jetzt V_3 der Fassungsraum der Luftpumpe, so ist wieder:

$$\frac{V_3}{2V} = \frac{72}{\mu},$$

oder:

$$V_3 = \frac{144\, V}{\mu},$$

also bei Niederdruck:

$$V_3 = \tfrac{144}{1470}\, V = \tfrac{1}{10}\, V,$$

und bei Mitteldruck:

$$V_3 = \tfrac{144}{480}\, V = \tfrac{3}{10}\, V.$$

Dieser Fassungsraum ist jedoch nach Watt zu verdoppeln. Dem Condensator endlich wird der Fassungsraum:

$$V_4 = \tfrac{1}{4}\, V \text{ bis } \tfrac{1}{3}\, V$$

gegeben. Die übrigen Dimensionen sind nach dem Dampfquantum V zu beurtheilen.

Damit der Querschnitt der Dampfleitung $\frac{1}{25}$ der Kolbenfläche betrage, ist seine Weite gleich $\frac{1}{5}\, d$ zu nehmen. Bei Hochdruck und geringer Expansion und bei dem Austragerohr im Allgemeinen setzt man die Weite sogar $\frac{1}{4}\, d$. Die Dimensionen der Kesselanlage sind in Abschnitt 2) bestimmt. Der Dampfkessel enthält 16 bis 20 mal so viel Raum, als die in der Stunde verdampfte Wassermenge $3600\, W$, er beträgt also $54000\, W$ bis $72000\, W$, wovon $\frac{2}{3}$ auf den Dampfraum kommen. Die Erwärmungsfläche soll 1 Quadratfuss auf stündlich 4 Fuss Dampf betragen. Ihr Inhalt ergibt sich hiernach:

$$\tfrac{36}{4} \cdot 3600\, W = 32400\, W \text{ Quadratfuss.}$$

Wicksteed rechnet auf 1 Quadratfuss Erwärmungsfläche die Verdampfung von

0,09 Kubikfuss = 5.94 Pfund

Wasser in der Stunde bei Cornvall'schen Kofferkesseln, dagegen:

0,0143 Kubikfuss = 0,94 Pfund

bei Cornvall'schen Cylinderkesseln. Bei Dampfschiff- und Locomotiv-Kesseln ist diese Dampfmenge 2 bis 3 mal so gross. Der Brennmaterial-Aufwand hängt natürlich auch von der Beschaffenheit desselben ab. Nach Wicksteed erfordern W Pfund Dampf $\frac{W}{8}$ bis $\frac{W}{7}$ Pfund guter Steinkohle.

Bei Watt'schen Maschinen ohne Expansion werden stündlich auf die Pferdekraft 10 bis 13 Pfund guter Kohle, bei Hochdruckmaschinen ohne Condensation 8 bis 11, bei solchen mit Condensation 5 bis 7, bei solchen ohne Expansion und ohne Condensation 17 bis 20 Pfund gerechnet.

Locomotiven sind hier nicht abgehandelt, und ist in Bezug auf dieselben auf den betreffenden Artikel zu verweisen

4) Calorische Maschinen und Dampfmaschinen mit überhitzten Dämpfen.

In dem Artikel: Wärme, Abschnitt 9 ist bereits mit wenigen Worten auf die Theorie der Calorischen Maschinen eingegangen; es soll hier noch Einiges über die Einrichtung derselben hinzugefügt werden.

Die Calorische Maschine besteht aus einem Reservoir B, worin die Luft erwärmt wird, und zwei Cylindern, einem kleineren A und einem grösseren C (Fig. 155), beide durch Röhren mit dem Reservoir verbunden. Kolben K im kleineren Cylinder saugt beim Aufgange äussere Luft durch das Ventil a ein, und gibt sie beim Niedergang durch das Ventil b ins Reservoir B ab, wo sie erwärmt wird, dann tritt dieselbe in den grösseren Cylinder, wo sie den Kolben L bewegt. Die Steuerung S bewirkt abwechselnd den Zutritt der Luft von B und C, und den Austritt von C in die Atmosphäre nach vollendeter Arbeit. Sei p die Spannung der äusseren Luft, p_1 die im Reservoir B, s der Hub des Kolbens L vor der Expansion, s_1 der ganze Kolbenhub, so ist:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{p}{p_1}$$

nach dem Mariotte'schen Gesetze, wenn die Temperatur constant bleibt, also Wärme hinzutritt; ist $V = F s_1$ der Fassungsraum der Druckpumpe A, also auch das in jedem Kolbenspiel in den Reservoir eingeführte Luftquantum, so ist der Raum des Arbeitscylinders C, also auch das im Kolbenspiele verbrauchte Luftquantum, unter Temperatur τ_1 und dem äusseren Drucke p gemessen:

$$V_1 = F_1 s_1 = \frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau} V,$$

wo τ die Temperatur der äusseren Luft, δ der Ausdehnungscoefficient ist. Vor der Expansion ist der Raum dieser Luftmenge:

$$V_0 = F_1 s_0 = F_1 s_1 \frac{p}{p_1} = \frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau} \frac{p}{p_1} V,$$

also für:

$$\frac{1+\delta\tau_1}{1+\delta\tau} = \frac{p}{p_1}$$

ergibt sich:

$$V_0 = V_1;$$

also der vor der Expansion eingenommene Raum der Luft in C ist dann gleich dem Raume von A. In diesem Falle ist die Temperatur der erhitzten Luft:

$$\tau_1 = \tau + \frac{p_1 - p}{p}\left(\frac{1}{\delta} + \tau\right).$$

Soll also z. B. $\frac{p_1}{p} = 2$ sein, so ist schon

$$\tau_1 - \tau = \frac{1}{0{,}00367} = 272^\circ$$

zu nehmen. Diese hohe Temperatur stellt sich als Hauptbinderniss der allgemeinen Anwendung Calorischer Maschinen entgegen, die trotz ihrer theoretischen Vorzüge vor der Dampfmaschine

Fig. 155.

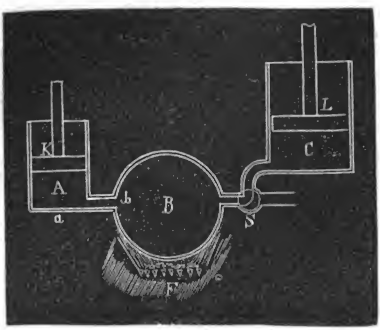
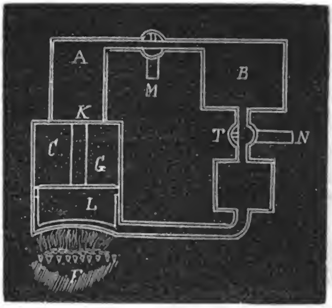


Fig. 156.



(es bedarf unter anderm bei den Dampfmaschinen eines Wärmeaufwandes um Wasser in Dampf zu verwandeln), einer viel grössern Abnutzung und verhältnissmässigen anderen Nachtheilen, aus diesem Grunde erliegen.

Die Wärme, welche hiernach mit der Luft aus dem Cylinder *C* ins Freie abströmt, kann aber auch weiter benutzt werden. Zu dem Ende lässt man sie durch einen Regenerator *F* (Fig. 155) strömen, d. h. durch eine Reihe von Drahtnetzen, welche einen Theil der Wärme absorbiren, und zur Erhitzung der neu eingeführten Luft verwenden.

Eine solche calorische Maschine ist die von Ericson (Fig. 156). Kolben *K* und *L*, die in den Cylindern *A* und *C* arbeiten, sind durch Stange *G* fest mit einander verbunden. Der Heerd *F* befindet sich unmittelbar unter dem Treibcylinder *C*, so dass ein besonderes Reservoir hier nicht nöthig ist. *B* ist dagegen ein Luftreservoir, *R* der Regenerator, *S* und *T* Steuerungen, wodurch der Zu- und Austritt der Luft, sowie der Uebergang derselben nach *A* und *B* und von *B* nach *R* regulirt wird. Wenn sich die Kolben heben, so wird die vorher von *M* eingesaugte Luft von *A* nach *B* durch *R* unterhalb *L* gedrückt, nach Zurücklegung eines gewissen Kolbenweges dreht sich der Steuerhahn *T*, so dass die Communication der Luft unterhalb *T* mit der in *B* aufgehoben ist. Es findet also jetzt Expansion statt. Beim höchsten Kolbenstande werden die Hähne *S* und *T* gedreht, so dass sie bei *M* und *R* bei *N* mit der äusseren Luft communiciren. Die Kolbenverbindung geht dann durch ihr Gewicht abwärts Hierbei tritt durch *M* frische Luft ein, und bei *N* die verbrauchte aus wobei aber ein Theil ihrer Wärme an den Regenerator abgegeben wird. Ist die Kolbenverbindung unten angelangt, so erfolgt abermalige Umsteuerung, und das Spiel beginnt von Neuem.

Dem Gebrauche des Regenerator haben sich übrigens erhebliche Missstände gegenüber gestellt, hauptsächlich der grosse Aufwand von Arbeit, welche beim Pressen der Luft durch die Drahtnetze verloren geht.

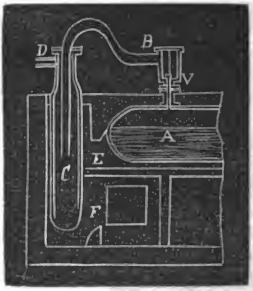
Man hat versucht, auch bei Dampfmaschinen das Prinzip der Calorischen Maschine anzuwenden, indem man die Dämpfe nicht im Maximum der Spannkraft, sondern im überhitzten Zustande verwendet.

Die Dämpfe werden bei solchen Maschinen vom Kessel, ehe sie in den Cylinder treten, in ein Gefäss, den Ueberhitzer, geleitet, wo ihnen neue Wärme zugeführt wird.

Sei *A* (Fig. 157) das Ende des Dampfkessels, *C* der Ueberhitzer, *B* das Rohr, welches von dem Kessel zum letzteren, *D* das vom Ueberhitzer zum Cylinder führende Rohr. Die bei *E* aus den Zügen abziehende Heizluft erwärmt den Ueberhitzer, sie umspielt ihn nämlich ganz, ehe sie bei *F* in den Schornstein tritt. Ventil *V* in der Röhre *B* regulirt die Dampfspannung in *C* so, dass sie nicht bedeutend unter der im Kessel sinkt, so dass der Ueberhitzer eben nur hauptsächlich eine Ausdehnung des Dampfes bewirkt.

Sei *p* die Spannung, *V* die während des Kolbenhubes verbrauchte Dampf-

Fig. 157.



menge, ε das Expansionsverhältniss, so ist die nach dem Mariotte'schen Gesetze vollführte Arbeit während des Kolbenschubs:

$$L = Vp\,(1 + \lg \varepsilon),$$

aber wenn das Volumen V durch den Ueberhitzer zur Grösse V_1 vermehrt wird:

$$L_1 = V_1\,p\,(1 + \lg \varepsilon),$$

wenn man nach dem Obigen p als fast constant annimmt; das Verhältniss beider Leistungen ist also:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{V_1}{V} = \frac{1 + \delta\,\tau_1}{1 + \delta\,\tau}.$$

Zur Erzeugung der Dampfmenge $V\gamma$ wurde ungefähr verbraucht die Wärmemenge:

$$W = 630\,V\gamma,$$

und zur Umänderung in überhitzten Dampf die Wärmemenge:

$$W_1 = 0{,}847\,(\tau_1 - \tau)\,V\gamma,$$

wenn 0,847 die specifische Wärme des Wasserdampfes ist; also das Verhältniss der Wärmemengen bei Anwendung und ohne Anwendung der Ueberhitzung:

$$\frac{W + W_1}{W} = 1 + 0{,}001344\,(\tau_1 - \tau),$$

also das Verhältniss der Wirkungsgrade beider Vorrichtungen:

$$\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{L_1\,W}{L\,(W + W_1)}$$

$$= \frac{1 + 0{,}00367\,\tau_1}{[1 + 0{,}001344(\tau_1 - \tau)]\,(1 + 0{,}00367\,\tau)}.$$

Für $\tau = 120^\circ$, $\tau_1 = 130^\circ$ ergibt sich z. B.:

$$\frac{\eta_1}{\eta} = 1{,}12,$$

also ein Gewinn von 12 Procent.

Um zu grosse Hitze zu vermeiden, wird auch zuweilen ein Gemisch von 1 Theil gesättigten und 3 Theilen überhitzten Dämpfen verwendet. Zu diesem Zwecke wendet die Wethead'sche Fabrik in Baltimore noch ein zweites schlangenförmiges Rohr an, welches durch den Feuerraum geht, wo der darin enthaltene Dampf dann überhitzt wird.

Auch das Prinzip des Regenerator ist bei Dampfmaschinen versucht werden, jedoch ohne sonderlichen Erfolg.

Von Werken über Dampfkessel und Dampfmaschinen sind anzuführen:

Tredgold, *Treatise on the Steam Engine*,

A. Morin, *Leçons de Mécanique pratique, tome* 3,

Pambour, *Théorie des machines à Vapeur*,

Weissbach, Ingenieur- und Maschinen-Mechanik, Bd. 2.

Anwendungen der mechanischen Wärmelehre auf die Dampfmaschine geben:

Clausius, Abhandlungen über mechanische Wärmelehre,

Rankine, *On the mechanical action of heat* (*Philosophical Magazine, Vol. VII*),

Zeuner, Mechanische Wärmelehre.

Diesem Artikel ist Weissbach's Maschinenmechanik auszugsweise zu Grunde gelegt.

Wage (Maschinenlehre).

Siehe Waage.

Wagenkessel (Maschinenlehre).

Siehe Dampfmaschine.

Wagenrad (Maschinenlehre).

Siehe Rad.

Wagenwinde (Maschinenlehre).

Siehe Winde.

Wagensteuerung (Maschinenlehre).

Siehe Steuerung.

Wahre Anomalie (Astronomie).

Siehe Anomalie.

Wahrer Ort (Astronomie).

Der Ort, an dem sich ein Stern wirklich befindet, zum Unterschiede von dem scheinbaren, wie er sich durch die Strah-

lenbrechung und Aberration bei den Beobachtungen ergibt. Indessen pflegt man zuweilen unter wahrem Ort denjenigen zu verstehen, der auf den wahren Horizont, d. h. auf eine durch den Erdmittelpunkt parallel der Tangentialebene des Ortes gelegten Ebene, bezogen ist. Wegen der Parallaxe fallen nämlich diese beiden Orte bei den Planeten und Cometen nicht völlig zusammen. Dies ist jedoch bei den Fixsternen der Fall. Bezieht man die Entfernungen auf die Ekliptik, so ist der wahre Ort auf eine festgedachte Ekliptik und einen festen Anfangspunkt zu beziehen, wogegen der scheinbare auf die durch Präcession und Nutation veränderliche Ekliptik geht.

Wahrscheinlicher Fehler (Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Siehe Quadrate (Methode der kleinsten).

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Combinationslehre).

1) Allgemeines.

Der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist wie viele andere in der angewandten Mathematik einem Ausdrucke des gewöhnlichen Lebens entnommen, und dient, denselben zu präcisiren, scharfen Vergleichen und der Rechnung zugänglich zu machen.

Im gewöhnlichen Leben nennt man ein zu erwartendes Ereigniss wahrscheinlich, wenn Erfahrung oder Ueberlegung zeigen, dass unter ähnlichen Verhältnissen wie die gegebenen sein Eintreten eher zu erwarten ist als sein Nichteintreten, und von zwei Ereignissen eines wahrscheinlicher als das andere, wenn das Eintreten des ersteren eher als das letztere zu erwarten ist.

Durch Präcision dieser Betrachtung gelangt man zum Begriffe der Wahrscheinlichkeit und der relativen Wahrscheinlichkeit in der Mathematik.

Nehmen wir an, dass unter einer Reihe von n möglichen Fällen eine gewisse Anzahl p als der Erwartung entsprechend, mithin als günstig betrachtet werden, so nennt man den echten Bruch $\frac{p}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser günstigen Fälle eintrete, also:

„Die mathematische Wahrscheinlichkeit irgend eines Ereignisses, welches in gewissen Fällen stattfindet, in anderen aber nicht, ist ein Bruch, dessen Zähler die Anzahl der günstigen Fälle, dessen Nenner alle möglichen Fälle enthält.“ Vorausgesetzt ist hierbei, dass jeder der Fälle als gleich möglich gilt. Dies ist aber immer anzunehmen, denn hätte man einen Grund zur Annahme, dass ein Fall doppelt so oft eintreten kann als der andere, so ist dieser erstere natürlich als zwei Fälle zu betrachten und demgemäss in Rechnung zu bringen.

Also: Die Wahrscheinlichkeit, dass Jemand mit einem Würfel eine 3 werfe, ist also $\frac{1}{6}$, da unter 6 gleich möglichen Fällen einer dieser Bedingung genügt, die Wahrscheinlichkeit, eine ungrade Zahl damit zu werfen, $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, da von den 6 Fällen 3 diese Bedingung erfüllen. Die Wahrscheinlichkeit 1 entspricht also der Gewissheit, 0 der Unmöglichkeit.

Wüsste man aber, dass der Würfel so construirt ist, dass er öfter 6 als eine andere Zahl trifft, also z. B 3 mal 6, während er jede andere Zahl einmal trifft, so ist die Anzahl der möglichen Fälle $3+5=8$, die Wahrscheinlichkeit 6 zu werfen $\frac{3}{8}$, die jeder anderen Zahl $\frac{1}{8}$.

Relative Wahrscheinlichkeit heisst das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse. Die relative Wahrscheinlichkeit, 3 mit einem Würfel zu werfen, zu der eine ungrade Zahl zu werfen ist, also: $\frac{1}{6}:\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.

Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit ist diejenige, wo zugleich mehrere Fälle in Betracht kommen. Es sind dabei zwei Fälle zu untersuchen:

1) Die Wahrscheinlichkeit, wenn statt eines Ereignisses mehrere als günstig betrachtet werden.

Z. B. mit einem Würfel soll 4 oder 5 geworfen werden. Offenbar setzt sich in diesem Falle die Wahrscheinlichkeit aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse zusammen. Also da für 4 und für 5 beide Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{6}$ sind, so ist die zusammengesetzte $=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

2) Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer Ereignisse.

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass Jemand zweimal werfend mit einem Würfel erst 4, dann 5 wirft. Es sind hier, da zu jedem der 6 möglichen ersten Würfe 6 mögliche zweite Würfe kommen, überhaupt $6\cdot 6$ möglich und eins von diesen günstig, also die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$. Allgemein:

Die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ist gleich dem Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Mathematische Hoffnung für einen zu erlangenden Gewinn ist das Product des Gewinnes und der Wahrscheinlichkeit desselben. Offenbar nämlich hängt der Werth eines ungewissen Gewinnes nicht allein von dem Werthe desselben, sondern auch von der Wahrscheinlichkeit desselben ab. Z. B. wenn die glückliche Ankunft eines Schiffes einer gewissen Summe n gleichzusetzen ist, welche der Eigenthümer dadurch gewinnt, und von p gleich ausgerüsteten und geführten Schiffen q untergehen, also $p-q$ ankommen, so ist die Hoffnnng des Gewinnes gleich $\frac{(p-q)n}{p}$.

Die mathematische Hoffnung, dass einer von mehreren Gewinnen stattfinde, ist gleich der Summe der Hoffnungen der einzelnen Ereignisse.

Dies gilt auch, wenn neben den Gewinnen Verluste vorkommen. Man kann die letzteren nämlich als negative Gewinne mit in Rechnung bringen.

Bei Hazardspielen und Wetten müssen offenbar die Hoffnungen der Theilnehmer gleich sein, falls Spiel oder Wette eine denselben gleich günstige sein soll. Dies ist bei Lotterie und andern Hazardspielen indess nicht der Fall, wo dem Unternehmer ein Vortheil zu Theil wird. Indess ist dieser theilweise insofern begründet, als Verwaltungskosten und andere Auslagen von demselben zu leisten sind. Was noch übrig bleibt, ist als eine Prämie zu rechnen, welche man für die Erlaubniss, am Spiele Theil zu nehmen, zahlt. Bei Staats-Lotterien stellt sich diese Prämie bekanntlich sehr hoch, dies ist aber nur dadurch möglich, dass der Staat ähnliche Unternehmungen untersagt, also Concurrenz unmöglich macht.

Bei solchen Spielen, wo entweder wie beim Schach das Spiel ganz von der Geschicklichkeit der Theilnehmer geleitet wird, oder wie bei den meisten Glücksspielen Geschick und Scharfsinn zugleich mit dem Zufall wirken, ist die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes, insoweit sie von den ersteren Factoren abhängt, im Allgemeinen schwerlich *a priori* zu bestimmen. Man könnte sie *a posteriori* bestimmen, indem man das Verhältniss der Partien, welche der eine und der andere gewinnt, ermittelt und danach den Einsatz bestimmt. Z. B. A und B spielen Piquette. Unter 100 Partien gewinnt A 62, B 38, man kann dann annehmen, dass die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes für A gleich $\frac{62}{100}$, für B gleich $\frac{38}{100}$ ist, und demnach, wenn der Einsatz von $A=x$, von $B=y$ ist, dieselben so bestimmen, dass die Hoffnungen $\frac{62y}{100}$ und $\frac{38x}{100}$ gleich sind, Jeder gewinnt nämlich den Einsatz des andern. Es ergäbe sich also:

$$\frac{x}{y}=\frac{62}{38}.$$

Indess verfährt man in der Regel nicht so, sondern setzt $x=y$, also nimmt die Wahrscheinlichkeiten als gleich an. Indem der Ueberschuss über die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ dem Geschick und Scharfsinn des betreffenden Spielers angehört, so lässt man demselben also diese Eigenschaften zu Gute kommen, indem sie seine Hoffnung vergrössern.

Diese Definitionen lassen die Lösung gewisser Aufgaben zu, die aus gewissen gegebenen Wahrscheinlichkeiten die Bestimmungen gewisser anderer verlangen.

Als Beispiel wählen wir das folgende.

Ein eingetretenes Ereigniss kann verschiedene Ursachen haben, die wir mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ bezeichnen. Man weiss, dass wenn man die Ursache α_s als Grund dieses Ereignisses voraussetzt, dass dann die Wahrscheinlichkeit desselben p_s sein würde. Es wird jetzt gefragt, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass das eingetretene Ereigniss von der Ursache α_s herrühre.

Zunächst lassen sich die Brüche p_1, $p_2 \ldots$ alle auf denselben Nenner n bringen, es ist also:

$$p_s=\frac{q_s}{n}.$$

Unter n Fällen, wo dies Ereigniss statthat, tritt also Ursache α_s in q_s Fällen, irgend eine der Ursachen aber in $q_1+q_2+q_3+\ldots$ Fällen ein. Die erste Zahl bedeutet die günstigen, die zweite alle möglichen Fälle, und somit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit der Ursache α_s gleich:

$$\frac{q_s}{q_1+q_2+q_3+\ldots}=\frac{p_s}{p_1+p_2+p_3+\ldots},$$

d. h. gleich dem Quotienten der Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss von der verlangten Ursache herrühre, durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass es von einer der Ursachen herrühre.

Vorausgesetzt ist hier, dass alle Ur-

sachen gleich wahrscheinlicherweise eintreten können. Sollte dies nicht der Fall sein, sondern sich diese Wahrscheinlichkeiten wie $\beta_1, \beta_2 \dots$ verhalten, so ist offenbar:

$$\frac{\beta_s p_s}{\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \dots}$$

die verlangte Zahl.

Sind in der zuerst gegebenen Formel alle Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \dots$ gleich und ihre Anzahl n, so ist $\frac{1}{n}$ die gesuchte Zahl.

Z. B. wenn mit einem Würfel über 4 geworfen wird, kann jeder der Würfe 5 und 6, welche die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ haben, die Ursache sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Wurf 5 die Ursache ist, wird somit $\frac{1}{2}$ sein.

2) Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Würfelspiel.

Beim Würfelspiel handelt es sich im Allgemeinen um die Augenzahl, welche man mit einer gegebenen Anzahl Würfeln wirft.

Es enthält jeder Würfel die Augen 1, 2 bis 6, wir setzen, um etwas allgemeiner zu verfahren, aber die Augenzahlen $1, 2 \dots q$ voraus. Es fragt sich, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, mit n Würfeln die Zahl p zu werfen.

Zunächst ist die Anzahl der möglichen Würfe offenbar gleich q^n. Denn bei einem Würfel sind q Würfe möglich, deren jedem q Würfe des zweiten entsprechen, also bei 2 Würfeln gibt es q^2 Würfe, deren jeder sich mit q des dritten combinirt u. s. w.

Es fragt sich nun, wieviel Fälle davon p Augen geben.

Sei die entsprechende Zahl gleich $f(n, p)$. Mit einem der n Würfel kann man nun 1 werfen, während man mit den übrigen $p-1$ wirft, oder mit dem ersten 2 und den übrigen $p-2$ u. s. w., also endlich mit dem ersten q, mit den übrigen $p-q$, und die Zahl $f(n, p)$ ist die Summe der entsprechenden Fälle. Da aber mit $n-1$ Würfeln $p-1$ geworfen werden können in $f(n-1, p-1)$ Fällen, $p-2$ in $f(n-1, p-2)$ Fällen u. s. w., so hat man:

$$1)\quad f(n, p) = f(n-1, p-1) + f(n-1, p-2) + \dots + f(n-1, p-q).$$

Ist $n=1$, so ist offenbar nur in einem Falle möglich, die Zahl p zu treffen, wenn p positiv und nicht grösser als q ist, sonst ist dies unmöglich, also:

$$2)\quad f(1, p) = 1 \text{ wenn } 0 < p < q+1,$$
$$f(1, p) = 0 \text{ wenn } p < 1 \text{ oder } p > q.$$

Diese Gleichungen bestimmen die gesuchte Function völlig.

Es soll jetzt verstanden werden unter a_s der Ausdruck:

$$\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-s+1)}{1 \cdot 2 \dots s},$$

also der $s$te Binomialcoefficient, jedoch nur für nicht negatives a. Für negatives a soll dagegen a_s immer gleich 0 sein. s kann jede positive ganze Zahl, auch Null sein, und in diesem Falle setzen wir:

$$a_0 = 1 \text{ oder gleich } 0,$$

je nachdem a nicht negativ oder negativ ist. Für $a=0$ ist somit auch:

$$0_0 = 1,$$

aber wenn s grösser als 0, offenbar:

$$0_s = \frac{0 \cdot (-1) \dots}{1 \cdot 2} = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung kann man Gleichung 2) auch schreiben:

$$2a)\quad f(1, p) = (p-1)_0 - (p-q-1)_0,$$

denn ist p Null oder negativ, so verschwinden beide Glieder rechts, ist p positiv und kleiner als $q+1$, so verschwindet das zweite Glied, das erste aber gibt 1; ist p grösser als q, so werden beide Glieder gleich, ihre Differenz also Null.

Die bekannte Formel:

$$(a+1)_{s+1} - a_{s+1} = a_s$$

gilt offenbar für jedes positive a, wenn s positiv oder Null ist.

Für $a=0$ würde sie geben:

$$1_{s+1} - 0_{s+1} = 0_s,$$

sie ist also richtig, wenn s grösser als Null ist, da beide Seiten Null geben.

Für $s=0$ geben beide Seiten Eins, die Formel ist also auch in diesem Falle richtig.

Für $a=-1$ erhalten wir:

$$0_{s+1} = 0,$$

was immer richtig ist, wenn s positiv oder grösser als Null. Endlich für negatives a, das nicht gleich -1 ist, geben beide Seiten der Formel Null. Für alle Werthe von q und s, die hier in Betracht kommen, ist also unsere Formel richtig. Aus ihr aber ergibt sich:

$$p_{s+1} - (p-1)_{s+1} = (p-1)_s,$$
$$(p-1)_{s+1} - (p-2)_{s+1} = (p-2)_s,$$
$$(p-2)_{s+1} - (p-3)_{s+1} = (p-3)_s$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$(p-q+1)_{s+1} - (p-q)_{s+1} = (p-q)_s,$$

also durch Addition:

$$(p-1)_s + (p-2)_s + \ldots + (p-q)_s = p_{s+1} - (p-q)_{s+1},$$

eine Formel, welche für beliebiges p und q und für $s=0, 1, 2, 3 \ldots$ gilt. Nun hat man nach 1) und 2a):

$$f(2, p) = (p-2)_0 + (p-3)_0 + \ldots + (p-q-1)_0$$
$$-(p-q-2)_0 - (p-q-3)_0 - \ldots - (p-2q-1)_0,$$

also mit Anwendung der letzten Formel:

$$f(2, p) = (p-1)_1 - 2(p-q-1)_1 + (p-2q-1)_1,$$

c rner:

$$f(3, p) = (p-2)_1 + (p-3)_1 + \ldots + (p-q-1)_1$$
$$-2[(p-q-2)_1 + (p-q-3)_1 + \ldots + (p-2q-1)_1]$$
$$+(p-2q-2)_1 + (p-2q-2)_1 + \ldots + (p-3q-1)_1$$
$$= (p-1)_2 - 3(p-q-1)_2 + 3(p-2q-1)_2 + (p-3q)_2,$$

und da der Mechanismus des Verfahrens ganz der aus dem binomischen Lehrsatze bekannte ist:

3) $$f(n, p) = (p-1)_{n-1} - n(p-q-1)_{n-1} + n_2(p-2q-1)_{n-1}$$
$$- n_3(p-3q-1)_{n-1} + \ldots,$$

eine Reihe, welche von selbst abbricht, da die Grösse in der Klammer zuletzt negativ wird.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit aber ist:

$$W = \frac{f(n, p)}{q^n}.$$

Z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 6 Würfeln 26 zu werfen, ist, da:

$$n=6, \quad p=26, \quad q=6$$

ist:

$$W = \frac{26_5 - 6 \cdot 20_5 + 6_2 14_5 - 6_3 8_5 + 6_4 2_4}{6^6} = \frac{1666}{6^6} = \frac{833}{2328}.$$

Soll aber die betreffende Wahrscheinlichkeit W mittels einer Tafel ausgedrückt werden, so wird man statt von der Formel 3) lieber von der recurrenten Formel 2) ausgehen.

Fragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, eine Augenzahl zu werfen, welche kleiner als eine gegebene p ist.

Sei die Anzahl der günstigen Fälle $= \varphi(n, p)$ und V die Wahrscheinlichkeit, so ist:

$$V = \frac{\varphi(n, p)}{q^n},$$

$$\varphi(n, p) = f(n, 1) + f(n, 2) + \ldots + f(n, p-1),$$

oder:

$$\varphi(n, p) = \sum_{s=1}^{s=p-2} [s_{n-1} - n(s-q)_{n-1} + n_2(s-2q)_{n-1} - \ldots],$$

woraus sich ergibt:

4a) $$\varphi(n, p) = (p-1)_n - n(p-1-q)_n + n_2(p-1-2q)_n - \ldots$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit 3 Würfeln unter 12 zu werfen, ist also:

$$V = \frac{11_3 - 3 \cdot 5_3}{6^3} = \frac{135}{216} = \frac{5}{8}.$$

Spielen also zwei Personen unter der Bedingung, dass der Werfende gewinne, wenn er wenigstens 12 wirft, dagegen verliere, wenn er weniger wirft, so ist die letztere Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{8}$, die erstere also $1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$, $5:3$ die relative Wahrscheinlichkeit von Verlust und Gewinn. Damit die Hoffnung für beide Spieler dieselbe sei, hat also der Werfende den Einsatz 3 zu machen, wenn der Andere den Einsatz 5 macht.

Man kann aus Formel 4) auch folgende Aufgabe lösen Zwei Spieler werfen unter der Bedingung, dass der höchste Wurf gewinne. Der erste hat geworfen und zwar p Augen. Welche Wahrscheinlichkeit hat der zweite, zu gewinnen?

Er verliert, wenn er unter p Augen wirft, und hier ist die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{\varphi(n, p)}{q^n}$, wirft er p Augen, ein Wurf, der die Wahrscheinlichkeit $\frac{f(n, p)}{q^n}$ hat, so beginnt das Spiel vom Neuen und die Wahrscheinlichkeit, zu verlieren, ist dann für ihn $\frac{1}{2}$, also die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit des Verlustes für diesen Fall $\frac{1}{2}\frac{f(n, p)}{q^n}$, somit die Gesammtwahrscheinlichkeit, zu verlieren:

$$\frac{\varphi(n, p) + \frac{1}{2}f(n, p)}{q^n},$$

und die, zu gewinnen:

5) $$V = 1 - \frac{\varphi(n, p) + \frac{1}{2}f(n, p)}{q^n}.$$

Mögen jetzt mehrere Spieler sein; deren Anzahl sei $s+t$, von denen s schon geworfen haben, und zwar der, welcher den höchsten Wurf gethan hat, p Augen. Es wird vorausgesetzt, dass kein zweiter ebensoviel geworfen hat, und man fragt, welche Wahrscheinlichkeit derselbe für sich hat, zu gewinnen.

Dies geschieht offenbar dann, wenn der folgende unter p Augen wirft, der nächste auch u. s. w. Für jeden ist die Wahrscheinlichkeit, dass dies geschieht, $\frac{\varphi(n, p)}{q^n}$, also die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens dieser Ereignisse:

$$\frac{\varphi(n, p)}{q^n} \cdot \frac{\varphi(n, p)}{q^n} \ldots = \frac{[\varphi(n, p)]^t}{q^{nt}}.$$

Es ist aber dazu die Wahrscheinlichkeit zu addiren, welche sich daraus für den Gewinn ergibt, dass einer der noch Kommenden oder mehrere p selbst werfen. In diesem Falle sei festgesetzt, dass alle, die denselben Wurf gethan, unter sich um den Gewinn werfen.

Wir suchen zuerst die Wahrscheinlichkeit, dass nur einer noch den Wurf p macht, keiner aber darüber. Ist dies der nächstfolgende, so ist seine Wahrscheinlichkeit, dass er p wirft, gleich $\frac{f(n, p)}{q^n}$ die, dass kein anderer diesen Wurf thut: $\frac{[\varphi(n, p)]^{t-1}}{q^{n(t-1)}}$, also die Gesammtwahrscheinlichkeit dieses Falles:

$$\frac{f(n, p)\,\varphi(n, p)^{t-1}}{q^{nt}}.$$

Da jeder der t Werfenden aber p treffen kann, so sind t mal so viel Fälle als zutreffend zu nehmen. Der Spieler, dessen Wahrscheinlichkeit zu gewinnen wir untersuchen, hat dann nur mit einem zu werfen, und seine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen ist $\frac{1}{2}$; wir multipliciren also den obigen Ausdruck mit $\frac{1}{2}$.

Mögen nun zwei Spieler p, alle übrigen aber darunter werfen. Die beiden Nächstfolgenden seien es zunächst, die p werfen. Die Wahrscheinlichkeit für beide combinirt gibt $\frac{f(n,\,p)^2}{q^{2n}}$, und die der übrigen, darunter zu werfen, ist: $\frac{\varphi(n,\,p)^{t-2}}{q^{n(t-2)}}$. Dies kann so oft geschehen, als 2 sich aus t herausgreifen lassen, also t_2 mal, und da 3 dann spielen, ist $\frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit für Jeden, zu gewinnen. Wir erhalten, indem wir so fortfahren, für unsere Wahrscheinlichkeit V folgenden Ausdruck:

$$6)\quad V=\frac{1}{q^{nt}}\Big[\varphi(n,\,p)^t+\frac{t}{2}f(n,\,p)\,\varphi(n,p)^{t-1}+\tfrac{1}{3}t_2\,f(n,\,p)^2\,[\varphi(n,\,p)]^{t-2}$$
$$+\tfrac{1}{4}t_3\,f(n,\,p)^3\,\varphi(n,p)^{t-3}+\ldots\Big].$$

Die Reihe bricht von selbst ab, da t_s endlich gleich Null wird.

Fragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, die einer der noch folgenden Spieler hat zu gewinnen, so ist diese für alle zusammen gleich $1-V$, und da jeder die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, für jeden darunter gleich $\frac{1}{t}(1-V)$.

Mögen nun aber von den s Spielern, welche schon geworfen haben, eine Anzahl r den höchsten Wurf p gemacht haben, so bleiben die Wahrscheinlichkeiten, dass ausserdem keiner p oder darüber, oder einer p wirft u. s. w. dieselbe. Im ersteren Falle theilt sich aber das neue Spiel unter r, im zweiten unter $r+1$ u. s. w., so dass man hat:

$$7)\quad V=\frac{1}{q^{nt}}\Big[\frac{1}{r}\,\varphi(n,\,q)^t+\frac{t}{r+1}f(n,\,p)\,\varphi(n,p)^{t-1}+\frac{t_2}{r+2}f(n,p)^2\,\varphi(n,p)^{t-2}$$
$$+\frac{t_3}{r+3}f(n,p)^3\,\varphi(n,p)^{t-3}+\ldots\Big]$$

für die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes eines derjenigen Spieler, welche t geworfen haben. Für die, welche noch nicht geworfen haben, ist ebenfalls dann die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{t}(1-V)$.

Indess lässt sich für den Ausdruck 7), von dem 6) ein specieller Fall ist, der $r=1$ entspricht, eine bequemere Form finden. Zu dem Ende setzen wir:

$$f(n,p)=\beta,\qquad \varphi(n,p)=\alpha,$$

dann ist:

$$U=q^{nt}\,V=\frac{1}{r}\,\alpha^t+\frac{t}{r+1}\,\alpha^{t-1}\,\beta+\frac{t_2}{r+2}\,\alpha^{t-2}\,\beta_2+\ldots,$$

also:

$$U\beta^r=\frac{1}{r}\,\alpha^t\beta^r+\frac{t}{r+1}\,\alpha^{t-1}\,\beta^{r+1}+\frac{t_2}{r+2}\,\alpha^{t-2}\,\beta^{r+2}+\ldots,$$

und:

$$\frac{d\,(U\beta^r)}{d\beta}=\beta^{r-1}\,(\alpha^t+t\alpha^{t-1}\,\beta+t_2\alpha^{t-2}\,\beta^2+\ldots)=\beta^{r-1}\,(\alpha+\beta)^t,$$

also:

$$\frac{d(\beta^r V)}{d\beta} = \beta^{r-1}\,\frac{(\alpha+\beta)^t}{q^{nt}},$$

und in Berücksichtigung, dass für $\beta=0$ auch $\beta^r V=0$ ist:

$$V=\frac{1}{q^{nt}\beta^r}\int_0^r \beta^{r-1}\,(\alpha+\beta)^t\,d\beta.$$

Durch theilweises Integriren erhält man hieraus:

$$V=\frac{1}{q^{nt}\beta^r}\left[\frac{(\alpha+\beta)^{t+1}}{t+1}\,\beta^{r-1}-\frac{r-1}{t+1}\int_0^r (\alpha+\beta)^{t+1}\,\beta^{r-2}\,d\beta\right],$$

und indem man so fortfährt:

$$\text{7a)}\quad V=\frac{1}{(t+1)\,q^{nt}\beta^r}\Bigg[(\alpha+\beta)^{t+1}\,\beta^{r-1}-\frac{(r-1)\,(\alpha+\beta)^{t+2}\,\beta^{r-2}}{t+2} + \frac{(r-1)\,(r-2)\,(\alpha+\beta)^{t+3}\,\beta^{r-3}}{(t+2)(t+3)} - \dots$$
$$(-1)^{r-1}\,\frac{(r-1)\,(r-2)\,\dots\,1}{(t+2)\,\dots\,(t+r-1)}\left[(\alpha+\beta)^{t+r}-\alpha^{t+r}\right]\Bigg].$$

Die Reihe bricht von selbst ab.

Alle Glieder folgen demselben Gesetze, nur im letzten ist statt:

$$(\alpha+\beta)^{t+r}$$

zu setzen:

$$(\alpha+\beta)^{t+r}-\alpha^{t+r}.$$

Für den Fall, dass nur ein Spieler die Zahl p getroffen hat, wo also $r=1$ ist, hat man:

$$\text{6a)}\qquad V=\frac{1}{(t+1)\,q^{nt}\beta}\left[(\alpha+\beta)^{t+1}-\alpha^{t+1}\right].$$

Z. B. 8 Personen spielen mit 4 Würfeln. 3 haben schon geworfen und einer darunter den höchsten Wurf 13 gemacht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit seines Gewinnes?

Es ist:

$$q=6,\qquad n=4,\qquad t=5,\qquad p=13,\qquad \beta=140,\qquad \alpha=435,$$

wie die hier folgende Tafel ergibt, also:

$$V=\frac{1}{6^{21}\cdot 140}\,(575^6-335^6).$$

Man sieht, dass die Rechnung oft sehr mühevoll, zuweilen unausführbar werden müsste. Um so wichtiger sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung einfache Annäherungsformeln, wie sie namentlich La Place gegeben hat.

Augen	Wahrscheinlichkeit					
p	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=5$
1	1	1	0			
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7		6	15	20	15	6
8		5	21	35	35	21
9		4	25	56	70	56
10		3	27	80	126	126
11		2	27	104	205	252
12		1	25	125	305	456
13			21	140	420	756
14			15	146	540	1161
15			10	140	651	1666
16			6	125	735	2247
17			3	104	780	2856
18			1	80	780	3431
19				56	735	3906
20				35	651	4221
21				20	541	4332
22				10	420	4221
23				4	305	3906
24				1	205	3431
25					126	2856
26					70	2247
27					35	1666
28					15	1161
29					5	756
30					1	456
31						252
32						126
33						56
34						21
35						6
36						1

Beim Würfelspiel kommt auch noch das Paschwerfen, d. h. das Werfen derselben Augen gleichzeitig mit 2 oder mehreren Würfeln in Betracht.

Die einfachste hierhin gehörige Frage ist die: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit n Würfeln p gleiche Augen, aber nicht mehr, auch nicht ausserdem noch eine Anzahl gleicher Augen zu werfen?

Gleiche Augen mit p Würfeln können die Zahlen 1, 2 . . . q treffen, es sind also dabei q Fälle möglich. Da aber eine beliebige Verbindung von p Würfeln diese geben kann', so tritt jeder dieser Fälle so oft ein, als sich p Elemente aus n herausgreifen lassen, d. h. n_p mal, man hat also $n_p \cdot q$ Fälle. Mit dem $p+1$ten Würfel kann dann jeder andere Wurf, also im Ganzen $q-1$ gethan werden, mit dem folgenden jeder ausser dem des vorigen und der p Würfel, welche Gleiches trafen, also $q-2$ Fälle u. s. w., mit dem $n$ten Würfel treten also $q-n+p$ Fälle

ein. Mit dem Product dieser Zahlen ist $n_p q$ zu multipliciren, und man hat den Zähler der Wahrscheinlichkeit V, während der Nenner q^n ist. Also:

8) $$V=\frac{n_p(q-1)(q-2)\ \ldots\ (q-n+p)}{q^{n-1}}.$$

Suchen wir jetzt die Wahrscheinlichkeit, zugleich p_1, p_2, $p_3 \ldots p_s$ gleiche Augen, die jedoch unter einander verschieden sind, zu werfen.

Zu dem Ende wollen wir das Product $n(n-1)\ \ldots\ (n-\alpha+1)$ mit $n^{(\alpha)}$ bezeichnen, so dass $n_\alpha=\frac{n^{(\alpha)}}{\alpha!}$ ist, wenn $\alpha!=1\cdot 2\ \ldots\ \alpha$ gesetzt wird.

Mit den ersten p_1 Würfeln, die sich n_{p_1} mal herausgreifen lassen, sind q gleiche Würfe möglich; die nächsten p_2 Würfel lassen sich $(n-p_1)_{p_2}$ mal herausgreifen, und da keine den ersten gleiche Würfe gethan werden sollen, so sind deren $q-1$ günstig; bei den dritten, die sich $(n-p_1-p_2)_{p_3}$ mal combiniren lassen, sind $q-2$ Würfe günstig u. s. w., also bei den letzten p_s: $q+1-s$ Würfe, und diese Würfel combiniren sich $(n-p_1-p_2-\ \ldots\ -p_{s-1})_{p_s}$ mal. Man hat also zunächst das Product:

$$n_{p_1}(n-p_1)_{p_2}\ \ldots\ (n-p_1-p_2-\ \ldots\ -p_{s-1})_{p_s}\,q(q-1)\ \ldots\ (q+1-s)$$
$$=\frac{n^{(p_1+p_2+\ \ldots\ +p_s)}\,q\cdot(-1)^{(s-1)}}{p_1!\,p_2!\ \ldots\ p_s!}.$$

Mit den ersten der noch übrigen Würfel, deren Zahl ist $n-p_1-p_2-\ \ldots\ -p_s$ sind alle Würfe weniger den schon gethanen s günstig, also $q-s$, bei dem nächsten $q-s-1$ u. s. w., also beim letzten:

$$q+1-s-n+p_1+p_2+\ \ldots\ +p_s.$$

Das Product dieser Zahlen ist gleich:

$$(q-s)^{n-p_1-p_2-\ \ldots\ -p_s}.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$p_1+p_2+\ \ldots\ +p_s=P,$$

so kommt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

9) $$W=\frac{n^{(P)}(q-1)^{(n+s-1-P)}}{p_1!\,p_2!\ \ldots\ p_s!\,q^{n-1}}.$$

Bei derselben Bezeichnung gibt die Formel 8);

8a) $$V=\frac{n^{(p)}(q-1)^{(n-p)}}{p!\,q^{n-1}};$$

sie entspricht dem Falle, wo $s=1$ ist.

Es ist bei Bildung der Formel 9) vorausgesetzt, dass die Anzahlen der gleichen Augen p_1, $p_2 \ldots$ alle von einander verschieden sind. Ist dies nicht der Fall, kommen z. B. dreimal p_1 Augen vor, so sind die betreffenden Combinationszahlen nicht richtig, weil die ersten p_1 Augen z. B. sich mit den zweiten p_1 vertauschen können, was keine neue Combination gibt; es ist also durch die Anzahl der Permutationen unter 3 Elementen $1\cdot 2\cdot 3$ zu dividiren. Allgemein möge die Zahl p_α vorkommen r_α mal, so ist zu setzen:

$$P = r_1 p_1 + r_2 p_2 + \dots r_s p_s,$$
$$R = r_1 + r_2 + \dots + r_s,$$

und W wird:

$$W' = \frac{n^{(P)} (q-1)^{(n+R-1-P)}}{(p_1!)^{r_1} (p_2!)^{r_2} \dots (p_s!)^{r_s} r_1! r_2! \dots r_s! q^{n-1}}.$$

Diese Formel löst also den allgemeinsten hier in Betracht kommenden Fall.

Indess kann man hierfür einen bequemeren Ausdruck finden, wenn man unter den p_1, p_2 auch die Zahl 1 mit versteht. Dann kommen auch die einzelnen Augen vor, und es ist immer:

I) $$r_1 p_1 + r_2 p_2 + \dots + r_s p_s = n,$$

also:

$$n^{(P)} = n!$$

Sei wie oben:

II) $$r_1 + r_2 + \dots r_s = R,$$

so wird:

10) $$W' = \frac{n! (q-1)^{(R-1)}}{q^{n-1} (p_1!)^{r_1} (p_2!)^{r_2} \dots (p_s!)^{r_s} r_1! r_2! \dots r_s!}.$$

Fragen wir aber nach der Wahrscheinlichkeit Z, wenigstens p gleiche Augen zu werfen, so dass mehr als p gleiche Augen mit oder ohne andere gleiche Augenzahlen als günstige Fälle zählen, so hat man offenbar:

11) $$Z = \Sigma W',$$

wo die Summe auszudehnen auf alle Zahlen $r_1, r_2 \dots r_s, p_1, p_2 \dots, p_s$, welche die Gleichung 1) erfüllen, und von denen wenigstens eine nicht kleiner als p ist. Permutationen der Producte $r_1 p_1$, $r_2 p_2 \dots$ sind aber ausgeschlossen.

Beispiel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 7 Würfeln wenigstens 4 gleiche Augen zu werfen?

Es ist:

$$n = 7,\ p = 4,\ q = 6,$$

$$7 = 1 \cdot 4 + 1 . 3 = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1$$
$$= 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 7.$$

Man hat also nach einander zu setzen:

p_1	p_2	p_3	r_1	r_2	r_3	R	$(q-1)^{(R-1)}$
4	3		1	1		2	5
4	2	1	1	1	1	3	25
4	1		1	3		4	125
5	2		1	1		2	5
5	1		1	2		3	25
6	1		1	1		2	5
7			1			1	1

$(p_1!)^{r_1}$	$(p_2!)^{r_2}$	$(p_3!)^{r_3}$	$r_1!$	$r_2!$	$r_3!$
24	6		1	1	
24	2	1	1	1	1
24	1		1	6	
120	2		1	1	
120	1		1	2	
720	1		1	1	
5040			1		

Die Producte:

$$(p_1!)^{r_1}\ (p_2!)^{r_2}\ (p_3!)^{r_3}\ r_1!\ r_2!\ r_3!$$

sind also bezüglich:

$$144, \quad 48, \quad 144, \quad 240, \quad 720, \quad 5040,$$

also da:

$$\frac{n!}{q^{n-1}} = \frac{7!}{6^6} = \frac{35}{324}$$

ist:

$$Z = \frac{35}{324}\left[\frac{5}{144} + \frac{25}{48} + \frac{125}{144} + \frac{5}{240} + \frac{25}{240} + \frac{5}{720} + \frac{1}{5040}\right] = \frac{35}{324}\left(\frac{65}{72} + \frac{1}{8} + \frac{38}{72} + \frac{1}{5040}\right) = \frac{35 \cdot 98}{324 \cdot 63} = \frac{245}{1458}.$$

3) Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufs Lottospiel.

Das eigentliche Lotto (jetzt nur noch an wenigen Orten eingeführt) bestand aus 90 Zahlen in einem Rade. 5 davon werden gezogen. Jeder Spieler besetzt eine Anzahl von Zahlen unter den 90; es steht ihm frei, entweder so zu setzen, dass er einen gewissen Gewinn erhält, wenn eine dieser Zahlen gezogen wird, oder dass auch die darin enthaltenen Amben, Ternen u. s. w. in Rechnung kommen.

Seien der Allgemeinheit wegen jetzt n Zahlen im Rade, mögen r davon gezogen werden, und s davon besetzt sein. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass eine Verbindung zu t, aber nicht mehr, von diesen s gezogen werde. Verbindungen zu r unter den n, also Züge, sind überhaupt möglich n_r, von den besetzten s Zahlen lassen sich t herausgreifen auf s_t Arten, und jeder dieser Combinationen entsprechen so viel Züge, als sich die nicht besetzten $n-s$ im Rade enthaltenen zu $r-t$ combiniren lassen, also $(n-s)_{r-t}$; man hat somit günstige Fälle: $s_t(n-s)_{r-t}$, und die gesuchte Wahrscheinlichkeit W ist also:

$$W = \frac{s_t(n-s)_{(r-t)}}{n_r},$$

oder bei Einführung der Bezeichnung des vorigen Abschnitts:

$$1)\qquad W = \frac{s^{(t)}\,(n-s)^{(r-t)}\,r^{(t)}}{t!\ n^{(r)}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle s besetzten Zahlen herauskommen, ergibt sich, wenn man setzt $t=s$, dann ist:

$$t! = s^{(s)}, \quad n^{(r)} = n^{(s)}\,(n-s)^{(r-s)},$$

also:

$$W = \frac{r^{(s)}}{n^{(s)}}.$$

Sucht man aber die Wahrscheinlichkeit W', dass r oder mehr von den besetzten Zahlen herauskommen, so ist:

2) $$W' = \sum_{t=r}^{t=s} W.$$

Z. B. Ein Spieler hat 5 Zahlen besetzt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, eine Ambe, und wie gross die, eine Terne oder mehr zu gewinnen?

Man hat:

$$n = 90, \quad r = 5, \quad s = 5, \quad t = 3,$$

$$W = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{85 \cdot 35}{89 \cdot 87 \cdot 43} = \frac{2975}{332949}.$$

Bildet man W', so ist $t = 3$, 4, 5 zu setzen. Man erhält für $t = 4$:

$$W = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 85 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{5 \cdot 85}{6 \cdot 89 \cdot 11 \cdot 87 \cdot 86},$$

für $t = 5$:

$$W = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

Aus der Summe der s Werthe von W setzt sich W' zusammen.

Setzt der Spieler eine Summe P, und ist W die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes und dieser gleich Q, so ist WQ seine Hoffnung, und diese muss also gleich P sein, so dass sich $Q = \frac{P}{W}$ ergeben würde, wenn der Vortheil der Anstalt und des Spielers ein gleicher wäre.

Beschäftigen wir uns jetzt mit der Frage:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach s Ziehungen q gegebene im Rade enthaltene Zahlen hervorkommen?

Sei $Z_{n,q}$ die Anzahl der Fälle, in welchen nach s Ziehungen alle Zahlen von 1 bis q gezogen werden, so ist offenbar diese Grösse gleich der Anzahl $Z_{n,q-1}$ derjenigen Fälle, wo die Zahlen 1 bis $q-1$ gezogen sind, weniger der Anzahl derjenigen, wo q nicht herauskommt. Diese Zahl ergibt sich aber, wenn man die Zahl q aus der Lotterie weglässt, und die Fälle bestimmt, in welchen dann 1, 2 . . . $q-1$ gezogen wird, ist also gleich $Z_{n-1,q-1}$. Man hat also die Gleichung:

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1} = \triangle Z_{n,q-1}.$$

Bei einer Ziehung sind möglich n_r Fälle, also bei s Ziehungen $(n_r)^s$. Die Anzahl der Fälle, wo eine bestimmte Zahl 1 nicht gezogen wird, ergibt sich hieraus, wenn man n mit $n-1$ vertauscht, also $[(n-1)_r]^s$, und die Anzahl der Fälle, wo 1 gezogen wird, ist sonach:

$$Z_{n,1} = (n_r)^s \; [(n-1)_r]^s = \triangle\, (n_r)^s,$$

wo $\triangle$ der gewöhnliche Ausdruck für eine Differenz ist.

Die Gleichung für $Z_{n,q}$ gibt sonach:

$$Z_{n,2} = Z_{n,1} - Z_{n-1,1} = \triangle^2 (n_r)^s,$$

u. s. w. allgemein:

$$Z_{n,q} = \triangle^q (n_r)^s,$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass q gegebene Zahlen erscheinen, ist:

$$W = \frac{\triangle^q (n_r)^s}{(n_r)^s}.$$

Sollen alle n Zahlen gezogen werden, so ist $q = n$ zu setzen.

Wenn man von $Z_{n,1}$ zu $Z_{n,2}$ u. s. w. übergeht, so hat man, wie immer bei Differenzenbestimmungen den Algorithmus des binomischen Satzes, und deshalb hat man:

$$Z_{n,q} = (n_r)^s - q_1 (n-1)_r^{\ s} + q_2 (n-2)_r^{\ s} + \ldots (-1)^q (n-q)_r^{\ s},$$

und:

$$W = 1 - q_1 \left(\frac{n-r}{n}\right)^s + q_2 \left[\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right]^s - \ldots$$

$$(-1)^q \left[\frac{(n-r)(n-r-1) \ldots (n-r-q+1)}{n(n-1) \ldots (n-q+1)}\right]^s.$$

Nehmen wir nun an, es sei n sowohl als s sehr gross, so dass man setzen kann $s = \alpha n$, wo α jedoch nicht sehr gross sein soll, so hat man bekanntlich:

$$\left(1 - \frac{\varrho}{n}\right)^{\alpha n} = e^{-\alpha\varrho}$$

mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung. Es ergibt sich sonach als Grenzwerth:

$$W = 1 - q\,e^{-\alpha r} + q_2\,e^{-2\alpha r} - q_3\,e^{-3\alpha r} + \ldots = (1 - e^{-\alpha r})^q.$$

Stellen wir uns z. B. die Aufgabe:

Wie viel Ziehungen sind nöthig, damit die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{k}$ ist? so kommt:

$$1 - k^{-\frac{1}{q}} = e^{-\alpha r} = e^{-\frac{sr}{n}},$$

also:

$$s = -\frac{n}{r} \lg\left(1 - k^{-\frac{1}{q}}\right).$$

Soll nun q auch gleich n sein, so wird $\frac{1}{q}$ sehr klein, und man hat mit Weglassung der höheren Dimensionen:

$$1 - k^{-\frac{1}{q}} = \frac{1}{q} \lg k - \frac{1}{2q^2} (\lg k)^2$$

$$\lg\left(1 - k^{-\frac{1}{q}}\right) = \lg\lg k - \lg q + \lg\left(1 - \frac{1}{2q} \lg k\right).$$

Für das letzte Glied kann man hier auch schreiben:

$$-\frac{1}{2q} \lg k,$$

so dass man hat:

$$s = \frac{n}{r}\left(\lg q + \frac{1}{2q} \lg k - \lg\lg k\right).$$

Die Logarithmen sind natürliche.

Z. B. Wieviel Züge müssten in der preussischen Lotterie, bestehend aus

92000 Losen, geschehen, wenn man 1 gegen 1 wetten kann, dass alle Lose herauskommen?

Es ist hier:

$$k=2, \quad r=1, \quad q=n=92000.$$

$$\lg 92000 = \lg 92 + 3 \lg 10$$
$$\lg 92 = 4{,}5217886$$
$$3 \lg 10 = 6{,}9077553$$
$$\tfrac{1}{92000} \lg 2 = 0{,}0000075 \quad (\lg 2 = 0{,}6931472)$$
$$- \lg \lg 2 = 0.3665702$$
$$\overline{\qquad 11{,}7961216 \cdot 92000,}$$

also:

$$s = 1085243{,}18.$$

4) Wahrscheinlichkeit bei Wiederholungen.

Man kann aber auch ganz allgemein die Frage stellen, wie gross die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses bei Wiederholung der Ursachen, welche zu diesem führen können, sei, wenn man die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses in jedem einzelnen Falle kennt.

Der einfachste hierhin gehörige Fall ist der folgende.

Es ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses α, wenn irgend welche Umstände einmal eintreten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereigniss wenigstens einmal stattfinde, wenn diese Umstände sich $n$mal wiederholen?

Also z. B. wird gefragt:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 6 Würfen mit 3 Würfeln wenigstens einmal 26 zu werfen, da diese Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Werfen gleich $\frac{833}{2328}$ ist?

oder:

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass irgend ein Jahr ein trockenes sei, gleich $\frac{1}{4}$ ist, wie gross ist diejenige, dass unter 10 Jahren wenigstens ein trockenes sei?

Die Wahrscheinlichkeit, dass das betreffende Ereigniss das erste Mal nicht eintritt, ist $1-\alpha$, ebenso beim zweiten Male $1-\alpha$ u. s. w., diejenige, dass es in n Malen nicht eintritt, ist also (Abschnitt 1) das Product dieser Wahrscheinlichkeit, also somit ihr Werth:

$$T=(1-\alpha)^n,$$

und somit auch diejenige, dass es wenigstens einmal eintritt:

$$S=1-(1-\alpha)^n,$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass in unserem Beispiele wenigstens ein trockenes Jahr in 10 Jahren eintrete, ist:

$$S=1-(1-\tfrac{1}{4})^{10}=1-(\tfrac{3}{4})^{10}=1-0{,}0563=0{,}9437.$$

Man kann auch die Frage stellen:

Wie oft muss sich die Sache wiederholen, damit die Wahrscheinlichkeit S eine gegebene Grösse habe?

und man erhält:

$$n=\frac{\lg(1-S)}{\lg(1-\alpha)}.$$

Also z. B. für wieviel Jahre ist Eins gegen Eins zu wetten, dass in denselben wenigstens ein trockenes sei?

Es ist dann $S=\frac{1}{2}$, also:

$$n=\frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg\frac{3}{4}}=\frac{\lg 2}{\lg 4-\lg 3}=\frac{0{,}30103}{0{,}12492}$$

zwischen 2 und 3 Jahr.

Man ist in solchen Fällen gewöhnlich geneigt, wenn die Wahrscheinlichkeit z. B. $\frac{1}{4}$ ist, anzunehmen, dass bei der Hälfte von 4, also bei 2 Wiederholungen,

die Wette Eins zu Eins angemessen sei. Dem würde die Formel $\frac{1}{2\alpha}$ entsprechen, während die richtige:

$$\frac{\lg \frac{1}{2}}{\lg(1-\alpha)} = \frac{\lg 2}{-\lg(1-\alpha)}$$

ist. Es lässt sich zeigen, dass bei der falschen Formel jedesmal der im Vortheil ist, der für das Stattfinden des Ereignisses stimmt, d. h. dass:

$$\frac{1}{2\alpha} > \frac{\lg 2}{-\lg(1-\alpha)}$$

ist, denn:

$$-\lg(1-\alpha) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + \ldots, \quad \text{also} \quad > \alpha,$$

$$\lg 2 = 0{,}30103 < \tfrac{1}{2}.$$

In dem Bruche rechts ist also der Zähler kleiner als $\frac{1}{2}$, der Nenner grösser als α, also der Bruch kleiner als $\frac{1}{2\alpha}$.

Stellen wir aber jetzt die Frage:

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei n maliger Wiederholung das Ereigniss einmal und nicht öfter stattfindet?

Dass es bei einem vorherbestimmten Male, z. B. beim dritten stattfindet, dafür ist die Wahrscheinlichkeit α, welche mit der, dass es bei den übrigen Malen nicht stattfindet, $(1-\alpha)^{n-1}$ zu multipliciren ist. Da aber dasjenige Mal, wo das Ereigniss stattfindet, ein beliebiges sein kann, so hat man n günstige Fälle von der Wahrscheinlichkeit:

$$\alpha(1-\alpha)^{n-1},$$

also:

$$S = n\alpha(1-\alpha)^{n-1}.$$

Fragen wir jetzt nach der Wahrscheinlichkeit, dass es p beliebig herausgegriffene Male stattfinde; α^p ist mit der, dass es die übrigen Male nicht stattfinde, $(1-\alpha)^{n-p}$ zu multipliciren, und diese Zahl so oft zu nehmen, als sich p Fälle aus n herausgreifen lassen, also n_p mal. Also:

$$S = n_p \alpha^p (1-\alpha)^{n-p}.$$

Endlich fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass dies Ereigniss wenigstens p mal stattfinde.

Sie ist offenbar die Summe der Wahrscheinlichkeiten, dass das Ereigniss p mal, $p+1$ mal, $p+2$ mal u. s. w. bis n mal stattfinde, also:

$$S = n_p \alpha^p (1-\alpha)^{n-p} + n_{p+1} \alpha^{p+1} (1-\alpha)^{n-p-1} + \ldots + n_n \alpha^n.$$

Man kann auch das letzte Glied weglassen, da die Reihe von selbst abbricht, also:

$$S = n_p \alpha^p (1-\alpha)^{n-p} + n_{p+1} \alpha^{p+1} (1-\alpha)^{n-p-1} + \ldots$$

Diese Reihe gibt Null, wenn p grösser als n ist, wie dies auch sein muss. Ist p nicht grösser als n, so kann mit dem letzten Gliede $n_n \alpha^n$ begonnen werden, und man hat:

$$S = \alpha + n\alpha^{n-1}(1-\alpha) + n_2 \alpha^{n-2}(1-\alpha)^2 + \ldots + n_{n-p} \alpha^p (1-\alpha)^{n-p},$$

jedoch ist diese Reihe der Erweiterung für den Fall, dass p grösser als n ist, nicht fähig.

5) Das Theilungsproblem bei Spielen.

Das Theilungsproblem, wie es Pascal dem Fermat zur Auflösung vorschlug, besteht in folgender Aufgabe:

Zwei Spieler von gleicher Geschicklichkeit und welche gleiche Summen gesetzt haben, wollen so lange spielen, bis einer eine gewisse Anzahl von Partien gewonnen hat. Sie beschliessen aber aufzuhören zu einer Zeit, da dem ersten noch x, dem zweiten y Partien fehlen. In welchem Verhältnisse ist die eingesetzte Summe zu theilen?

Offenbar im Verhältnisse der Wahrscheinlichkeit des einen und des andern, zu gewinnen. Bezeichnen wir diese Wahrscheinlichkeit für den ersten Spieler mit $f(x, y)$. Gewinnt derselbe bei der nächsten Partie, so ist dann seine Wahrscheinlichkeit gleich $f(x-1, y)$, und wenn er dabei verliert $f(x, y-1)$; die Wahrscheinlichkeit jedes dieser beiden Ereignisse ist aber $\frac{1}{2}$, und folglich:

1) $$f(x, y)=\tfrac{1}{2}f(x-1, y)+\tfrac{1}{2}f(x, y-1).$$

Um diese partielle Differenzengleichung zu integriren, wenden wir die von La Place eingeführte Theorie der erzeugenden Functionen an. Es sei:

$$\frac{U}{1-\alpha u+\beta v}=a_{0,\,0}+a_{1,\,0}u+a_{0,\,1}v+a_{2,\,0}u^2+a_{1,\,1}uv+a_{0,\,2}v^2+\ldots,$$

wo U ein Polynom von v allein ist.

Multiplicirt man mit dem Nenner, so erhält man einen Ausdruck für u, in welchem der mit $u^x v^y$ multiplicirte Coefficient ist:

$$a_{x,\,y}-\alpha\, a_{x-1,\,y}-\beta\, a_{x,\,y-1},$$

und dies wird gleich Null sein, wenn U kein entsprechendes Glied enthält.

Setzt man also:

$$a_{x,\,y}=f(x, y),\qquad \alpha=\beta=\tfrac{1}{2},$$

so hat man die Gleichung 1), und es ist also $f(x, y)$ der Coefficient von $u^x v^y$ in der Entwickelung von $\frac{U}{1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v}$. Daher wird dieser Ausdruck die erzeugende Function der Gleichung 1) genannt. Diese Theorie erstreckt sich auf alle partiellen linearen Differenzengleichungen. Den Grenzbestimmungen genügt man durch die Auswahl von U. In unserm Falle ist offenbar $f(0, y)=1$, da dann der erste Spieler bereits gewonnen hat, $f(0, 0)$ aber kann gar nicht vorkommen, da beide nicht zugleich gewonnen haben können. Es muss also für $x=0$ die erzeugende Function die Gestalt haben $\frac{v}{1-v}$; denn die Coefficienten dieser Entwickelung sind in der That alle gleich 1, bis auf den ersten $a_{0,\,0}$, der wegfällt, wie dies nach dem Obigen sein muss. Dieser Ausdruck $\frac{v}{1-v}$ entsteht aber offenbar aus der gegebenen erzeugenden Function, wenn daselbst $u=0$ gesetzt wird, also:

$$\frac{U}{1-\frac{1}{2}v}=\frac{v}{1-v},$$

woraus sich ergibt:

$$U=\frac{v\,(1-\frac{1}{2}v)}{1-v}.$$

Um $f(x, y)$ zu finden, ist nur noch:

$$\frac{v\,(1-\frac{1}{2}v)}{(1-v)(1-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v)}$$

nach Potenzen von u und v zu entwickeln. Der Coefficient von u^x ist hierin:

$$\frac{1}{2^x}\,\frac{v}{(1-v)(1-\frac{1}{2}v)^x},$$

und der Coefficient v^y in diesen Ausdrücken ergibt sich leicht:

$$f(x, y) = \frac{1}{2^x}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}\frac{1}{2^2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\frac{1}{2^3} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{x(x+1)\ldots(x+y-2)}{1 \cdot 2 \ldots y-1}\frac{1}{2^{y-1}}\right).$$

Man sieht leicht, dass wenn n Spieler vorhanden sind, denen bezüglich $x_1, x_2 \ldots x_n$ Spiele fehlen, man zu der Gleichung:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = \frac{1}{n} f(x_1 - 1, x_2 \ldots x_n) + \frac{1}{n} f(x_1, x_2 - 1, x_3 \ldots x_n) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{n} f(x_1, x_2 \ldots x_{n-1})$$

geführt wird, welche auf ähnliche Weise gelöst werden kann.

6) Grenzfälle der Wahrscheinlichkeit.

Unter Grenzfällen sind hier solche Ausdrücke verstanden, gegen welche der Wahrscheinlichkeitsausdruck convergirt, wenn Zähler und Nenner sehr gross werden.

Bei irgend einem Spiele sei p die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, also $1-p$ die zu verlieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei n maliger Wiederholung des Spieles s mal gewinne, war nach Abschnitt 4):

$$V = n_s p^s (1-p)^{n-s} = \frac{n!\, p^s (1-p)^{n-s}}{s!\,(n-s)!}.$$

Sei k der grösste Werth von V. Vermindert und vermehrt man s um Eins, so erhält man bezüglich:

$$k_1 = \frac{k(1-p)s}{p(n-s+1)}, \quad k_2 = \frac{kp}{1-p}\frac{n-s}{s+1}.$$

Es muss also sein:

$$k > k_1, \quad \text{und} \quad k > k_2,$$

d. h.:

$$\frac{s+1}{n-s} > \frac{p}{1-p}, \quad \text{und} \quad \frac{p}{p-1} > \frac{s}{n-s+1}.$$

Die erstere Ungleichheit gibt:

$$s > (n+1)p - 1,$$

und die letztere:

$$s < (n+1)p,$$

also:

$$(n+1)p - 1 < s < (n+1)p,$$

so dass s die grösste in $(n+1)p$ enthaltene ganze Zahl ist. Setzen wir also:

$$s + \varepsilon = (n+1)p,$$

wo ε also ein echter positiver Bruch ist, so kommt:

$$p = \frac{s+\varepsilon}{n+1}, \; 1-p = \frac{n-s+1-\varepsilon}{n+1}, \quad \frac{p}{1-p} = \frac{s+\varepsilon}{n-s+1-\varepsilon}.$$

Sind s und $n-s$ sehr gross, so hat man fast:

$$\frac{p}{1-p} = \frac{s}{n-s}.$$

Es ist also dann am wahrscheinlichsten, dass sich die Anzahlen der Gewinn- und Verlustspiele wie die Wahrscheinlichkeiten derselben verhalten.

Findet für $s = s$ die höchste Wahrscheinlichkeit statt, so ist diejenige, welche der Gewinnanzahl $s-h$ entspricht:

$$\frac{n!\, p^{s-h}(1-p)^{n-s+h}}{(s-h)!\,(n-s+h)!}.$$

Vergleicht man den Stirling'schen Näherungswerth für Factoriellen hiermit (vergleiche den Artikel: Quadraturen, Abschnitt 51):

$$n! = e^{-n}\, n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi},$$

so wird:

$$\frac{1}{(s-h)!} = (s-h)^{h-s-\frac{1}{2}} \frac{e^{s-h}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\frac{1}{(n-s+h)!} = (n-s+h)^{s-n-h-\frac{1}{2}} \frac{e^{n-s+h}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Man kann aber setzen:

$$(s-h)^{h-s-\frac{1}{2}} = s^{h-s-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{h}{s}\right)^{h-s-\frac{1}{2}},$$

und:

$$\left(1-\frac{h}{s}\right)^{h-s-\frac{1}{2}} = e^{(h-s-\frac{1}{2}) \lg\left(1-\frac{h}{s}\right)}.$$

Setzt man hierin:

$$\lg\left(1-\frac{h}{s}\right) = -\frac{h}{s} - \frac{h^2}{2s^2} - \frac{h^3}{3s^3},$$

also:

$$\left(1-\frac{h}{s}\right)^{h-s-\frac{1}{2}} = e^{h-\frac{h^2}{2s}}\, e^{\frac{h}{2s}-\frac{h_3}{6s^2}},$$

indem wir annehmen, dass h^2 und s von gleicher Ordnung seien, $\frac{1}{s^2}$ aber vernachlässigen.

Reihenentwickelung gibt endlich:

$$\left(1-\frac{h}{s}\right)^{h-s-\frac{1}{2}} = e^{h-\frac{h^2}{2s}} \left(1+\frac{h}{2s}-\frac{h^3}{6s^2}\right),$$

$$(s-h)^{h-s-\frac{1}{2}} = e^{h-\frac{h^2}{2s}}\, s^{h-s-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{h}{2s}-\frac{h^3}{6s^2}\right),$$

und ebenso:

$$(n-s+h)^{s-n-h-\frac{1}{2}} = e^{-h-\frac{h^2}{2(n-s)}} (n-s)^{s-h-n-\frac{1}{2}} \left(1-\frac{h}{2(n-s)} + \frac{h^3}{2(n-s)^2}\right).$$

Setzen wir jetzt:

$$p = \frac{s+\varepsilon}{n+1} = \frac{s-\alpha}{n},$$

so wird:

$$\alpha = \frac{s-n\varepsilon}{n+1},$$

also α eingeschlossen sein in die Grenzen:

$$\frac{s}{n+1} \text{ und } -\frac{n-s}{n+1},$$

also kleiner als Eins sein, vom Zeichen abgesehen. Auch ist:

$$1-p=\frac{n-s+\alpha}{n},$$

und somit:

$$p^{s-h}(1-p)^{n-s+h}=\frac{s^{s-h}(n-s)^{n-s+h}}{n^n}\left(1+\frac{n\alpha h}{s(n-s)}\right),$$

was wie oben gezeigt wird. Es ist somit:

$$\frac{n!\,p^{s-h}(1-p)^{n-s+h}}{(s-h)!\,(n-s+h)!}=\frac{\sqrt{n}\,e^{-\frac{nh^2}{2s(n-s)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(2s[n-s])}}\left(1+\frac{n\alpha h}{s(n-s)}+\frac{h(n-2s)}{2s(n-s)}-\frac{h^3}{6s^2}+\frac{h^3}{6(n-s)^2}\right).$$

Sucht man den Ansdrnck, der der Gewinnzahl $s+h$ entspricht, so ist h negativ zn nehmen. Wenn man die entsprechenden beiden Glieder addirt, so erhält man die Summe:

$$y=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(2s[n-s])}},\quad e^{-\frac{nh^2}{2s(n-s)}}.$$

Die Snmme dieser Ansdrücke von $h=0$ bis $h=h-1$ lässt sich, da jedes Glied y als verschwindend klein zu betrachten ist, mit einem Integrale vergleichen. Man kann nämlich betrachten $\int y\,dh$ als einen ebenen Flächeninhalt, nnter h die Abscisse, nnter y die Ordinate verstanden. Dieses Integral ist aber näherungsweise gleich der Summe der Flächeninhalte der darin enthaltenen Trapeze, nnd da die Differenz zweier anf einander folgender h hier 1 ist, so ergibt sich dafür:

$$\int y\,dh=\Sigma y+\tfrac{1}{2}y-\tfrac{1}{2}Y,$$

wo y dem Werthe h selbst entspricht, Y auf $h=0$ geht. Dieser Ausdruck $\frac{1}{2}Y$ verschwindet hier aber, wenn man berücksichtigt, dass alle h zweimal (positiv und negativ), $h=0$ aber nur einmal vorkommt, also:

$$\Sigma y=\int_0^h y\,dh-\tfrac{1}{2}y.$$

Setzen wir jetzt:

$$t=\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{2s(n-s)}},$$

so kommt:

$$1,\ \Sigma y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t_2}\,dt+\frac{\sqrt{n}\,e^{-t_2}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2s(n-s)}}.$$

Es war nun:

$$s=np+\alpha,$$

wo α kleiner als 1 ist, also:

$$\frac{s+h}{n}-p=\frac{\alpha+h}{n}=\frac{\alpha}{n}+\frac{t\sqrt{2s(n-s)}}{n\sqrt{n}}.$$

Der Werth von Σy drückt also die Wahrscheinlichkeit ans, dass der Unterschied zwischen dem Verhältnisse der Anzahl der Gewinnfälle zur Gesammtanzahl der Fälle zur Wahrscheinlichkeit des Gewinnes überhaupt in den Grenzen:

$$\pm\frac{t\sqrt{2s(n-s)}}{n\sqrt{n}}+\frac{\alpha}{n}=A$$

enthalten sei.

Der Ausdruck $\int_0^t e^{-t^2}dt$ nähert sich mit wachsendem t sehr schnell der constanten Grenze $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Denkt man sich also das obige Intervall A unveränderlich, so wird der Ausdruck t fortwährend wachsen, und Σy sich also der Einheit sehr schnell nähern. Ist dagegen t veränderlich, so wird Σy sich nur sehr wenig ändern, dagegen wird das Intervall A immer kleiner und endlich gleich Null.

La Place nimmt folgendes Beispiel:

Angenommen unter 35 Geburten seien 17 Knaben, und es werden in einem Jahre 14000 Kinder geboren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 7363 Knaben und nicht weniger als 7037 darunter sind.

Man hat:

$$p=\tfrac{18}{35},\quad s=7200,\quad n-s=6800,\quad n=14000,\quad h=163.$$

Formel 1) gibt dann 0,994303 für diese Wahrscheinlichkeit.

Weiss man, wie viel Gewinnfälle unter den n stattfanden, so gibt Formel 1) die Wahrscheinlichkeit, dass p in gegebenen Grenzen liegt. Denn sei diese Anzahl $s+h=\sigma$, so gibt die Wahrscheinlichkeit, dass $\frac{\sigma}{n}-p$ in den Grenzen A enthalten ist, d. h. dass p in den Grenzen:

$$\frac{\sigma}{n}-\frac{\alpha}{n}\pm\frac{t\sqrt{2s(n-s)}}{n\sqrt{n}}$$

liegt.

Näherungsweise kann man für s hier σ setzen und $\frac{\alpha}{n}$ vernachlässigen, so dass diese Grenzen sind:

$$\frac{\sigma}{n}\mp\frac{t\sqrt{2\sigma(n-\sigma)}}{n\sqrt{n}}.$$

In 1) ist dann ebenfalls s mit σ zu vertauschen.

7) Ueber moralische Hoffnung.

Die mathematische Hoffnung hängt, wie wir gesehen haben, nur von der erwarteten Summe und der Wahrscheinlichkeit, sie zu erlangen, ab. Es lässt sich nicht leugnen, dass dies mit dem, was wir gewöhnlich Hoffnung nennen, nicht völlig übereinstimmt.

Der Werth eines erwarteten Thalers ist nämlich offenbar für denjenigen geringer, der 7000 Thaler besitzt, als für den, der nur einen Thaler besitzt. Wie gross dieser Unterschied ist, darüber ist es schwer, zu einem präcisen Resultat zu kommen. Am einfachsten ist es wohl, anzunehmen, dass dieser Werth dem schon vorhandenen Vermögen umgekehrt proportional sei. Diesen subjectiven Werth einer erwarteten Summe nennt man moralische Hoffnung. Die eben gegebene Regel aber gilt nur für unendlich kleine Summen, da jede Zunahme ja das schon vorhandene Vermögen ändert. Ist sonach das Vermögen x, der erwartete Gewinn dx, so ist die moralische Hoffnung $\frac{kdx}{x}$, wenn k eine Constante ist. Soll also das Vermögen x_0 bis zum Betrage x steigen, so ist die moralische Hoffnung:

$$H=k\left(\frac{dx_0}{x}+\frac{dx_1}{x_1}+\ldots+\frac{dx}{x}\right)=k\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x},$$

und somit:

$$H=k\,(\lg x-\lg x_0).$$

Unter vorhandenem Vermögen sind natürlich hier alle Hülfsquellen verstanden, Arbeitskraft, selbst zu erlangende Unterstützung u. s. w., so dass x_0 niemals gleich Null sein kann.

Es ist hier vorausgesetzt, dass die Wahrscheinlichkeit, die Summe zu erlangen, gleich 1 sei. Ist dies nicht der Fall, so ist h noch mit der Wahrscheinlichkeit zu multipliciren.

Wenn Jemand, dessen Vermögen x_0 ist, eine Summe ξ gewiss zu erwarten hat, statt dessen aber mehrere ungewisse α, β, γ . . . wählen kann, deren Wahrscheinlichkeit bezüglich p, q, r . . . ist, so dass $p+q+r+ \ldots =1$ ist, so ist die moralische Hoffnung für den ersten Gewinn:

$$k[\lg(x_0+\xi)-\lg x_0],$$

und für den zweiten:

$$k[p\lg(x_0+\alpha)+q\lg(x_0+\beta)+r\lg(x_0+\gamma)+ \ldots -\lg x_0].$$

Damit beide gleich seien, ist also zu setzen:

$$x_0+\xi=(x_0+\alpha)^p\,(x_0+\beta)^q\,(x_0+\gamma)^r \ldots$$

Diese Grösse ξ nennen wir moralischen Vortheil.

Die Summe ξ' dagegen, deren mathematische Hoffnung der des zweifelhaften Gewinnes gleich ist, ergibt sich:

$$\xi'=p\alpha+q\beta+r\gamma+ \ldots$$

Es folgt hieraus, dass bei einem vollständig gleichen Spiele unter zwei Spielern der Spieler in Bezug auf die moralische Hoffnung immer im Nachtheile ist. Denn ist μ der Einsatz, p die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, so ist $p\mu$ die Hoffnung des ersten, die des Gegenspielers $(1-p)\mu$. Sei $1-p$ die des Gegenspielers, und $(1-p)\mu$ seine mathematische Hoffnung zu gewinnen. Setzt dieser also ν, so ist $p\nu$ die Hoffnung des ersten Spielers, und es muss $p\nu=(1-p)\mu$ sein, damit Gleichheit stattfinde. Die moralische Hoffnung des ersten Spielers beim Gewinne ist also nach dem Obigen gleich:

$$kp[\lg(x_0+\nu)-\lg x_0]=kp[\lg x_0+\frac{(1-p)\mu}{p}-\lg x_0],$$

die des Verlustes:

$$k(1-p)[\lg(x_0-\mu)-\lg x_0]=k(1-p)\lg x.$$

ξ ist hier $=0$, da die moralische Hoffnung mit der verglichen werden soll, welche dem Falle, wo gar nicht gespielt wird, entspricht. Wären beide gleich, so müssten also gleich sein:

$$\lg x_0 \text{ und } \lg(x_0+\frac{1-p}{p}\mu)^p+\lg(x_0-\mu)^{1-p},$$

oder:

$$x_0 \text{ und } (x_0+\frac{1-p}{p}\mu)^\mu\,(x_0-\mu)^{1-p}.$$

Der Ausdruck rechts aber ist:

$$x_0\left(1+\frac{1-p}{p}\frac{\mu}{x_0}\right)^p\left(1-\frac{\mu}{x_0}\right)^{1-p}.$$

Dieser Ausdruck ist gleich x_0 für $\mu=0$.

Der Differenzialquotient nach μ ist, wie leicht zu sehen, immer negativ. Der Ausdruck nimmt also mit wachsendem μ ab, und ist daher derselbe kleiner als x_0, also die moralische Hoffnung geringer, als beim Nichtspielen.

Vergleichen wir jetzt die beiden Verhältnisse, wo Jemand sein Besitzthum einer Gefahr, mit der, wo er es in Theilen verschiedenen Gefahren aussetzt. Sei z. B. die Summe $x_0\varepsilon$ einem Schiffe anvertraut, x_0 das Vermögen des Besitzers, und p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Schiff von ähnlicher Beschaffenheit glücklich ankomme, so ist die moralische Hoffnung:

$$kp(\lg[x_0(1+\varepsilon)]-\lg x_0)=kp\lg(1+\varepsilon),$$

und der moralische Vortheil ergibt sich:

$$k[\lg(x_0+\xi)-\lg x_0]=kp\lg(1+\varepsilon),$$

also:

$$\xi=x_0[(1+\varepsilon)^p-1].$$

Der Ausdruck rechts aber ist kleiner als der mathematische Vortheil (mathematische Hoffnung) $x_0 p\varepsilon$, denn der Ausdruck $(1+\varepsilon)^p-1-p\varepsilon$ ist Null für $\varepsilon=0$, und der Differenzialquotient nach ε, d. h. $p[(1+\varepsilon)^{p-1}-1]$ ist immer negativ, da p ein echter Bruch ist, also:

$$(1+\varepsilon)^p-1-p\varepsilon<0.$$

Werde jetzt die Summe $x_0\varepsilon$ in r Theile getheilt und r Schiffen übergeben, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Schiffe ankommen, p^r, dass alle bis auf eins ankommen $rp^{r-1}(1-p)$ u. s. w. (vergleiche den vorigen Abschnitt), das Vermögen des Kaufmanns aber wird in jedem dieser Fälle werden:

$$x_0(1+\varepsilon),\quad x_0\left(1+\frac{r-1}{r}\varepsilon\right)\ldots,$$

also die moralische Hoffnung:

$$H=k\left[p^r\lg(1+\varepsilon)+rp^{r-1}(1-p)\lg\left(1+\frac{r-1}{r}\varepsilon\right)\right.$$
$$\left.+r_2p^{r-2}(1-p)^2\lg\left(1+\frac{r-2}{r}\varepsilon\right)+\ldots\right].$$

Zieht man davon die obige moralische Hoffnung $kp\lg(1+\varepsilon)$ ab, so ist die Differenz Null für $\varepsilon=0$.

Setzt man:

$$kp\lg(1+\varepsilon)=kp(p+1-p)^{r-1}\lg(1+\varepsilon)=kp[p^{r-1}\lg(1+\varepsilon)$$
$$+(r-1)p^{r-2}(1-p)\lg(1+\varepsilon)+(r-1)_2p^{r-2}(1-p)^2\lg(1+\varepsilon)+\ldots]$$

und differenziirt die Differenz nach ε, so kommt:

$$kp\left(\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon}-\frac{p^{r-1}}{1+\varepsilon}+(r-1)p^{r-2}(1-p)\left\{\frac{1}{1+\frac{r-1}{r}\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}p^{r-2}(1+p)^2\left\{\frac{1}{1+\frac{r-2}{r}\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\right\}+\ldots\right),$$

ein Ausdruck, der positiv ist, so dass also die obige Differenz von $\varepsilon=0$ immer zunimmt. Es ist also die moralische Hoffnung bei der Vertheilung der Summe grösser, als wenn sie ungetheilt der Gefahr ausgesetzt wird.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass mit der Zunahme von r der moralische Vortheil zunimmt und sich dem mathematischen $x_0p\varepsilon$ bis auf jede Grenze nähert. Zu dem Ende bringen wir den Ausdruck für die mathematische Hoffnung H in die Form eines bestimmten Integrals. Man hat zunächst:

$$H=kp\sum_{s=0}^{s=r-1}r_sp^{r-s-1}(1-p)^s\lg\left(1+\frac{r-s}{r}\varepsilon\right)$$
$$=kp\sum_{s=0}^{s=r=1}\int_0^\varepsilon(r-1)_sp^{r-s-1}\frac{(1-p)^s}{1+\frac{r-s}{r}\varepsilon}d\varepsilon.$$

Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha},$$

also:

$$\frac{1}{1+\frac{r-s}{r}\,\varepsilon}=\int_0^\infty e^{-\left(1+\frac{r-s}{r}\,\varepsilon\right)x}\,dx,$$

$$H=kp\int_0^\varepsilon\int_0^\infty \Sigma(r-1)_s\,p^{r-s-1}(1-p)^s\,e^{-\left(1+\frac{r-s}{r}\,\varepsilon\right)x}\,dx\,d\varepsilon$$

$$=pk\int_0^\varepsilon\int_0^\infty e^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x}\left(1-p\left(1-e^{-\frac{x\varepsilon}{r}}\right)\right)^{r-1}dx\,d\varepsilon.$$

Der Ausdruck unter dem Doppelintegral nimmt ab zwischen $x=0$ und $x=\infty$, der Differenzialquotient ist nämlich, wie leicht zu sehen, negativ. Theilen wir das Integral nach x in zwei Theile:

$$\int_0^\sigma+\int_\sigma^{+\infty};$$

wo σ zunimmt, aber gegen r nur klein sein soll, und betrachten wir zunächst den letzten Theil. Ihm entspricht von H der Theil:

$$pk\int_0^\varepsilon\int_\sigma^\infty e^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x}\left(1-p\left(1-e^{-\frac{x\varepsilon}{r}}\right)\right)^{r-1}dx\,d\varepsilon.$$

Integriren wir zuerst nach ε, so erhält man:

$$\int_\sigma^\infty e^{-\left(1+\frac{\nu\varepsilon}{r}\right)x}\left(1-p\left(1-e^{-\frac{x\nu\varepsilon}{r}}\right)\right)^{r-1}dx,$$

wo ν ein echter positiver Bruch ist. Das Argument, und somit das ganze Integral aber nähert sich mit wachsendem σ der Null.

Es ist also für wachsendes r zu setzen:

$$H=pk\int_0^\varepsilon\int_0^\sigma e^{-\left(1+\frac{\varepsilon}{r}\right)x}\left(1-p\left(1-e^{-\frac{x\varepsilon}{r}}\right)\right)^{r-1}dx\,d\varepsilon,$$

wo σ gegen r verschwindend klein ist. Der Ausdruck unter dem Doppelintegral wird dann:

$$e^{-x}\left(1-\frac{px\varepsilon}{r}\right)^{r-1}=e^{-x(1+p\varepsilon)},$$

also wenn man nach x integrirt, so kommt:

$$H=pk\int_0^\varepsilon\frac{d\varepsilon}{1+p\varepsilon}=k\lg(1+p\varepsilon).$$

Der entsprechende moralische Vortheil sei ξ, so ist:

$$k\lg\frac{x_0+\xi}{x_0}=k\lg(1+p\varepsilon),$$

also $\xi=x_0\,p\,\varepsilon$, also dem mathematischen Vortheile in der That gleich.

Es soll mit Hülfe dieser Betrachtungen noch gezeigt werden, dass sich bei Versicherungen der moralische Vortheil der Kasse mit dem des Versicherten vereinen lasse.

Sei ein Theil $x_0\varepsilon$ des Vermögens irgend einer Gefahr unterworfen, und p die Wahrscheinlichkeit der Rettung. Damit zwischen den mathematischen Vortheilen der Kasse und des Versicherten Gleichheit herrsche, muss die Versicherungs-Summe dann $(1-p)x_0\varepsilon$ betragen. Die moralische Hoffnung der unversicherten Summe ist dann:

$$k p \lg(1+\varepsilon),$$

und bei der Versicherung:

$$k \lg(1+p\varepsilon).$$

Da aber, wie oben gezeigt:

$$(1+\varepsilon)^p < 1+p\varepsilon$$

ist, so ist der letztere Ausdruck der grössere. Wird nun vorausgesetzt, dass die Versicherungs-Summe, wie dies ja immer der Fall ist, grösser als $(1-p)x_0\varepsilon$ sei, und zwar um αx_0, so ist die Grenze, wo die Versicherung aufhört, vortheilhaft zu sein, gegeben durch die Gleichung:

$$\lg(1-\alpha+p\varepsilon) = p\lg(1+\varepsilon),$$

also:

$$\alpha = 1+p\varepsilon-(1+\varepsilon)^p.$$

8) Ueber die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Die Theorie der moralischen Hoffnung gab Daniel Bernoulli bei Gelegenheit eines mit ziemlicher Erbitterung von ihm und d'Alembert geführten Streites über die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Der Letztere stellte nämlich (*Opuscules mathématiques* und *Mélanges de literature etc.*) die Behauptung auf, dass die mathematische Wahrscheinlichkeit nicht völlig mit der in der Natur vorkommenden, oder, wie sich d'Alembert ausdrückt, der physischen Wahrscheinlichkeit übereinstimmt. Die letztere nämlich soll, wie er behauptet, darin sich unterscheiden, dass eine besonders grosse Regelmässigkeit in den Verbindungen überhaupt physisch unmöglich sei, während sie die Rechnung eben nur als sehr unwahrscheinlich ergebe. So z. B. ist der Rechnung nach die Wahrscheinlichkeit, 100 mal hinter einander mit einem Würfel 6 zu werfen, $=\frac{1}{6^{100}}$, nach d'Alembert aber kann dies in der Natur überhaupt nicht vorkommen, ohne dass er sich jedoch getraut, diese Grenze hier zu bestimmen. Um dies zu zeigen, betrachtet er folgenden Fall.

Zwei Personen, Peter und Paul, spielen das bekannte Spiel: Schrift oder Bild, d. h. Paul wirft ein Geldstück zu wiederholten Malen und so lange, bis die Bildseite oben liegt. Die Bedingungen aber sind folgende: Wirft Paul beim ersten Male das Bild, so erhält er von Peter einen Franc, wirft er es erst beim zweiten Male 2 Francs, beim dritten 4, beim vierten 8 u. s. w., also wenn das Bild erst beim $n$ten Male erscheint, 2^{n-1} Francs, wo also n jede beliebige Grösse haben kann. Die Frage ist, welchen Vortheil (Hoffnung) hat Paul hierbei, d. h. welche Summe muss er gegensetzen.

Nehmen wir zunächst an, dass das Spiel nur bis zu irgend einem, dem $n$ten Wurfe fortgesetzt werden soll, derart, dass wenn bei diesem noch nicht das Bild erschienen ist, das Spiel aufhört, und Paul gar nichts erhält.

Die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Male das Bild zu treffen, ist $\frac{1}{2}$, die beim ersten Male nicht wohl aber beim zweiten $\frac{1}{4}$, die zwei ersten Male nicht wohl aber beim dritten $\frac{1}{8}$ u. s. w. Diese Zahlen mit den entsprechenden Gewinnen multiplicirend erhalten wir:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\frac{1}{2^3}\cdot 2^2+\ldots$$
$$+\frac{1}{2^n}2^{n-1} = \frac{n}{2}\ \text{Francs.}$$

Dies ist also Pauls Einsatz, und derselbe wird unendlich gross, wenn n unendlich ist, d. h. das Spiel so lange fortgesetzt werden soll, bis das Bild fällt. Wer, fragt nun d'Alembert, wird aber bei einem solchen Spiele auch nur 1000 Francs auf diese Wahrscheinlichkeiten hin setzen. Er findet nun den Grund von diesem richtig vorausgesetzten allgemeinen Widerwillen gegen einen solchen Einsatz darin, dass sehr viel Bildwürfe hinter einander, setzen wir etwa 20, überhaupt unmöglich sind. Im letzteren Falle würde dann allerdings der Einsatz nur:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2^2}\cdot 2+\ldots+\frac{1}{2^{19}}2^{18}$$
$$=\frac{19}{2}\ \text{Francs}$$

betragen dürfen, ein Einsatz, für den sich allerdings wohl eher Liebhaber finden möchten. — Hätte aber d'Alembert Recht, so würden auch diejenigen Pharaospieler Recht haben, welche eine Karte, die 19 mal verloren hat, augenblicklich hoch besetzen, in der Ueberzeugung, dass sie nun endlich gewinnen müsse, während die Wahrscheinlichkeitsrechnung hier die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{2}$, also ganz wie immer, ergibt.

Daniel Bernoulli zeigt nun, dass der Kern der Frage nicht in dem Unterschiede zwischen mathematischer und physischer Wahrscheinlichkeit, sondern in dem zwischen mathematischem und moralischem Vortheile (Hoffnung) liege. Ein Vortheil von zehn Millionen ist

zwar dem Geldwerth nach geringer als ein solcher von 20 Millionen; ein einzelner Mensch von geringem Vermögen wird aber beide moralisch für gleich erachten. In der That ist der Unterschied der moralischen Hoffnungen, wenn man das vorhandene Vermögen gegen zehn Millionen vernachlässigt:

$$k\,(\lg 20000000 - \lg 10000000) = k \lg 2,$$

also jedenfalls gegen $k \lg 10000000$ sehr gering. Der Kern der Frage liegt also darin, dass die hohen möglichen aber sehr unwahrscheinlichen Treffer bei dem betrachteten Spiele keinen entsprechenden moralischen Vortheil gewähren, dass überhaupt, wie im vorigen Abschnitte gezeigt wurde, bei Spielen nur dann ein mit dem mathematischen Vortheile übereinstimmender moralischer stattfindet, wenn der Einsatz gegen das vorhandene Vermögen gering ist, was allerdings eine bekannte Klugheits- und Moralitätsregel ergibt. Wollte man hiernach nach der Theorie der moralischen Hoffnung den Einsatz für das besprochene Spiel berechnen, so erhielte man in der That einen endlichen Einsatz. Wenn x das vorhandene Vermögen, um den Einsatz vermindert, ist, so sind die Hoffnungen bezüglich für jeden Wurf:

$$k \lg (x+1), \quad k \lg (x+2), \quad k \lg (z+2^2) \;\ldots\; - k \lg x,$$

und die Summe derselben, bezüglich mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multiplicirt:

$$\frac{k}{2} \lg (x+1) + \frac{k}{2^2} \lg (x+2) + \frac{k}{2^3} \lg (x+2^2) + \ldots - k \lg x$$

$$= k \lg \left[\sqrt{(x+1)}\,\sqrt[4]{(x+2)}\,\sqrt[8]{(x+4)} \ldots\right];$$

dies muss gleich der moralischen Hoffnung sein, den gethanen Einsatz y zurückzugewinnen, und diese ist:

$$k \lg (x+y) - k \lg x,$$

so dass man hat:

$$(x+y) = (x+1)^{\frac{1}{2}} (x+2)^{\frac{1}{4}} (x+4)^{\frac{1}{8}} \ldots$$

Dass dies Product rechts eine endliche Grösse bildet, zeigt sich daraus, dass der Logarithmus desselben eine convergente Reihe ist. Das $n$te Glied derselben ist offenbar:

$$\frac{1}{2^n} \lg (x+2^{n-1}).$$

Der Quotient des $n$ten durchs $n-1$te also:

$$\frac{2^{n-1}}{2^n} \frac{\lg (x+2^{n-1})}{\lg (x+2^n)},$$

und da für wachsendes n man x vernachlässigen kann:

$$\frac{1}{2} \frac{n-1}{n},$$

ein Ausdruck, der kleiner als Eins ist, was bekanntlich die Convergenz der obigen Reihe bedingt.

Setzt man z. B. für den Grenzfall $x=0$, so ergibt sich:

$$y = 2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{8}} \cdot 2^{\frac{3}{16}} \ldots = 2^{\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\ldots}$$

Nimmt man nun von dem Ausdrucke:

$$f(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha},$$

wo α ein echter Bruch ist, den Differenzialquotienten:

$$f'(\alpha) = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \ldots = \frac{1}{(1-\alpha)^2},$$

und setzt $\alpha = \frac{1}{2}$, so ergibt sich:

$$y=2^{\frac{1}{4}(1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots)}=2^{\frac{1}{4}\cdot 4}=2,$$

für $x=\infty$ dagegen folgt:

$$y=x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\cdots$$
$$-x=x-x,$$

also in diesem Falle wäre sogar jeder Einsatz zu hoch.

9) Historisches.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist namentlich in Bezug auf Spiele seit langer Zeit angewandt worden, aber erst Fermat und Pascal (Mitte des 17. Jahrhunderts) haben allgemeine Principien gegeben. Das Theilungsproblem stammt aus einem Schriftwechsel dieser beiden Mathematiker. Eine Abhandlung über diesen Gegenstand gab Huyghens unter dem Titel: *Tractatus de ratociniis in ludo aleae* 1658. Sehr erweitert wurde diese Wissenschaft durch Jakob Bernoulli's Schrift: *Ars conjectandi* (erschienen 1706, sieben Jahre nach des Verfassers Tode).

Montmort schrieb: *Essai sur les jeux de hasard*, Moivre ein ähnliches Werk, das 1711 in den *Philosophical transactions* erschien. Deparcieux, Kerseboom, Süssmilch und Andere wandten die Wahrscheinlichkeit auf Lebensdauer an. Die Theorie der moralischen Hoffnung gab Daniel Bernoulli bei Gelegenheit und zur Lösung eines Paradoxons, dessen hier Erwähnung gethan ist. Hauptwerk für Wahrscheinlichkeitsrechnung ist: La Place, *Théorie analytique des probalités*, sowohl wegen der vielen Anwendungen, als der analytischen Prinzipien. Namentlich die darin enthaltenen Näherungswerthe für Grenzfälle sind wichtig, wenn auch die dazu führenden Methoden nicht als vollkommen scharf anzusehen sind.

In die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört auch die Ermittelung der wahrscheinlichsten Resultate aus vielfachen Versuchen, d. h. die Methode der kleinsten Quadrate (vergleiche den entsprechenden Artikel), welche von Gauss herrührt.

Von neueren Werken erwähnen wir: Hagen's Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Walze.

Gleichbedeutend mit Cylinder und Welle (vergleiche Rad).

Wasser.

Siehe Hydrostatik und Hydraulik.

Wasserdampf.

Siehe Wärme.

Wasserrad, verticales (Maschinenlehre).

1) Zweck und Einrichtung der Wasserräder.

Das Wasserrad ist ein Rad an der Welle, welches durch das Gewicht des auffallenden, oder durch den Druck des zuströmenden Wassers in Bewegung gesetzt wird, und so die ihm ertheilte lebendige Kraft an Arbeitsmaschinen überträgt. — Die Wasserräder werden zunächst in horizontale (mit verticaler Axe) und verticale (mit horizontaler Axe) getheilt. Von den ersteren wird der folgende Artikel handeln.

Die verticalen Räder theilt man ein in oberschlächtige, mittelschlächtige und unterschlächtige, je nachdem das Wasser zunächst den oberen, mittleren oder unteren Theil der Radperipherie trifft. Zuweilen unterscheidet man auch rückenschlächtige, wo das Wasser zwischen dem höchsten Punkte und der Mitte aufschlägt. Ponceleträder sind solche, wo das Wasser an krummen Flächen auf- und absteigt, also nicht durch plötzlichen Stoss einwirkt. Die unterschlächtigen sind entweder frei, wie z. B. die Schiffmühlenräder, oder in Gerinnen, graden oder kreisförmigen (Kropfgerinnen), eingeschlossen, auch mittelschlächtige haben zuweilen Kropfgerinne.

Die Wasserräder haben eine hölzerne oder eiserne Welle, zwei Kränze von gleichem Durchmesser, selten einen oder mehr als zwei, durch Arme mit der Welle verbunden; zwischen den Kränzen befinden sich die Schaufeln, auf welche das Wasser anschlägt; zuweilen sind die Kränze nach dem Innern zu durch einen Boden verbunden, welche mit den Schaufeln wasserhaltende Träger oder Zellen bilden, wenn die Schaufeln mehr tangential oder radial gerichtet sind. Man unterscheidet daher noch Schaufelräder mit mehr radial, und Zellenräder mit mehr tangential gestellten Schaufeln. Zellenräder werden als oberschlächtige, zuweilen auch mittelschlächtige Räder angewandt.

Die Räder können von Holz oder Eisen sein, oder aus beiden Stoffen bestehen. Hölzerne Räder sind entweder Sattelräder, bei welcher die Arme die vierkantige Welle umfassen, oder Sternräder, wo die Arme in der durchlöcherten Welle stecken. Letztere Construction ist selten und weniger zweckmässig.

Bei hohen Rädern sind in die Armgeviere noch andere sogenannte Helfarme eingesetzt. Bei eisernen Rädern sind die Arme durch Schrauben an eine Scheibe oder Rosette befestigt, welche auf der Welle sitzt. Sind die Kränze hier sehr weit aus einander, so kommt noch ein dritter dazwischen.

Hier sind auch Schaufeln von Eisenblech zweckmässig, welche mittels Schrauben auf Rippen sitzen, welche an die inneren Kranzflächen angegossen sind.

2) Construction oberschlächtiger Räder.

Sei h das Totalgefälle des wirkenden Wassers, so muss zunächst das Wasser, welches die Geschwindigkeit c haben soll, aus einer gewissen Höhe h_1 aufs Rad stürzen, so dass man hat:

$$2g\, h_1 = c^2,$$

ist h_2 das Radgefälle, so hat man dann:

$$h_2 = h - h_1 = h - \frac{c^2}{2g}.$$

Indess geht ein Theil der lebendigen Kraft bei der Uebertragung verloren, wenigstens 6 Procent, nehmen wir hier 10 an, so ist:

$$h_1 = 1{,}1\,\frac{c^2}{2g}$$

zu setzen, also:

$$h_2 = h - 1{,}1\,\frac{c^2}{2g}.$$

Wenn der Radius der Eintrittsstelle des Wassers mit dem Radius am Scheitel des Rades den Winkel ϑ macht, und a der Radius des Rades ist, so hat man offenbar:

$$h_2 = a(1+\cos\vartheta),$$

$$a = \frac{h-h_1}{1+\cos\vartheta}.$$

Sei jetzt v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, das Verhältniss $k=\frac{c}{v}$ heisst dann Geschwindigkeitscoefficient. Ist u ferner die Anzahl der Umdrehungen in der Minute (während c und u auf die Secunde bezogen sind), so hat man:

$$\pi a u = 30\,v = \frac{30c}{k},$$

also:

$$v = 0{,}1047\,u a,$$

und:

$$a(1+\cos\vartheta) = h - \frac{1{,}1}{2g}\left(\frac{k\pi a u}{30}\right)^2,$$

woraus sich ergibt:

$$a = \frac{h - 0{,}000193\,(k u a)^2}{1+\cos\vartheta}.$$

Aus dieser für a quadratischen Gleichung berechnet man annäherungsweise:

$$a = \frac{h\,(1-0{,}000048\,(ku)^2\,h)}{1+\cos\vartheta},$$

Hohen Rädern gibt man bis 10 Fuss Umfangsgeschwindigkeit, kleinen nicht unter $2\frac{1}{2}$.

Die Kranzbreite (Radtiefe) beträgt 10 bis 12 Zoll, selten darüber. Ist e jetzt die Radweite und d die Kranzweite, so ist de der Querschnitt des von Kranz und Boden gebildeten ringförmigen Raumes, und dev der Fassungsraum für die in der Secunde eintretende Wassermenge. Da die Radzellen aber kleiner sind, so muss man, wenn Q das Aufschlagsquantum in der Secunde ist, setzen:

$$Q = \varepsilon d e v, \quad \varepsilon < 1.$$

Gewöhnlich nimmt man $\varepsilon = \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$, und man hat:

$$e = \frac{9{,}55\,Q}{\varepsilon\,u\,d\,a} \quad \text{oder} \quad = \frac{38{,}2\,Q}{u a d},$$

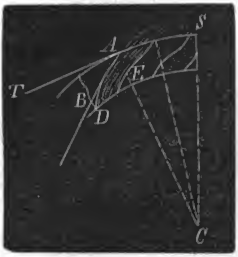
wenn man $\varepsilon = \frac{1}{4}$ nimmt.

Die Schaufelzahl ist aus dem Grunde gross zu nehmen, weil eine kleinere Wassermenge auch länger beharrt. Indess darf wegen der Dicke der Schaufeln, und aus dem Grunde, dass keine in den Fassungsraum der andern tritt, diese Zahl nicht zu gross werden; bei dünnen eisernen Schaufeln kann sie grösser als bei hölzernen sein. Gewöhnlich nimmt man die Schaufelzahl n gleich $8a$ oder $6a$ an. Der Theilwinkel $\varphi = \frac{360^\circ}{n}$ zeigt den Winkelraum jeder Schaufel an.

Die Form der Schaufeln ist von der grössten Wichtigkeit; sie muss so sein, dass das Wasser ungehindert in die Zelle tritt, und darin so lange als möglich beim Heruntersteigen zurückgehalten wird.

Es kommt hierbei zunächst (Fig. 158) auf den Winkel $BAT=\beta$ an, welchen das Schaufelende mit dem Radumfange macht (Eintrittswinkel); er ergänzt den Winkel BAC zwischen Radius und Schaufelende (Deck- oder Deckungswinkel) zu einem Rechten. Wenn das Schaufelende AB horizontal ist, so bildet es keine Seitenwand mehr, und der Fassungsraum der Zelle wird gleich Null; dann ist Punkt A um Winkel $ACF=\beta$ von der

Fig. 158.



tiefsten Stelle entfernt, und es muss daher β möglichst klein sein.

Diese Kleinheit findet jedoch ihre Grenze in dem Umstande, dass der Zellenquerschnitt AE eine gewisse Grösse haben muss. Es kommt auch die Form des übrigen Theils der Schaufel in Betracht, und aus diesem Grunde sind ebene Schaufeln unzweckmässig.

Hölzerne Schaufeln lässt man gewöhnlich aus zwei ebenen Theilen AB und BD bestehen, die einen stumpfen Winkel machen, der äussere Theil ist die Stoss- oder Setzschaufel, der innere, welcher radial ist (zuweilen senkrecht gegen den ersten), die Kropfschaufel. Die Schaufeltheile stossen in einem Kreise, Theilkreis genannt, zusammen. Dieser ist bei kleinen Eintrittswinkeln in der Mitte der Kränze, bei grösseren nimmt er $\frac{2}{3}$ der Kranzbreite vom äusseren ein.

Am einfachsten lässt man die Stossschaufel AB von den Schenkeln CA und CB des Theilwinkels (der von zwei Kropfschaufeln gebildet wird, einschliessen. Soll der Eintrittswinkel aber kleiner sein, so wird der Winkel $ACB = \psi$ etwa gleich $\frac{1}{2}$ des Theilwinkels genommen. Der Eintrittswinkel ist dann gegeben durch die Relation:

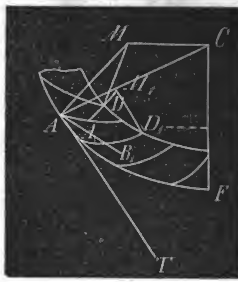
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a - a_1 \cos\psi}{a_1 \sin\psi},$$

wo a_1 der Halbmesser des Theilkreises, a der des äusseren Radumfanges ist. Ist die Kranzbreite $DE = d$, so ist nach der obigen Annahme:

$$a_1 = a - \tfrac{1}{2} d \quad \text{oder} \quad = a - \tfrac{2}{3} d.$$

Schaufeln von Gusseisen oder Blech (Stoss- oder Riegelschaufeln) macht man continuirlich gekrümmt, und der Fortfall der Ecke vergrössert hier den Fassungsraum. Diese Schaufeln werden oft kreisförmig und so gemacht, dass sie mit einem Winkel von 45° an den Randboden anstossen (Fig. 159). Ist M der Mittelpunkt des Schaufelbogens, so macht man, wenn C der Mittelpunkt des Rades ist, $CAM = \beta$, also gleich dem Theilwinkel. Dadurch ist die Form der Schau-

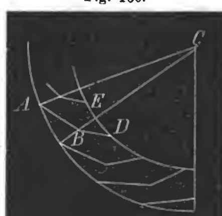
Fig. 159.



fel bestimmt, und alle Schaufel-Mittelpunkte liegen in einem concentrischen Kreise.

Auch bei Holzschaufeln kann man die Riegelschaufel unter 45° auf den Radboden richten, oder (Fig. 160) die Kante

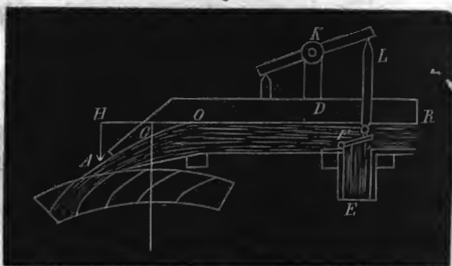
Fig. 160.



durch ein drittes Schaufelstück abstumpfen.

Der Einfall des Wassers geschieht entweder frei aus dem Gerinne, oder mittels einer Spannschütze. In diesem Falle kommt für die Einfallsgeschwindigkeit ausser der Fallhöhe noch die Druckhöhe in Betracht. Ist keine Schütze vorhanden, so wendet man ein Schutzgerinne G (Fig. 161) an, um eine bestimmte Richtung zu erzielen. Der

Fig. 161.



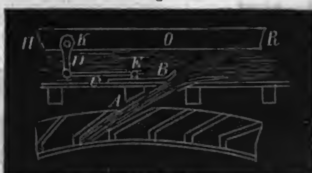
Abfalllutten E, über welchem eine mittels einer Hebelvorrichtung zu öffnende Fallklappe F liegt, dient zum Fortschaffen des überflüssigen Wassers.

Ist c_0 die Geschwindigkeit des Wassers im Gerinne, $AH = h_1$ die Fallhöhe vom Wasserspiegel bis zum Eintrittspunkt, so hat man bekanntlich:

$$c = \sqrt{2g\,h_1 + c_0^2} = \sqrt{2g\,h_1 + \left(\frac{Q}{G}\right)^2},$$

wo Q das Wasserquantum, und G der Querschnittsinhalt des zufliessenden Wassers ist. — Spannschützen dienen, das Gerinne so viel als möglich abzusperren. Man hat horizontale (Fig. 162), wo eine

Fig. 162.



Hebel- und Zugstange das Schutzbrett in Bewegung setzt; es sind aber auch senkrechte und schiefstehende gebräuchlich, die durch Zahnräder oder Schrauben bewegt werden. Ist h_0 die Druckhöhe, und c_0 die Ausflussgeschwindigkeit, so wird:

$$c_0 = \mu\sqrt{2g\,h_0},$$

und wenn z die freie Fallhöhe von der Schützmündung bis zum Eintrittspunkt ist:

$$c = \sqrt{c_0^2 + 2g\,z} = \sqrt{2g\,(\mu^2\,h_0 + z)}.$$

μ ist der Ausflusscoefficient, und gewöhnlich setzt man:

$$\mu = 0{,}95.$$

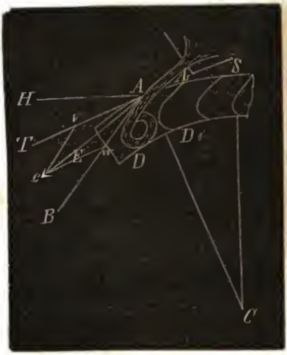
Das Wasser muss ungehindert in die Zelle treten, darf also erst nahe dem innern Umfange einen Stoss erleiden. Da es nun an der Umdrehung des Rades Theil nimmt, so muss die Geschwindigkeit beim Eintritt sich in eine Componente, die mit der Umfangsgeschwindigkeit zusammenfällt, und in eine parallel dem äusseren Schaufelende theilen. Da die erstere der Richtung und Grösse die zweite der Richtung nach, die Eintrittsgeschwindigkeit der Grösse nach gegeben ist, so lässt sich auch ihre Richtung hiernach leicht bestimmen.

Ist α der gesuchte Winkel EAT (Fig. 163), welchen das Wasser beim Zutritt mit dem Radumfange macht, β der Eintrittswinkel, $Av = v$ die Eintrittsgeschwindigkeit, $Aw = w$ die relative Geschwindigkeit des Wassers, so ist:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{w}{c},$$

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\beta} = \frac{v}{c} = \frac{1}{k},$$

Fig. 163.



also:

$$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sin\beta}{k},$$

$$w=c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Mit Berücksichtigung, dass α sehr klein ist, kann man aber auch setzen:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{w}{c},\quad \frac{\beta-\alpha}{\beta}=\frac{v}{c}=1-\frac{w}{c},$$

also:

$$w=c-v,\quad =(k-1)v,\quad \alpha=\frac{k-1}{k}\,\beta.$$

Die relative Geschwindigkeit darf nicht zu gross sein, weil sonst ein Theil des Wassers wieder austräte; es ist also k nie gross, in der Regel zwischen $1\frac{1}{2}$ und 2 zu nehmen.

Ist noch ϑ der Winkel SCA, um welchen der Eintrittspunkt A vom Radscheitel abweicht, $\nu = EAH$ der Neigungswinkel des Strahles gegen den Horizont, so hat man:

$$\nu=\vartheta+\alpha.$$

Fig. 164.



Ist b (Fig. 164) gleich dem Bogen AK, welchen der eintretende Wasserstrahl einnimmt, so ist $KB=b\sin\alpha$ die Dicke des Strahls vor, $AN=b\sin\beta$ die nach dem Eintritt. Ist e die Strahlbreite, welche gleich der Radweite ist, so sind $eb\sin\alpha$, $eb\sin\beta$ die bezüglichen Querschnitte, und die Masse des Aufschlagewassers:

$$Q=ebc\sin\alpha=ebw\sin\beta.$$

Es war aber:

$$Q=\varepsilon d e v,$$

wo A die Radtiefe, ε der Füllungscoefficient ist, also:

$$\sin\alpha=\frac{v\varepsilon d}{cb},\quad \sin\beta=\frac{v\varepsilon d}{wb},$$

und angenähert:

$$b=\frac{\varepsilon d}{(k-1)\sin\beta}.$$

Es darf aber bei oberschlächtigen Rädern, wo der Radboden nicht durchlöchert ist, die Einmündung nie ganz vom Wasser gefüllt sein, damit die Luft entweichen kann. Also b muss kleiner als AA_1 sein.

Ist a der äussere Radhalbmesser, n die Anzahl der Schaufeln, so ist:

$$AA_1=\frac{2\pi a}{n}.$$

Es würde also, wenn $b=AA_1$ wäre, sein:

$$n=\frac{2\pi a}{b}=\frac{(k-1)\,2\pi a\sin\beta}{\varepsilon d}.$$

Man nimmt hiervon nur einen Theil, bezüglich die Hälfte, so dass man hat:

$$n=\frac{(k-1)\,\pi a\sin\beta}{\varepsilon d}.$$

Je kleiner der Füllungscoefficient ε und die Breite d, und je grösser das Geschwindigkeits-Verhältniss, der Halbmesser und der Eintrittswinkel, desto grösser kann die Anzahl der Schaufeln sein.

Das Wasser fällt aber offenbar nicht sogleich völlig heraus, wenn eine Schaufel horizontal liegt. Möge sich diese Schaufel um einen Winkel ψ noch gegen den Horizont gedreht haben, die Beschleunigung eines Wassertheilchens gleich $g\sin\psi$, und die Fallgeschwindigkeit:

$$dw=g\sin\psi\,dt$$

sein, ist v die Geschwindigkeit des Rades, so wird:

$$a\psi = vt, \quad dw = \frac{ag\sin\psi\, d\psi}{v},$$

$$w = \frac{ga}{v}(1-\cos\psi),$$

und der Raum s, welchen das Element in der Zeit t zurücklegt, ergibt sich:

$$ds = w\,dt = \frac{ga^2}{v^2}(1-\cos\psi)\,d\psi,$$

$$s = \frac{ga^2}{v^2}(\psi - \sin\psi).$$

Bei schneller Umdrehung kommt noch die Centrifugalkraft hinzu, und man kann g (annäherungsweise) ersetzen durch $g + \frac{v^2}{a}$, so dass man hat:

$$s = \left(g + \frac{v^2}{a}\right)\frac{a^2}{v^2}(\psi - \sin\psi).$$

Da $\frac{\psi - \sin\psi}{2}$ den Inhalt eines Kreissegmentes mit Radius 1 vorstellt, so ist ψ der Centriwinkel eines solchen mit Radius $\frac{\frac{1}{2}v^2 s}{(ga+v^2)a}$.

Soll alles Wasser sich dann entfernt haben, wenn das äussere Schaufelende im Fusspunkte ankommt, so muss für s die Schaufelbreite, und $\psi = \beta$ gesetzt werden. Also:

$$\beta - \sin\beta = \frac{v^2 s}{a(ga+v^2)}.$$

Diese Formel gibt, wie klein β sein darf, um so kleiner nämlich, je grösser a, und je kleiner v und s (Schaufelbreite) ist.

Damit das Wasser in der verlangten Richtung aufs Rad falle, muss die Schützenmündung der Eintrittsstelle äusserst nahe, und das Schutzbrett auf der Strahlrichtung rechtwinklig, oder ein Schutzgerinne in der verlangten Richtung vorhanden sein, oder endlich das Schutzbrett so gestellt sein, dass das Wasser vermöge des freien Falles diese Richtung annimmt.

Im letzteren Falle sei wieder $Ac = c$ die Geschwindigkeit, $RAM = \nu$ der Winkel des fallenden Wassers gegen den Horizont, so ist (Fig. 165):

$$MO = x = \frac{c^2 \sin\nu^2}{2g}$$

die vertikale Abscisse des Scheitels derjenigen Parabel, welche das Wasser beschreibt, dagegen die Ordinate:

$$AM = y = \frac{c^2 \sin 2\nu}{2g}.$$

Sei in P nun die Schutzmündung, und deren Höhe $MN = z$ über der Eintrittsstelle (im Scheitel) gegeben; sei:

$$ON = x_0, \quad NP = y_0,$$

also:

$$x_0 = x - z,$$

so kommt:

$$y_0 = y\sqrt{\frac{x-z}{x}},$$

und für den Neigungswinkel $TPN = \nu_0$:

$$\operatorname{tg}\nu_0 = \frac{2x_0}{y_0} = \frac{2\sqrt{x(x-z)}}{y}.$$

Die Ebene PK des Schutzbrettes steht senkrecht auf der Tangente PT. Seine Lage ist also bestimmt, wenn man $OT = ON$ macht, PT zieht, und PK senkrecht darauf nimmt. Die Ausflussgeschwindigkeit bei P ist:

$$c_0 = \sqrt{(c^2 - 2gz)},$$

und die Druckhöhe dafür also:

$$h_0 = \frac{c^2}{2g} - z,$$

oder mit der nöthigen Reduction:

Fig. 165.

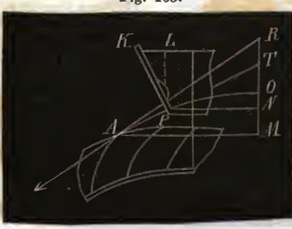
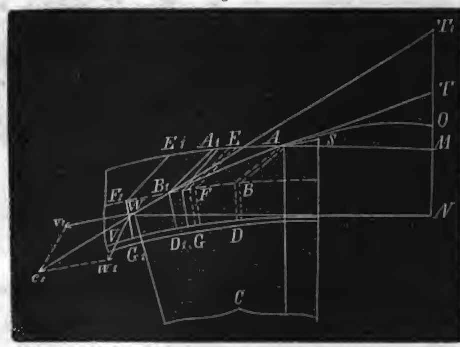


Fig. 166.



$$h_0 = 1,1\left(\frac{c^2}{2g} - z\right).$$

Die Weite der Schützmündung ist nur einige Zoll kleiner als die Radweite zu machen.

Um den Punkt W zu finden, in welchem der Strahl aufschlägt, sei z_1 der senkrechte Abstand MN (Fig. 166) dieses Punktes vom Eintrittspunkte, so ist:

$$ON = OM + MN,$$

d. h.:

$$x_1 = x + z_1,$$

$$NW = y_1 = y\sqrt{\frac{x_1}{x}} = y\sqrt{1 + \frac{z_1}{x}}.$$

Sei $T_1WN = \nu_1$ der Neigungswinkel des Strahles gegen den Horizont, so ist:

$$\operatorname{tg}\nu_1 = \frac{2\sqrt{x(x+z)}}{y},$$

und für Winkel $WCS = \vartheta_1$, um den W vom Radscheitel abweicht:

$$\sin\vartheta_1 = \frac{y_1 - y + a\sin\vartheta}{a_1},$$

wenn a_1 gleich dem Halbmesser CW ist, und der Winkel μ_1, um welchen die Endgeschwindigkeit c_1 von der Umdrehungsgeschwindigkeit ϑ_1 in W abweicht:

$$\mu_1 = \nu_1 - \vartheta_1.$$

Auch hat man:

$$\frac{c_1^2}{2g} = \frac{c^2}{2g} + z_1, \quad c_1 = \sqrt{(c^2 + 2g z_1)},$$

oder:

$$c_1 = \sqrt{2g(0,9\,h_0 + z + z_1)}.$$

Untersuchen wir jetzt die Stosswirkung des Wassers. AFW (Fig. 166) ist die Axe des Wasserstrahls vor dem Zusammentreffen, ABD und EFG zwei auf einander folgende Schaufeln, also AGE die Zelle, welche den Strahl aufnimmt. Derselbe gelangt fast ohne Stoss in die Zelle; dieser erfolgt, während letztere von AGE nach $A_1G_1E_1$ rückt, wobei die vorderste Schaufel von allen Elementen des Wasserkörpers nach und nach eingeholt wird. Wenn Element A des Wasserkörpers AF in V an die vorderste Schaufel $E_1F_1G_1$ trifft, ist der Stoss beendet und auch die Füllung. Die vorderste Schaufel EFG hat hierbei offenbar dieselbe Zeit gebraucht, als das letzte Element des Wassers bei seiner Bewegung von A nach V. Sei der Weg der Schaufel $AA_1 = EE_1 = s$, so ist $t = \frac{s}{v}$ diese Zeit. Sei der Curvenbogen $AFV = s_1$, so möge das Element a denselben mit der mittleren Geschwindigkeit $\frac{c+c_1}{2}$ zurücklegen, also $t_1 = \frac{2s_1}{c+c_1}$ und:

$$\frac{s}{v} = \frac{2s_1}{c+c_1}.$$

Da AFV nur wenig von AE_1 abweicht, ist annähernd:

$$s_1 = AFV = AE + EF + EE_1,$$

aber:

$$AE = b = \frac{2\pi a}{w},$$

und:

$$\frac{EA}{EF} = \frac{v}{w} = \frac{1}{k-1},$$

also:

$$EF = b\,(k-1),$$

und somit:

$$s_1 = b + b\,(k-1) + s = k\,b + s,$$

und man hat:

$$\frac{s}{v} = \frac{2}{c+c_1}\,(k\,b+s),$$

d. h.:

$$(c+c_1-2v)\,s = 2k\,v\,b\,;$$

der Weg der Schaufel während des Stosses ist dann:

$$s = k\frac{2v\,k\,b}{c+c_1-2v} = \frac{2\,k\,b}{\left(1+\frac{c_1}{c}\right)k-2}.$$

Ist $s = AA_1 = EE_1$ aber gegeben, so kann man auch graphisch die Schaufelstellung construiren. Noch war:

$$V = \frac{60\,Q}{nu},$$

wo Q das Aufschlagsquantum in der Secunde ist. Also der Querschnitt:

$$F = \frac{V}{e} = \frac{60\,Q}{n\,u\,e},$$

wodurch sich die Lage des Wasserspiegels W in der Zelle, und die Höhe $MN = z_1$ abmessen lässt. Man kann in Formel $c_1 = \sqrt{(c^2+2g\,z_1)}$ hierbei für z_1 annähernd einen constanten Werth nehmen.

Die Stosswirkung des aufschlagenden Wassers erhält man, wenn man von der lebendigen Kraft des Wassers beim Eintritt die beim Austritt, und die durch wirbelnde Bewegung beim Eintritt verloren gehende abzieht. Beim Abfluss ist die Geschwindigkeit des Rades gleich der v_1 des Radtheilrisses, und ist w_1 die Geschwindigkeit, welche das Wasser beim Eintritte plötzlich verliert, c_1 die des eintretenden Wassers, so sind die bezüglichen lebendigen Kräfte:

$$\frac{c_1^2}{2g}\,Q\gamma,\ \frac{v_1^2}{2g}\,Q\gamma,\ \frac{w_1^2}{2g}\,Q\gamma,$$

also die Stosswirkung:

$$L_1 = \frac{c_1^2 - v_1^2 - w_1^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Die Geschwindigkeit $c_1 = Wc_1$ zerfällt in die Seitengeschwindigkeiten $Wv_1 = v_1$ und $Ww_1 = w_1$. Sei noch $c_1\,W\,v_1 = \alpha_1$ der Winkel der Eintritts- nnd Umfangsgeschwindigkeit, also:

$$w_1^2 = c_1^2 + v_1^2 - 2\,c_1\,v_1\cos\alpha_1,$$

$$L_1 = \frac{(c_1\cos\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g}\,Q\gamma.$$

γ ist die Dichtigkeit des Wassers, also gleich 66 Pfund (alten Gewichtes).

$L_1 = 2{,}112\,(c_1\cos\alpha_1 - v_1)\,v_1\,Q$ Fusspfund,

oder:

$L_1 = 102\,(c_1\cos\alpha_1 - v_1)\,v_1\,Q$ Meterkilogramm.

Die Stossleistung wächst, wenn α_1 und c_1 abnehmen. Das Maximum der Stosskraft tritt ein, wenn $v_1 = \frac{1}{2}\,c_1\cos\alpha_1$ ist, wie man durch Differenziiren erkennt, also wenn:

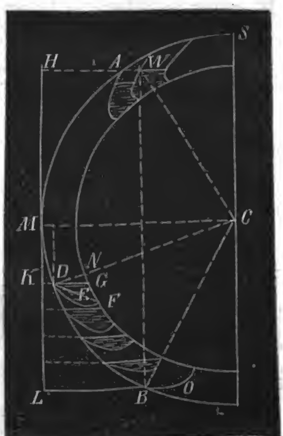
$$L_1 = \frac{c_1^2\cos\alpha_1^2}{4g}\,Q\gamma.$$

Ist dann $\alpha_1 = 0$, so wird:

$$L_1 = \frac{c_1^2\,Q\gamma}{4g}.$$

$\frac{c_1^2}{2g}$ ist das c_1 entsprechende Gefälle, und daher die Stosswirkung höchstens halb so gross, als die disponible Leistung. Man verwendet daher auf die Stosswir-

Fig. 167.



kung möglichst wenig, den grössten Theil aber auf den Druck.

Die Druckwirkung geht von dem ringförmigen, mit Wasser gefüllten Raum AB aus (Fig. 167), welcher der wasserhaltende Bogen heisst. Die Höhe desselben sei gleich h, dann ist die Leistung durch Druck $hQ\gamma$. Wir theilen diesen Bogen in 3 Theile; der erste HM liegt über dem Radmittel bis zur Eintrittsstelle W. Sei $SCW = \vartheta_1$, $CW = a_1$, so ist $HM = a_1 \cos \vartheta_1$. Der zweite Theil MK liegt unter dem Radmittel, aber über der Ausflussstelle D. Sei Winkel $MCD = \lambda$, so ist $MK = a \sin \lambda$. Der dritte Theil DB ist der, wo die Auslcerung stattfindet. Sei Winkel $MCB = \lambda_1$ der Winkel zwischen Radmittel und dem Ende des Ausflusses, so ist:

$$KL = a(\sin\lambda_1 - \sin\lambda).$$

Der dritte Bogentheil kommt nun nicht vollständig zur Wirkung. Ist Q_1 derjenige Theil des Aufschlagwassers, welcher dem mittleren, in DB wirksamen Wasserquantum entspricht, so ist die Gesammtwirkung:

$$(a_1 \cos\vartheta_1 + a\sin\lambda)\,Q\gamma + a\,(\sin\lambda_1 - \sin\lambda)\,Q_1\gamma.$$

Hierzu kommt die Stossleistung hinzu.

Setzen wir also:

$$h_1 = a_1 \cos\vartheta_1 + a\sin\lambda, \quad h_2 = a(\sin\lambda_1 - \sin\lambda), \quad \xi = \frac{Q_1}{Q},$$

so ist die Gesammtwirkung:

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1\cos\alpha_1 - v_1)\,v_1}{g} + h_1 + \xi h_2\right) Q\gamma.$$

P ist die Kraft am Umfange des Rades. Es kommt also noch auf die Bestimmung von ξ an.

Sei jetzt n die Anzahl der Schaufeln, u der Umläufe in der Minute, so nehmen in der Secunde $\frac{nu}{60}$ Zellen die Wassermenge Q auf, und auf jede Zelle kommt das Quantum:

$$V = \frac{60\,Q}{nu}.$$

Ist e wieder die Radweite, so hat man den Wasserquerschnitt:

$$F = \frac{V}{e} = \frac{60\,Q}{nu\,e}.$$

Fängt nun bei Zelle $DEFG$ der Ausfluss an, so kann man setzen:

$$F_1 = \text{Segm. } DEF + \triangle DFG,$$

oder wenn:

$$DEF = S, \quad \triangle DFN = D$$

gesetzt wird:

$$DGN = S + D - F_0 = \frac{DN \cdot NG}{2} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\lambda\, d^2,$$

also annähernd:

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{2(S + D - F_0)}{d^2}.$$

Alles Wasser ist ausgeflossen, wenn die Zelle horizontal liegt. Dann ist Winkel $CBO = MCB = \lambda_1$ bekannt.

Theilt man nun die Höhe $KL = a(\sin\lambda_1 - \sin\lambda)$ in eine grade Anzahl gleicher Theile, und bestimmt die den Theilpunkten entsprechenden Schaufelstellungen, schneidet durch Horizontallinien die Querprofile der Wassermengen der Zelle bei diesen verschiedenen Stellungen ab, und bestimmt die Inhalte $F_1, F_2 \ldots F_n$ dieser Querprofile, so wird der mittlere Werth F dieser Profile durch die Simpson'sche Regel bestimmt, also:

$$F = \frac{F_0 + F_n + 4(F_1 + F_3 + \ldots F_{n-1}) + 2(F_2 + F_4 + \ldots + F_{n-2})}{3^2},$$

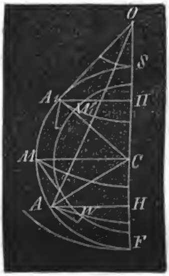
und:

$$\xi = \frac{F}{F_0}.$$

Bei grossen Umfangsgeschwindigkeiten, wie sie bei kleinen Rädern nöthig sind, fällt auch die Centrifugalkraft ins Gewicht, welche ein zeitigeres Austreten des Wassers bewirkt.

Die Wasseroberflächen in den Zellen bilden dann concentrische Cylindermäntel

Fig. 168.



mit Axe O (Fig. 168) parallel der Radaxe, deren Höhe:

$$CO = k = \frac{g}{w^2} = \frac{2850}{u^2}$$

über der Radaxe ist. Nur am Radscheitel S und Radfusse F ist der Wasserspiegel horizontal. Die Abweichung $HAW = AOC = \chi$ vom Horizont ergibt sich für Punkt A, der in $ACM = \lambda$ unter dem Radmittel steht:

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{a \cos \lambda}{k \pm a \sin \lambda}.$$

Das negative Zeichen geht auf die Punkte oberhalb M. χ ist ein Maximum für den Punkt A, wo die von O gezogene Tangente den Radumfang berührt. Dann ist:

$$\chi = \lambda,$$

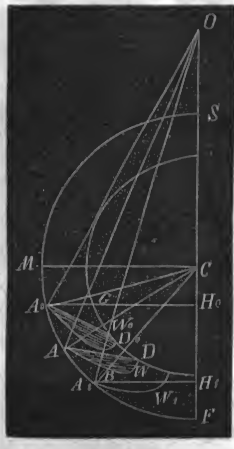
also:

$$\sin \chi = \frac{a}{k}.$$

Bei Berücksichtigung der Centrifugalkraft fällt aber der Ausgussbogen anders als der oben gefundene aus.

Sei A_0 (Fig. 169) die Anfangsstelle des Ausgusses, $MCA_0 = H_0A_0C = \lambda$ der Ausgusswinkel, $H_0A_0W_0 = A_0OC = \chi$ die

Fig. 169.



Depression des Wasserspiegels unter dem Horizonte, so ist:

$$\text{Winkel } GA_0W_0 = \lambda + \chi,$$

$$\triangle A_0G_0W_0 = \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{tg}(\lambda + \chi).$$

Sei wieder:

$$\text{Segm. } A_0B_0D_0 = S,$$

$$\triangle A_0GD_0 = D,$$

F der Querschnitt des Wasserkörpers, also:

$$F_0 + \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{tg}(\lambda + \chi) = S + D,$$

$$\operatorname{tg}(\lambda + \chi) = \frac{2(S + D - F_0)}{d^2},$$

aber:

$$\frac{\sin A_0OC}{\sin OA_0C} = \frac{CA_0}{CO},$$

also:

$$\sin \chi = \frac{a}{k} \cos(\lambda + \chi).$$

Diese Formeln geben $\lambda + \chi$ und χ, also auch λ.

Am Ende A_1 des Ausgussbogens ist:

$$CA_1W_1 = \lambda_1 + \chi_1 = \delta = 90 - \beta,$$

also:

$$\sin \chi = \frac{a \cos \delta}{k} = \frac{a \sin \beta}{k},$$

und:

$$\lambda_1 = \delta - \chi_1.$$

χ wird dann wie oben gefunden.

Dann ist λ gegeben, und man hat:

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{a \cos\lambda}{k + a \sin\lambda}, \qquad F = S + D - \tfrac{1}{2} d^2 \operatorname{tg}(\lambda + \chi).$$

Wenn das Wasser das Segment nicht mehr füllt, so ist $F < S$, also:

$$F = ABD - \triangle ADW,$$

und bei graden Schaufeln:

$$F = S - \tfrac{1}{2} s^2 \frac{\sin(\lambda + \chi - \delta) \sin \delta_1}{\sin(\lambda + \chi)},$$

wo s die Diagonale AD, δ_1 der Winkel DAC derselben mit dem Halbmesser ist.

Die Dimensionen der Radarme hängen von der Grösse und Wirkung des Rades ab.

Nehmen wir an, dass die Kraft durch ein Zahnrad weiter gegeben wird, so ist auf die Art Rücksicht zu nehmen, wie letzteres angebracht ist.

Möge das Zahnrad zunächst auf der Wasserradwelle sitzen Sei n die Zahl der Arme des Wasserrades, b die Breite, h die Dicke eines Arms parallel zur Radaxe und zum Radumfang gemessen, so ist allgemein:

$$Pl = b\, h^2 \frac{T}{b},$$

wo P die Kraft, l die Länge eines Radarmes in Zollen bedeutet; es ist also hier P mit $\frac{P}{n}$, l mit a zu vertauschen. T ist für hölzerne Arme gleich 1200 Pfund, für eiserne gleich 9000 Pfund zu nehmen (siehe den Artikel: Festigkeit), also:

$$\frac{Pa}{n} = 9{,}549 \frac{L}{nu} = bh^2 \frac{T}{b}.$$

$\frac{b}{h} = \mu$ ist bei Holz gleich $\frac{5}{7}$, bei Gusseisen $\frac{1}{5}$, und:

$$h = \sqrt[3]{\frac{b}{\mu T} \frac{Pa}{n}} = 3{,}86 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T n u}}.$$

Wird a in Fussen, L in Pferdekräften gegeben (510 Fusspfund), so kommt:

$$h = 70{,}52 \sqrt[3]{\frac{L}{\mu T n u}} = 4{,}11 \sqrt[3]{\frac{Pa}{\mu T n}} \text{ Zoll,}$$

und für hölzerne Arme:

$$h = 0{,}438 \sqrt[3]{\frac{Pa}{nu}} = 7{,}42 \sqrt[3]{\frac{L}{nu}} \text{ Zoll.}$$

Bei der Ausführung nimmt man mehr als das Doppelte, der Sicherheit wegen, und setzt:

$$h = 0{,}9 \sqrt[3]{\frac{Pa}{nu}} = 15 \sqrt[3]{\frac{L}{nu}} \text{ Zoll.}$$

Für Gusseisen ist theoretisch:

$$h = 0{,}342 \sqrt[3]{\frac{Pa}{nu}} = 5{,}80 \sqrt[3]{\frac{L}{nu}} \text{ Zoll,}$$

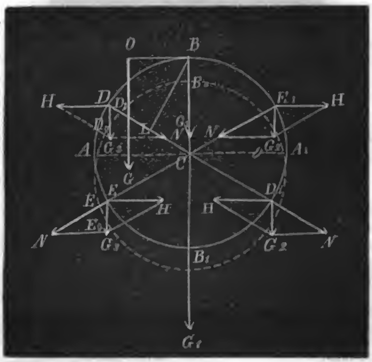
und in der Anwendung:

$$h = 0{,}7 \sqrt[3]{\frac{Pa}{nu}} = 12 \sqrt[3]{\frac{L}{nu}} \text{ Zoll}$$

zu nehmen. — Hierzu sind auch die Fälle zu rechnen, wo die Transmission durch Trommeln, Curbeln u. s. w. erfolgt.

Befinde sich jetzt das Zahnrad am Umfange des Wasserrades. Setzen wir 6 Arme voraus CB, CD, CE, CB_1 . . . (Fig. 170). In der ersten Stellung sind CB und CB_1 vertical, die andern Arme 30° gegen den Horizont

Fig. 170.



geneigt. CB widersteht durch Druck-, CB_1 durch Zugfestigkeit, CD und CE_1 durch Druck- und Biegungs-, CD_1 und CE durch Zug- und Biegungsfestigkeit. Die Biegungen aber sind sehr klein, und daher auch die Biegungsfestigkeiten zu vernachlässigen.

Sei G der Theil des Radgewichtes, welchen das Armsystem auf die Welle O übertragen soll, G_1 derjenige Theil, welchen jeder der verticalen, G_2, welchen jeder der geneigten Arme trägt, so zerfällt G_2 in zwei Componenten:

$$H = G_2 \operatorname{tg} 60 = G_2 \sqrt{3}$$

horizontal, und:

$$N = 2\,G_2$$

in der Richtung des Arms. H und $-H$ heben sich auf. Das Rad sinkt also in Folge der Elasticität der Radarme nur senkrecht um die Grösse:

$$BB_0 = DD_0 = EE_0 \;.\;.\;.\; \sigma;$$

derselben entspricht die Verkürzung oder Ausdehnung:

$$DD_2 = EE_2 = \sigma \cos 60^\circ = \tfrac{1}{2}\,\sigma,$$

und es ist also N die Hälfte von G_1, also:

$$G_2 = \tfrac{1}{2}\,N = \tfrac{1}{4}\,G_1.$$

Da aber $2\,G_1 + 4\,G_2 = H$ ist, so ergibt sich:

$$G_1 = \tfrac{1}{3}\,G, \quad G_2 = \tfrac{1}{12}\,G.$$

Ist F der Querschnitt des Radarmes, T der Tragmodul, so kommt:

$$F = \frac{G_1}{T} = \frac{G}{3\,T},$$

und:

$$F = \frac{N}{T} = \frac{2\,G_2}{T} = \frac{G}{6\,T}.$$

Es ist hier der erste Querschnitt also in Anwendung zu bringen.

Fig. 171.



Bei einer andern Armstellung (Fig. 171) sind CA und CA_1 horizontal, nur die übrigen Arme also dem Druck und Zuge ausgesetzt, und zwar ist dieser:

$$N = \frac{G_1}{\cos 3^0} = G_1 \sqrt{\tfrac{4}{3}} = \frac{G}{2\sqrt{3}},$$

$$F = \frac{N}{T} = \frac{G}{2T\sqrt{3}} = \frac{G}{3{,}464\,T},$$

also kleiner wie oben.

Wir setzen also immer:

$$F = \frac{G}{3T}.$$

Bei n Armen kommt, wie leicht zu sehen:

$$F = \frac{2\,G}{NT}.$$

Für hölzerne Arme soll sein $T = 2700$, und für schmiedeeiserne $T = 20000$. Da aber die Arme lang sind, nimmt man hier nur $\frac{1}{10}$ dieser Werthe, also bezüglich:

$$T = 270 \quad \text{und} \quad T = 2000,$$

so dass man hat:

$$F = \frac{2G}{270n} = 0{,}0075\,\frac{G}{n} \text{ Quadratzoll} \quad \text{und} \quad F = \frac{2G}{2000n} = 0{,}001\,\frac{G}{n} \text{ Quadratzoll.}$$

Was die **Stärke der Wasserradwelle** anbetrifft, so ist das Kraftmoment $Pa = 393\,d^3$ (siehe den Artikel: Festigkeit) für eine gusseiserne cylindrische Welle, also die Wellenstärke:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Pa}{3903}} = 0{,}1365\,\sqrt[3]{Pa},$$

oder wenn Pa in Fusspfunden gegeben ist:

$$d = 0{,}1326\,\sqrt[3]{Pa} \text{ Zoll.}$$

Ist u die Umdrehungszahl in der Minute, L die Arbeit in Pferdekräften, so kommt:

$$Pa = \frac{30 \cdot 510\,L}{\pi\,u}, \quad d = 5{,}3\,\sqrt[3]{\frac{L}{u}}.$$

In der Praxis aber nimmt man bei gusseisernen Wellen:

$$d = 0{,}355 \sqrt[3]{Pa} = 6 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll } = 16 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter,}$$

bei schmiedeeisernen:

$$d = 0{,}300 \sqrt[3]{Pa} = 5 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Zoll } = 13 \sqrt[3]{\frac{L}{u}} \text{ Centimeter.}$$

Hölzerne Wellen werden 3 bis 4 mal so stark als gusseiserne genommen.

Ist der Querschnitt quadratisch, so ist die Seite $s = 0{,}94 d$ zu setzen.

Für hohle cylindrische Wellen, deren äussere und innere Weiten bezüglich gleich d_1 und d_2 sind, ist:

$$d^3 = \frac{d_1^4 - d_2^4}{d_1} = (1 - \psi^4)\, d_1^3,$$

wo $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ ist, also wenn man $\psi = 0{,}6$ macht:

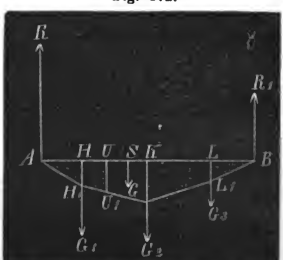
$$d_1 = 1{,}06\, d, \quad d_2 = 0{,}70\, d.$$

Es ist hier angenommen, dass das Transmissionsrad auf der Welle des Wasserrades sitze. Ist dasselbe mit einem Armsystem oder Radkranze verbunden, so wird nur ein Theil des Umdrehungsmomentes durch die übrigen Armsysteme auf die Welle übertragen. Man muss bei zwei Armsystemen P mit $\frac{P}{2}$, bei drei Armsystemen mit $\frac{2}{3} P$ vertauschen, und ebenso L mit $\frac{1}{2} L$, $\frac{2}{3} L$.

Sitzt das Rad auf dem inneren zwischen den äusseren befindlichen Radkranz, so ist die Torsion der Welle fast Null. Die Stärke der Welle hängt aber auch von dem Gewichte des Wasserrades ab. Zu dem Ende ist der Zapfendruck zu ermitteln.

Die Axe (Fig. 172) der Welle AB sei in H, K, L durch die Gewichte G_1,

Fig. 172.



G_2, G_3 belastet, ihre Länge $= l$, l_1, l_2, l_3 die Entfernungen AH, AK, AL vom Zapfen A, R der Zahndruck in A, R_1 der in B. Dann ist:

$$R_1 l = G_1 l_1 + G_2 l_2 + G_3 l_3,$$

d. h.:

$$R = G_1 + G_2 + G_3 - R_1 = \frac{G_1 (l - l_1) + G_2 (l - l_2) + G_3 (l - l_3)}{l}.$$

Die Biegungsmomente M_1 und M_2, M_3 für H, und K, L sind bezüglich:

$$M_1 = R l_1, \quad M_2 = R l_2 - G_1 (l_2 - l_1), \quad M_3 = R l_3 - G_1 (l_3 - l_1) - G_2 (l_3 - l_2).$$

Für die Zwischenpunkte gibt Interpolation die Momente mit ausreichender Genauigkeit.

Es kommt aber noch das Gewicht G_0 der Welle selbst hinzu. Sei l_0 der Abstand *AS* des Schwerpunktes, so werden in *B* die *R* und R_1 bezüglich vermehrt um:

$$Z = \frac{l - l_0}{l} G_0, \quad Z_1 = \frac{l_0}{l} G_0.$$

Gewöhnlich nimmt man an, die Welle sei prismatisch, und setzt:

$$l_0 = \tfrac{1}{2} l, \quad Z_1 = Z = \tfrac{1}{2} G_0.$$

Die Stücke *AH*, *AK*, *AL* haben dann die Gewichte:

$$\frac{l_1}{l} G_0, \quad \frac{l_2}{l} G_0, \quad \frac{l_3}{l} G_0,$$

und ihre Momente sind in Bezug auf *H*, *K*, *L*:

$$\tfrac{1}{2} G_0 \frac{l_1^2}{l}, \quad \tfrac{1}{2} G_0 \frac{l_2^2}{l}, \quad \tfrac{1}{2} G_0 \frac{l_3^2}{l},$$

die Biegungsmomente:

$$Z l_s - \tfrac{1}{2} G_0 \frac{l_s^2}{l} = \tfrac{1}{2} G_0 \frac{l_s (l - l_s)}{l}.$$

Diese Grössen zu den obigen Momenten, die G_1, G_2 . . . entsprechen, addirt, geben die Biegungsmomente, wodurch sich die Wellenstärke in *H*, *K*, *L* . . . bestimmt.

Soll die Welle gleich stark sein, so ist das grösste Moment zu nehmen.

Sei dasselbe gleich *M*, *d* wieder der Durchmesser, so hat man (siehe den Artikel: Festigkeit):

$$M = \frac{\pi d^3}{32} T, \quad \text{also:} \quad d = 2{,}17 \sqrt[3]{\frac{M}{T}} \text{ Zollpfund,}$$

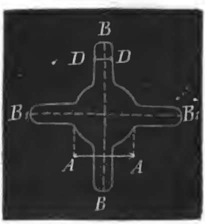
oder wenn *M* statt in Zollpfund in Fusspfund gegeben ist:

$$d = 4{,}96 \sqrt[3]{\frac{M}{T}}.$$

Setzt man für Gusseisen $T = 10000$, so kommt:

$$d = 0{,}230 \sqrt[3]{M} \text{ Zoll,} \quad \text{oder:} \quad d = 0{,}300 \sqrt[3]{M} \text{ Zoll.}$$

Fig. 173.



Der letzte Werth ist der der Sicherheit wegen vergrösserte. Für Schmiedeeisen nimmt man:

$$d = 0{,}25 \sqrt[3]{M},$$

für Holz wird *d* $2\tfrac{1}{2}$ bis 3 mal so gross als für Gusseisen.

Bei quadratischem Querschnitt nimmt man die Seite:

$$s = 0{,}838\, d.$$

Sind d_1 und d_2 die Durchmesser einer hohlen Welle, so ist *d* wieder zu vertauschen mit $d_1 = \frac{d}{\sqrt[3]{(1 - \psi^4)}}$, wo $\psi = \frac{d_2}{d_1}$ ist.

Bei einer gerippten Welle sei $d_1 = AA$ der Durchmesser des cylindrischen Kerns (Fig. 173), $h_1 = BB$ die Höhe, $DD = s_1$ die Dicke der Rippe, man hat dann das Tragmoment:

$$M = \frac{\pi d_1^4}{64} + \frac{[h_1^3 - d_1^3) s_1 + (h_1 - d_1) s_1^3]}{12} \frac{2T}{h_1},$$

oder wenn $h_1 = \mu d_1$, $s_1 = \nu d_1$ gesetzt wird:

$$M = \left[\frac{\pi}{16} + \tfrac{1}{3}\left[(\mu^3 - 1)\nu + (\mu - 1)\nu^3\right]\right] \frac{d_1^{\,3}\, T}{2\mu}.$$

Für eine cylindrische Welle von Durchmesser d ist $M = \frac{\pi d^3}{32} T$. Also wenn man beide Werthe identificirt:

$$d_1 = \frac{d\sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16}{3\pi}(\mu^3 - 1)\nu + (\mu - 1)\nu^3}}.$$

ν ist gewöhnlich klein gegen μ, und dann:

$$d_1 = \frac{d\sqrt[3]{\mu}}{\sqrt[3]{1 + \frac{16(\mu^3 - 1)\nu}{3\pi}}}.$$

Setzt man $\mu = \frac{h_1}{d_1} = 3$, $\nu = \frac{s}{d_1} = \frac{1}{3}$, so ist:

$$d_1 = 0{,}576\, d, \quad h_1 = 1{,}726\, d, \quad s_1 = 0{,}142\, d.$$

In jedem Falle haben wir für d zwei Werthe, den einen von Pa, den andern von M abhängig. Es findet also die Theorie der zusammengesetzten Festigkeit Anwendung, wonach zu nehmen ist:

$$d^6 = 0{,}355^6\, P^2 a^2 + 0{,}300^3\, M d^3,$$

also wenn man $\frac{M}{Pa} = n$ setzt:

$$d = \sqrt[3]{0{,}302\, n + \sqrt{(0{,}0911\, n^2 + 1)}}\; 0{,}355 \sqrt[3]{Pa},$$

also wenn gesetzt wird:

$$\psi = \sqrt[3]{0{,}302\, n + \sqrt{(0{,}0911\, n^2 + 1)}},$$

$$d = 0{,}355\, \psi \sqrt[3]{Pa} = 6\sqrt[3]{\frac{L}{M}} \text{ Zoll.}$$

Ist eins der Momente Pa oder M sehr gross gegen das andere, so reichen die Formeln:

$$d = 0{,}355 \sqrt[3]{Pa}, \quad d = 0{,}3 \sqrt[3]{M}$$

an sich aus.

Die Zapfenstärke bestimmt sich aus der Formel:

$$d = 0{,}3 \sqrt[3]{M}.$$

Hat der Zapfen seine ungünstigste Lage, d. h. ruht er mit seinem Ende auf dem Lager, ist l_1 die Länge, d_1 die Stärke des Zapfens, R der Zapfendruck, so ist:

$$d_1 = 0{,}3 \sqrt[3]{RG}.$$

l_1 aber steht in einem bestimmten Verhälinisse λ_1 zu d_1, also:

$$d_1^{\,3} = 0{,}3^3\, R\lambda \frac{d_1}{12}.$$

λ ist gewöhnlich 1 bis 1,25, also:

$$d_1 = 0{,}0475 \sqrt{R} \text{ bis } 0{,}0531 \sqrt{R} \text{ Zoll.}$$

Die Zapfenreibung vermindert die mechanische Leistung. Ist das Gewicht des Rades gleich G, so ist $F = \varphi G$ diese Reibung.

Sei r der Halbmesser des Zapfens, u die Umdrehungszahl in der Minute, also die Umfangsgeschwindigkeit $v = \frac{\pi u v}{30}$, so ist die Arbeit der Zapfenreibung:

$$L_1 = Fv = 0{,}1047\, \varphi\, u\, Gr.$$

Der Reibungscoefficient φ ist bei genau abgedrehtem Zapfen und den besten Schmiermitteln gleich 0,075 zu nehmen. Bei sehr guter Abwartung ist sogar $\varphi = 0{,}054$, bei schlechterer Schmiere aber φ bis 0,110.

Da das Gewicht des Rades von der Arbeit L abhängt, so kann man näherungsweise dasselbe dieser proportional nehmen. Auch von der Füllung hängt es ab, und man nimmt es daher auch dem Füllungscoefficienten ε und der Umdrehungszahl u umgekehrt proportional, also:

$$G = \frac{\alpha L}{\varepsilon u},$$

wo α ein Erfahrungscoefficient ist.

Nach Redtenbach ist für ein kleines eisernes Rad mit $\frac{1}{3}$ Füllung, Umdrehungszahl 9,3 und 3175 Kilogramm Gewicht:

$$L = 6{,}3, \quad \text{also} \quad \alpha = 1560.$$

Für ein hölzernes Rad mit gusseisernen Schaufeln, wo $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $u = 5$, $G = 20000$ nach Weissbach:

$$L = 20, \quad \alpha = 1250,$$

im Mittel also:

$$G = 3000 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Pfund } = 1400 \frac{L}{\varepsilon u} \text{ Kilogramm.}$$

Die mittlere Zahnreibung war:

$$2r = 0{,}00283 \sqrt{G} \text{ Fuss.}$$

Man kann daher setzen:

$$Gr = 0{,}0142 \sqrt{G^3},$$

und:

$$L_1 = 0{,}1047\, u\, \varphi\, 0{,}00142 \sqrt{G^3},$$

d. h.:

$$L_1 = 0{,}00015\, u\, \varphi \sqrt{G^3},$$

oder:

$$L_1 = 24{,}6\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fusspfund } = 0{,}0482\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Pferdekräfte,}$$

das Verhältniss zur übrigen Radleistung also:

$$\frac{L_1}{L} = 0{,}0482\, \varphi \sqrt{\frac{L}{\varepsilon^3 u}}.$$

Die Totalleistung ist nun:

$$L = \left(\frac{c_1 \cos \alpha_1 - v_1}{g} v_1 + h_1 + \xi h_2\right) Q\gamma - \frac{\varphi r}{a} Gv.$$

Man kann setzen:

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_1 + \xi h_2\right) Q\gamma - \frac{\varphi r}{a} Gv,$$

wenn das Wasser nahe tangential und mit Geschwindigkeit $c_1 = 2v_1$ eintritt, und man $v_1 = v$ setzt.

Setzen wir die eben gefundenen Zahlen ein, so kommt:

$$L = \left(\frac{v^2}{g} + h_1 + \xi h_2\right) Q\gamma - 24{,}6\, \varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}} \text{ Fusspfund.}$$

Zur Erzeugung der Geschwindigkeit $c = 2\,v$ dient das Gefälle $0{,}000772\,u^2 a^2$, welches vom Gesammtgefälle h abgeht.

Setzen wir noch:

$$h_1 + \xi h_2 = \nu \left[h - \frac{4{,}4}{2g} \left(\frac{\pi u a}{30} \right)^2 \right],$$

wo ν etwa gleich $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$, jedenfalls ein echter Bruch ist, und nimmt annäherungsweise:

$$4{,}4\,v \frac{v^2}{2g} - \frac{v^2}{g} = \frac{v^2}{g} = \frac{1}{g} \left(\frac{\pi u a}{30} \right)^2,$$

so kommt:

$$L = \nu \left[h - \frac{1}{g} \left(\frac{\pi u a}{30} \right)^2 \right] Q\gamma - 24{,}6\,\varphi \sqrt{\frac{L^3}{\varepsilon^3 u}}.$$

Die Arbeit der Reibung ist annähernd:

$$L_1 = \nu\, h\, Q\, \gamma \text{ Fusspfund},$$

also:

$$L = \left[h - \frac{1}{g} \left(\frac{\pi u a}{30} \right)^2 - 24{,}6\,\varphi \sqrt{\frac{\nu h^3 Q \gamma}{510^3 \varepsilon^3 u}} \right] \nu Q \gamma,$$

in Pferdekräften, und:

$$L = \left[h - 0{,}0003860\, a^2 u^2 - 0{,}01736\,\varphi \sqrt{\left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^3 \frac{\nu Q}{u}} \right] \nu Q \gamma,$$

in Fusspfund.

Für das Maximum dieses Ausdruckes findet man:

$$u = \sqrt[5]{\frac{\nu Q \gamma}{510^3} (5{,}59\,\varphi g)^2 \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^3 \left(\frac{30}{\pi a} \right)^4},$$

oder für preussisches Maass:

$$u = 2{,}63 \sqrt[5]{\frac{\nu \varphi^2 Q}{a^4} \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^3}.$$

Setzt man $a = \frac{1}{2} h$, so erhält man:

$$u = 4{,}58 \sqrt[5]{\frac{\nu \varphi^2 Q}{\varepsilon^3 h}},$$

und die Maximalleistung wird:

$$L = h - 0{,}01337 \sqrt[5]{(\nu Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^6}\ \nu Q \gamma.$$

Der Wirkungsgrad ergibt sich, da die disponible Leistung $Q h \gamma$ ist:

$$\eta = \frac{\left(h_1 + \xi h_2 + \frac{(c_1 \cos \alpha_1 - v_1) v_1}{g} \right) Q\gamma - \varphi \frac{r}{a_1} G v_1}{h\, Q\, \gamma},$$

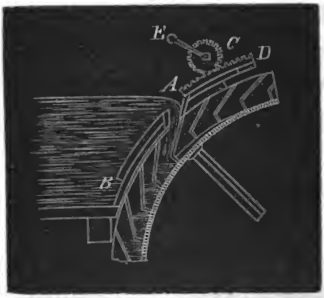
und im Maximum:

$$\eta = \left\{ 1 - \frac{0{,}01337 \sqrt[5]{(\nu Q a)^2 \varphi^4 \left(\frac{h}{\varepsilon} \right)^6}}{h} \right\}.$$

Im Allgemeinen kann man 0,74 bis 0,80 als Wirkungsgrad annehmen.

Versuche hierüber sind von Smeaton, Nordwall, Morin, D'Aubuisson und Weissbach gemacht.

Fig. 174.



3) Construction rückschlächtiger Räder.

Die rückschlächtigen Räder unterscheiden sich von den oberschlächtigen nur dadurch, dass die Eintrittsstelle sich weiter vom Scheitel entfernt findet. Das Aufschlaggerinnn liegt deshalb neben oder unter dem Radscheitel, nicht über demselben, auch ist die Umdrehung dem Gefälle entgegengesetzt. Man wendet sie bei sehr veränderlichem Wasserspiegel an, weil hier das Rad in der Richtung des abfliessenden Wassers umgeht, und überdies die Ausmündung stellbar gemacht werden kann. Die Schützen für diese Räder werden gewöhnlich Coulissenschützen genannt.

Entweder (Fig. 174) ist das Schutzbrett AB mit dem Radumfange concentrisch gekrümmt, damit die Mündung A bei allen Stellungen, die durch eine Zahnstange und ein Getriebe zu reguliren sind, in die Zellen leite, oder (Fig. 175) das Wasser fliesst über dem Kopfe A des Schutzbrettes ab. Dann muss ein festes Leitschaufelsystem EF zwischen Rad und Schutzbrett angebracht werden, über welchem letzteres gleiten kann. Die Leitschaufeln aber erhalten eine derartige Stellung, dass kein Stoss beim Einfliessen erfolgt.

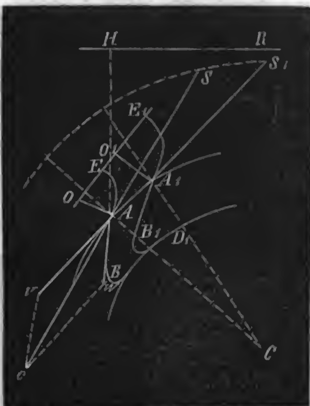
Sei Aw (Fig. 176) die Richtung des äusseren Schaufelendes, Av die Geschwindigkeit desselben. so erhält man wie beim oberschlächtigen Rade die Richtung Ac des eintretenden Wassers (man macht $vc = Aw$, $Ac = c$). Sei $AH = h$ die Tiefe von A unter dem Wasserspiegel, so kann man setzen wenigstens:

$$c = 0{,}82 \sqrt{(2gh)}.$$

Fig. 175.



Fig. 176.



und sogar:

$$c = 0{,}9\sqrt{(2gh)},$$

wenn die Leitschaufelcanäle nach innen abgerundet sind. Bei graden Leitschaufeln sind sie in die Richtung *CAS* zu bringen, bei gekrümmten lässt man Canal *AE* das Schaufelende *AS* in *A* berühren, d. h. nimmt *AO* senkrecht auf *AS*, und beschreibt aus *O* Kreisbogen *AE*. Diese Construction ist für jede Leitschaufel aber besonders zu machen, da die Geschwindigkeit c sich ändert. Gewöhnlich ist $c = 9$ bis 10 Fuss, und die Radgeschwindigkeit $\frac{1}{2}c$ bis $\frac{3}{4}c$. — Da die Luft aber nicht so leicht entweicht, als bei oberschlächtigen Rädern, muss man die Schützen weniger breit als das Rad machen, oder letzteres ventiliren. — Der Wirkungsgrad dieser Räder kommt dem der oberschlächtigen wenigstens gleich, oft ist er grösser.

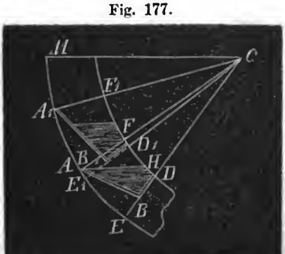
Bei ventilirten Rädern kann man die Schaufelzahl vermehren, wodurch der Füllungscoefficient $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ werden kann. Bei der gewöhnlichen Construction (Fig. 177) ist der Fassungsraum der Zelle *ABDF* annähernd:

$$ABDH = AEDT - ABE - AFH$$

$$\psi a_1 d - \tfrac{1}{2}\psi a_1 d - \tfrac{1}{2}d' \operatorname{tg}\lambda,$$

wo ψ den Schaufelwinkel *ACB*, λ den Ausgusswinkel *CAH* = *ACM* vorstellt,

Fig. 177.



$BE = \frac{d}{2}$ ist. Der Querschnitt der Zelle ist:

$$E D D_1 E_1 = q a_1 d,$$

wo q der Theilwinkel $ACA_1 = ECE_1$ ist. Der Füllungscoefficient ist dann:

$$\varepsilon = \frac{\frac{3}{4}\psi a_1 - \frac{1}{2} d \operatorname{tg}\lambda}{q d_1},$$

also:

$$\operatorname{tg}\lambda = \left(\tfrac{3}{4}\psi - \varepsilon q\right)\frac{2a_1}{d}.$$

Die grösste Raumnutzung findet statt, wenn der zum Ausguss gelangende Wasserspiegel AH die folgende Schaufel in B_1 berührt, dann ist:

$$BD = BE,\ B_1 D_1 = B_1 E_1,\ B_1 H = B_1 A,$$
$$D_1 H = D_1 F,$$

also:

$$\tfrac{1}{2} d \operatorname{tg}\lambda = (\psi - q) a_1,$$

und indem man die Werthe von λ identificirt:

$$q = \frac{\psi}{\psi(1-\varepsilon)},$$

und für:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}, \qquad q = \frac{\psi}{2}.$$

Dann bildet der Querschnitt des den Ausfluss beginnenden Wasserkörpers ABD ein Dreieck, dessen Seiten die Schaufelbreiten sind.

Der Schaufelwinkel $ACB = \psi$ bestimmt sich aus dem Eintrittswinkel $BAE = \beta$:

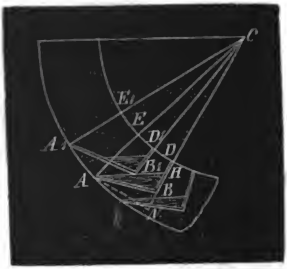
$$\cos(\beta - \psi) = \frac{a \cos\beta}{a - \frac{d}{2}}.$$

Die Schaufelzahl ergibt sich:

$$n = \frac{2\pi}{q} = \frac{360^\circ}{q^\circ}.$$

Ist aber der Füllungscoefficient kleiner als $\frac{1}{2}$, so füllt das den Ausfluss begin-

Fig. 178.



nende Wasser nicht das Dreieck ABD aus. Dann ist (Fig. 178):

$$\triangle ABH = ANH - ANB = \tfrac{1}{2} AN (NH - NB).$$

Es ist aber:

$$AN = a \sin\psi, \quad NB = a \sin\psi \operatorname{tg}(\beta - \psi), \quad NH = a \sin\psi \cot(\lambda + \psi),$$

also:

$$ABH = \tfrac{1}{2} a^2 \sin\psi^2 [\cot(\lambda+\psi) - \operatorname{tg}(\beta-\psi)],$$

und der Füllungscoefficient:

$$\varepsilon = \frac{ABH}{AEE_1A_1} = \tfrac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin\psi^2 [\cot(\lambda+\psi) - \operatorname{tg}(\beta-\psi)]}{d a \varphi},$$

also:

$$\cot(\lambda+\psi) = \operatorname{tg}(\beta-\psi) + \frac{2\varepsilon q d}{a \sin\psi^2}.$$

Soll der Wasserspiegel von der folgenden Schaufel berührt werden, so ist annähernd:

$$\operatorname{tg}\lambda = (\psi - q)\frac{2a}{d}.$$

Aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\cot(\lambda+\psi) = \frac{d - 2a\psi(\psi - q)}{d\psi + 2a(\psi - q)},$$

oder wenn man ψ mit $\operatorname{tg}\psi$ identificirt:

$$\cot(\lambda+\psi)=\operatorname{tg}(\beta-\psi)+\frac{2\varepsilon d\eta}{a\psi^2},$$

$$\eta=\frac{a\psi_1^2}{2\varepsilon d}\left(\frac{d-2a(\psi-\eta)\psi}{d\psi+2a(\psi-\eta)}-\operatorname{tg}(\beta-\psi)\right),$$

die Schaufelzahl ist dann wie oben.

4) **Construction mittelschlächtiger Räder.**

Die mittelschlächtigen Räder sind entweder gemeine, d. h. Zellenräder, oder Kropfräder, d. h. mit einem Mantel oder Kropfe umgebene Schaufelräder. Das zeitige Austreten des Wassers macht, dass der grösste Arbeitsverlust in der unteren Radhälfte stattfindet, und somit ist ihr Wirkungsgrad geringer, als der der bis jetzt behandelten Räder.

Man hält daher das Wasser so lange als möglich im Rade zurück, macht daher die Räder stark, und führt auch wohl das Wasser von innen ein (Fig. 179). Besser aber ist es, Kropfräder zu

Fig. 179.



nehmen, wo dann die Schaufeln aus einem Stücke bestehen und oft radial gestellt sind, jedoch wird besser der ins Unterwasser tauchende Theil der Schaufel so gestellt, dass er beim Austritt vertikal gerichtet ist. Der Kropf darf nur $\frac{1}{2}$ bis 1 Zoll vom Radumfange entfernt sein, damit nicht zu viel Wasser entweicht. Die Schaufelzahl muss gross sein, damit das Stossgefälle kleiner wird, und das Druckgefälle zunimmt. Oft wird die äussere Entfernung zweier Schaufeln gleich der Kranzbreite genommen. Ventilation ist hier nothwendig, also am Radboden sind Spalten anzubringen.

Mittelschlächtiger Räder bedient man sich bei einem Aufschlagsquantum von 5 bis 80 Cubikfuss in der Secunde und einem Gefälle von 5 bis 15 Fuss.

Die Schützen sind hier Ueberfallschützen, oder Coulissenschaufel- oder auch Spannschützen, selten findet freier Zufluss statt.

Bei den Ueberfallschützen fliesst das Wasser über den Kopf des Schutzbrettes. Die Richtung wird durch den abgerundeten Schützenkopf bestimmt.

Sind Leitschaufeln vorhanden, so sind auch diese abzurunden, und zwar nach derjenigen Parabelform, welche von dem tiefsten Wasserelemente beim freien Fall beschrieben wurde, denn bei grösserer Krümmung würde der Strahl nicht folgen, bei geringerer zu gross sein. Die Ausflussmenge ist (siehe den Artikel: Hydrodynamik):

$$Q=\tfrac{2}{3}\mu e_1 h_0 \sqrt{(2g\, h_0)},$$

wo μ der Ausflusscoefficient, e_1 die Mündungsweite, h_0 die Druckhöhe ist. Man erhält hieraus:

$$h_0=0{,}3302\left(\frac{Q}{\mu\, e_1}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Durch das Verhältniss $k=\frac{c}{v}$ ist auch die Eintrittsgeschwindigkeit c bestimmt. Also das nöthige Gefälle $HM=h_1$ ist:

$$h_1=\frac{c^2}{2g}=\frac{(k\,v)^2}{2g}, \text{ oder } =1{,}1\,\frac{(k\,v)^2}{2g}.$$

Der letzte Ausdruck wird wieder der Sicherheit wegen genommen. Gewöhnlich ist $k=2$.

Die Höhe $AM=x$ der Kröpfung ergibt sich:

$$x=h_1-h_0.$$

Sei $HD=h$ das Totalgefälle, so ist das Druckgefälle:

$$MD=EF=h_2=h-h_1,$$

und wenn $TBM=\nu$ die Neigung des Leitschaufelendes gegen den Horizont ist, nach der Theorie des Wurfes der Körper:

$$\sin\nu=\sqrt{\frac{x}{h_1}},\quad x=\frac{c^2\sin\nu^2}{2g}.$$

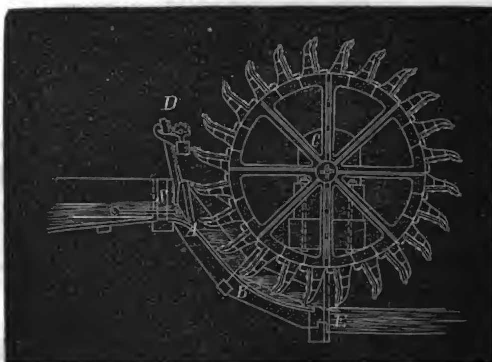
Die Länge $MB=y$ der Kröpfung ist dann:

$$y=h_1\sin 2\nu.$$

Soll das Wasser tangential einfliessen so ergibt sich der Radhalbmesser:

$$a=\frac{h-h_1}{1-\cos\nu},$$

Fig. 180.



und der Centriwinkel $BCF = \vartheta$ des wasserhaltenden Bogens:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{h - h_1}{a}.$$

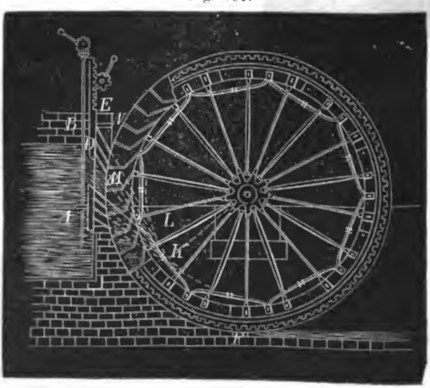
Ist aber ν nicht gleich ϑ, so ist die Abweichung des Strahls beim Eintritte von der Schaufel $\alpha = \vartheta - \nu$.

Bei **Spannschützen** ist das Schutzbrett AD (Fig. 180) dem Rade sehr nahe zu rücken, und dick und gut abzurunden; das Ende A des Gerinnbodens ist dann parabolisch zu formen. Die Höhe $BE = DF = h_2$ ergibt sich wieder:

$$h_2 = h - h_1,$$

wo $RF = h$ das Totalgefälle, h_1 die Geschwindigkeitshöhe ist, wo h_1 sich wie oben ergibt; ebenso der Centriwinkel $BCF = \vartheta$. Auch die Formeln für x und y bleiben unverändert. Die Schutzöffnung braucht nicht gerade in den Schei-

Fig. 181.



tel A der Parabel, sondern kann in jeden Punkt derselben fallen, wenn die Mündungsaxe die Parabel nur berührt.

Die Coulissenschütze (Fig. 181) AB ist mit Leitschaufeln versehen und wird wieder bei veränderlichem Wasserstande angewandt. Die Schutzbretter A und B können beide gestellt, und dadurch Druckhöhe und Ausflussöffnung regulirt werden. Tangentiale Einführung dagegen gelingt nicht, sondern die Abweichung von der Tangente beträgt 20 bis 30 Grad. Wie oben ist hier der Ausflusscoefficient $\mu = 0{,}82$ bis 0,9. Für den Mittelwerth $\mu = 0{,}85$ wird die Druckhöhe:

$$h_1 = 1{,}384 \frac{c^2}{2g},$$

allgemein:

$$h_1 = \frac{c^2}{2g\mu^2},$$

also die Kropfhöhe oder die des wasserhaltenden Bogens:

$$h_2 = h - 0{,}384 \frac{k^2 v^2}{2g}.$$

Ist der Wasserstand veränderlich, so erfolgt die Anordnung für den mittleren Wasserstand, indem das Ende M der mittleren Leitschaufel um die letzte Höhe h_2 über den Fuss F des Rades gelegt wird. Die andern Leitschaufeln (etwa in 3 Zoll Abstand) werden in gleichen Winkeln zu dem Radumfang gestellt, indem sie tangential einem dem Radumfange concentrischen Kreis KL, der durch die Richtung der ersten Leitschaufel DK bestimmt wird, gelegt werden.

Der Mantel oder Kropf ist von Stein oder Holz. Der kleinste Zwischenraum ½ Zoll zwischen Kropf und Rad reicht bei hölzernen Rädern nicht aus, weil wegen der mit der Zeit eintretenden Deformation des Kropfes selbst ein Anstreifen zu befürchten steht.

Ist der Kropf eng, so müssen durch Rechen, welche vor der Schütze angebracht sind, feste Körper, welche das Wasser etwa mit sich führt, entfernt werden.

Wenn das Wasser langsamer abfliesst, als das Rad umläuft, so darf der Kropf nicht in die Sehne des Abzugscanals auslaufen, sondern es muss ein Absatz stattfinden.

Was die Radconstruction anbetrifft, so unterscheidet man Stab- und Strauberäder. Bei den ersteren sind die Schaufeln zwischen zwei Kränzen befestigt, bei den letzteren sitzen sie auf kurzen Armen, welche radial aus dem Radkranze hervorragen. Die Strauberäder haben einen, auch zwei Kränze, schmäler jedoch als die der Stabräder. Gewöhnlich macht man die Schaufeln von Holz.

Die Leistung der Kropfräder ist im Allgemeinen wie die der oberschlächtigen, nur der Wasserverlust ist ein anderer, da hier das Wasser zwischen Rad und Kropf entweicht. Dieser Raum heisst deshalb schädlicher Raum.

Sei wieder c_1 die Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers, v_1 die des Rades im Theilkreise, α_1 der Winkel $c_1 w v_1$ zwischen beiden (Fig. 182), so ist wieder die Stossleistung:

$$\frac{(c_1 \cos\alpha_1 - v_1) v}{g} Q\gamma.$$

Sei $KK_1 = h_1$ der Niveauabstand zwischen dem Eintrittspunkte A_1 und der Oberfläche K des Unterwassers, so ist die Leistung gleich $h_1 Q\gamma$, die Totalwirkung wie beim oberschlächtigen:

$$L = Pv = \left(\frac{(c_1 \cos\alpha_1 - v_1) v_1}{g} + h_1\right) Q\gamma,$$

wenn man den Wasserverlust nicht berücksichtigt. — Es ist nun aber c_1 zu ermitteln. Wie beim oberschlächtigen Rade zeigt man, dass:

$$h_0 + z = 1{,}1 \frac{c^2}{2g},$$

wo:

$$HM = BD = h_0 + z$$

ist.

Das ganze Gefälle ist $RF = h$, der Radhalbmesser gleich a, also die Kropfhöhe $DF = h_2$:

$$h_2 = h - 1{,}1 \frac{c^2}{2g}.$$

Winkel $ACF = \vartheta$ ergibt sich durch:

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{h_2}{a}.$$

Winkel $vAc = \alpha$ ist gegeben. Durch Subtraction von ϑ erhält man:

$$cAD = \nu = \vartheta - \alpha,$$

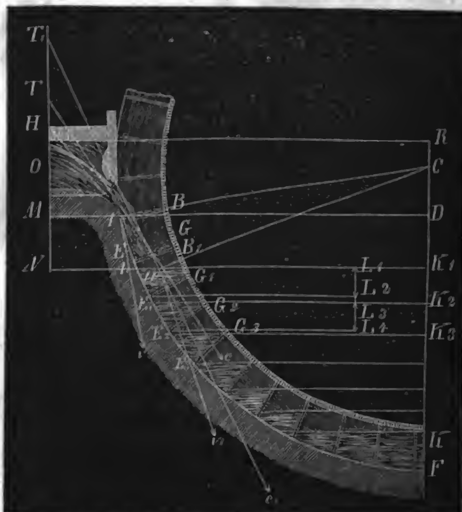
also die Scheitelcoordinaten der vom frei einfallenden Wasserstrahl gebildeten Parabel OA:

$$OM = x = \frac{c^2 \sin\nu^2}{2g},$$

$$MA = y = \frac{c^2 \sin 2\nu}{2g}.$$

Sei $MN = DK_1 = z$ die Höhe, um welche

Fig. 182.



das Wasser noch sinkt, ehe es vollständig zum Stosse gelangt. Dann ist für die Coordinaten des Punktes W, wo der Stoss beginnt:

$$ON = x_1 = x + z_1,$$

$$NW = y_1 = y\sqrt{\frac{x_1}{x}},$$

und für den Winkel $K_1 W c_1 = \nu_1$ des Strahles in W gegen den Horizont:

$$\operatorname{tg}\nu_1 = \frac{2x_1}{y_1}.$$

Für den Winkel $WCF = \vartheta_1$, um welche W vom Radfusse abweicht:

$$\sin\vartheta_1 = \frac{a\sin\vartheta + y - y_1}{a_1},$$

wo a_1 der mittlere Halbmesser CW ist.

Der Winkel $c_1 W v_1 = \alpha_1$ ergibt sich:

$$\alpha_1 = \vartheta_1 - \nu_1,$$

und wie oben:

$$c_1 = \sqrt{c^2 + 2g z_1} = \sqrt{2g(0{,}9\,h_0 + s + z_1)}.$$

Geht die Schaufel von AB nach $A_1 B_1$ und die ihr nächste, welche um $AE = b$ voraus ist, von EG nach $E_1 G_1$, wobei sie den Weg $EE_1 = s$ zurücklegt, so ist der Weg des einfallenden Wassers:

$$AW = s_1 = AE + EE_1 - E_1 W$$
$$= (1-\varepsilon)b + s,$$

aber:

$$\frac{s_1}{s} = \frac{1}{2}\,\frac{c+c_1}{v},$$

also:

$$s = \frac{2(1-\varepsilon)b}{\left(1+\frac{c_1}{c}\right)k - 2}.$$

Durch diesen Bogen lässt sich die Schaufelstelle $E_1 G_1$ verzeichnen, wenn man berücksichtigt, dass bei der Beendigung des Stosses dieselbe mit der Wassermenge $V = \frac{60\,Q}{nu}$ gefüllt ist, also der Querschnitt dieser Menge:

$$F = \frac{V}{e} = \frac{60\,Q}{nue}$$

beträgt. Diese Schaufelstelle aber muss der Fallhöhe $MN = z_1$ entsprechen Man

macht also die Bestimmung zuerst mit einem abgeschätzten, und dann mit einem hiernach angenäherten Werthe von z_1.

Von dem eben gefundenen Werthe von L sind jetzt die Arbeitsverluste abzuziehen, welche aus dem Entweichen des Wassers durch den schädlichen Raum im Kropfe entstehen. Dieser Verlust ist bei der Stosswirkung gering, da der Wasserstrahl nicht unmittelbar diesen Spielraum trifft. Bei der Druckwirkung aber findet er unausgesetzt statt. Man kann annehmen, dass das Wasser mit den veränderlichen Druckhöhen $L_1 L_2 = l_1$, $L_3 L_4 = l_2$ . . . aus den Oeffnungen E_1, E_2 . . . entweicht.

Sei e wieder die Radweite, der kürzeste Abstand der Radschaufeln vom Kropfe gleich σ, also σe die Ausflussöffnung, und die Ausflussgeschwindigkeiten:

$$v_1 = \sqrt{(2g\, l_1)}, \quad v_2 = \sqrt{(2g\, l_2)} \ldots,$$

die Ausflussmengen in Zeit τ:

$$v_1 = \mu\, \sigma e \tau \sqrt{(2g\, l_1)}, \quad v_2 = \mu\, \sigma e\, \tau \sqrt{(2g\, l_2)}$$

u. s. w., wo μ der Ausflusscoefficient ist.

Da diese Wassermengen von den Höhen $K_1 K_2 = k_1$, $K_2 K_3 = k_2$ . . . herabsinken, um welche die benachbarten Wasserspiegel in den Zellen von einander abstehen, so sind die Arbeitsverluste:

$$v_1 k_1 \gamma = \mu \sigma e \tau \sqrt{(2g\, l_1)}\, k_1 \gamma \ldots,$$

also der Arbeitsverlust im ganzen Kropfe in der Secunde:

$$L_1 = \mu \sigma e \gamma \sqrt{(2g)}\, (k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} + \ldots),$$

γ ist die Dichtigkeit des Wassers.

Die Summe $k_1 \sqrt{l_1} + k_2 \sqrt{l_2} +$ . . . kann man darum als constant ansehen, da in sehr kurzer Zeit eine Schaufel an die Stelle der andern tritt. Wenn das Wasser unter Wasser ausfliesst, so werden die Grössen:

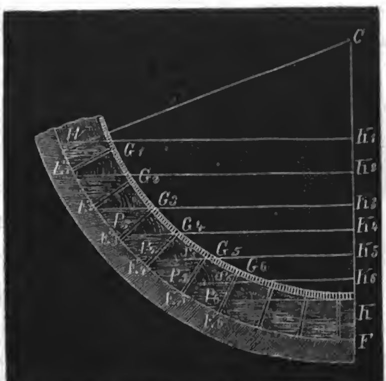
$$l_1 = k_1, \quad l_2 = k_2 \ldots$$

Da die Einfassungswände aber 1 bis 2 Zoll von den Radkränzen abstehen, so fliesst auch Wasser von beiden Seiten des Rades ab. Längs der Schaufelbreite $E_1 G_1$, $E_2 G_2$ . . . (Fig. 183) bilden sich nämlich Ausflussöffnungen. Durch die oberen Wandeinschnitte $E_1 G_1$, $E_2 G_2$ . . . fliesst das Wasser ganz frei, durch die unteren $E_5 G_5$, $E_6 G_6$ zum Theil frei, zum Theil unter Wasser. Steht das Wasser über der ganzen Schaufel $E_1 G_1$, die nicht in das Wasser der vorhergehenden Zelle taucht, ist ϑ der Spielraum an den Seiten des Rades, d die Schaufelbreite, l_1 die Tiefe der untern, m_1 ihrer obern Kante, G_1 unter dem Wasserspiegel W, so ist das Ausflussquantum zu beiden Seiten des Rades:

$$\tfrac{4}{3} \mu\, d\, \sigma \frac{\sqrt{(2g\, l_1^3)} - \sqrt{(2g\, m_1^3)}}{l_1 - m_1}.$$

Nimmt aber das Wasser über einer Schau-

Fig. 183.



fel E_3G_3 nur einen Theil derselben ein, und wird auf der vorderen Seite von dem Wasser der vorausgehenden Zelle bespült, so erfolgt der Ausfluss durch einen Theil E_3P_3 des Spaltes zu beiden Seiten der ersten Schaufel unter constanter Druckhöhe $K_3K_4 = k_3$, während bei dem Ausfluss aus dem übrigen Theile die Druckhöhe von k_3 bis 0 abnimmt. Die Breite des unteren Theiles der Schaufel ist $E_3P_3 = p$, die des oberen $P_3S_3 = q_3$; es fliesst dann durch den unteren Theil der Spalten E_3G_3 das Wasserquantum:

$$2\mu p_3 \sigma \sqrt{(2g k_3)},$$

und durch den oberen Theil:

$$\tfrac{4}{3}\mu q_3 \sigma \sqrt{(2g k_3)},$$

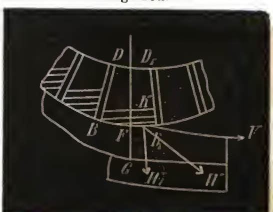
also im Ganzen:

$$2\mu\sigma \sqrt{(2g k_3)}\,(p_3+\tfrac{2}{3}q_3).$$

Nach einer oder der andern dieser Formeln muss bezüglich die Ausflussmenge ermittelt, jedes mit dem Niveauabstande k_1, k_2 . . . und mit γ multiplicirt, endlich alle Producte addirt werden, und man erhält dann das entsprechende Arbeitsquantum.

Steht die Oberfläche des Unterwassers aber mit der des Wassers in der tiefsten Zelle nicht auf gleichem Niveau, so erfolgt ein neuer Arbeitsverlust. Hier fliesst das Wasser aus der Zelle BDD_1B_1 (Fig. 184) sogleich, wenn die Schaufel

Fig. 184.



BD die Schwelle FG überschritten hat, nimmt also zu der Radgeschwindigkeit v noch eine andere an, welche dem Niveauabstande $FK = h_2$ entspricht. Derselbe hat seinen grössten Werth, wenn die Schaufel über die Schwelle gegangen, und die Oeffnung bei F entstanden ist; er ist gleich Null, wenn beide Wasserspiegel in ein Niveau kommen, wo dann der Ausfluss durch B_1F beendet ist. h_2 war die anfängliche Tiefe des Wassers in der untersten Zelle; sei $\frac{1}{2}h_2$ als mittlerer Niveaustand angenommen, also die Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers w ergibt sich:

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + \tfrac{1}{2}h_2.$$

Der Verlust an Arbeit, welcher $\frac{v^2}{2g}$ entspricht, war schon berücksichtigt, es tritt also hinzu:

$$L_2 = \tfrac{1}{2}Q h_2 \gamma.$$

Abfälle bei Kropfrädern sind somit, wo es angeht, zu vermeiden.

Es tritt aber auch hinzu die **Reibung im Kropfgerinne**. Sei der Reibungscoefficient ζ, so ist für Geschwindigkeiten von 4 bis 6 Fuss zu setzen:

$$\zeta = 0{,}00769,$$

und der Gefällverlust:

$$h_3 = \zeta \frac{lp}{F}\frac{v^2}{2g},$$

wo l die Länge des Kropfes, p der Umfang, F der Inhalt des Wasserprofils ist, somit:

$$\frac{p}{F} = \frac{2(e+d)}{de}, \text{ annähernd } = \frac{2}{d},$$

also:

$$h_3 = 0{,}0002461\,\frac{l}{d}\,v^2,$$

und der Verlust an Arbeit:

$$L_3 = 0{,}0002461\,\frac{l\,v^2}{d}\,Q\gamma.$$

Der **Widerstand der Luft gegen die Schaufelbewegung** und auch gegen die der Radarme kommt noch in Rechnung. Es ist der Widerstandcoefficient $\zeta = 1{,}25$. Ist γ die Dichtigkeit der Luft, F die Fläche, also $\gamma = 0{,}0859$ Pfund, so hat man für diesen Widerstand:

$$\zeta F\frac{\gamma v^2}{2g} = 0{,}001718\,F v^2$$
$$= 0{,}0001718\,n d e v^2.$$

Da F gleich dem Inhalte nde sämmtlicher Schaufeln ist, und der Arbeitsverlust:

$$L_4 = 0{,}001718\,n d e v^3.$$

Diese Verluste betragen jedoch nur wenige Procent der Leistung.

Sei jetzt νh_1 die Höhe des wasserhaltenden Bogens, ν eine Erfahrungszahl, h_1 die Höhe der Eintrittsstelle

über der tiefsten Stelle des Rades, dann ist wieder $\nu Q h_1 \gamma$ die Druckwirkung, $\varphi \frac{r}{a} G v$ die Zapfenreibung.

Jetzt lässt sich die Gesammtleistung angeben. Sie beträgt:

$$L=\left(\frac{(c_1 \cos\alpha_1 - v_1)v_1}{g}+vh_1\right)Q\gamma-\frac{\varphi r}{a}Gv.$$

Das Totalgefälle vom Oberwasserspiegel bis zu dem des Unterwassers sei wieder h, also:

$$h_1=h-1,1\frac{c_1^2}{2g}.$$

Die Eintrittsgeschwindigkeit c_1, bei welchem die Leistung am grössten ist, ergibt sich:

$$c_1=\frac{v_1 \cos\alpha_1}{1,1\,v},$$

und in diesem Falle:

$$L=\left[vh-\left(2-\frac{\cos\alpha_1^2}{1,1\,v}\right)\frac{v_1^2}{2g}\right]Q\gamma-\frac{\varphi r}{a}Gv.$$

$\cos\alpha_1$ und $1,1\,v$ sind beide nahe $= l$, c_1 nahe $= v_1$. Der leichteren Einführung wegen aber macht man:

$$c_1 \cos\alpha_1 = 2v_1,$$

und es wird die wirkliche Leistung:

$$L=\left[v\,h-\left(\frac{4,4\,v}{\cos\alpha_1^2}-2\right)\frac{v_1^2}{2g}\right]Q\gamma-\frac{\varphi r}{a}Gv,$$

beinahe wie beim oberschlächtigen Rade, daher auch die vortheilhafteste Umdrehungszahl beinahe wie dort.

Morin multiplicirt die theoretische Leistung:

$$L=\left(\frac{(c\cos\alpha-v)\,v}{g}+h_1\right)Q\gamma$$

mit dem Coefficienten ξ, den er durch Erfahrung bestimmt. Er findet für Räder mit Spannschützen:

$$\xi=0,77,$$

und für solche mit Ueberfallschützen:

$$\xi=0,80.$$

Jedoch ist die Zapfenreibung noch abzuziehen.

Weissbach gibt den Wirkungscoefficienten gleich 0,65 bis 0,63 an.

5) Construction unterschlächtiger Räder.

Unterschlächtige Räder hängen gewöhnlich in einem Gerinne, welches mit Boden und Seitenwänden das Rad möglichst genau umschliessen muss. Man unterscheidet Kropfgerinne, welche längs eines kleinen Bogens das Rad umfassen, von Schnurgerinnen, welche es nur berühren. Die ersteren sind offenbar die zweckmässigeren. Umfasst der Kropf wenigstens 3 bis 4 Schaufeln, so ist die Rechnung wie bei den mittelschlächtigen Rädern zu führen.

Auch hier werden meist radiale Schaufeln angewandt, jedoch neigt man sie zuweilen etwas nach der Schütze unten, damit sie kein Wasser wieder empornehmen, auch können dieselben aus zwei Theilen, die einen Winkel von 100 bis 120° machen, zusammengesetzt werden. Man kann in dem Bogen grosse Oeffnungen machen, ohne dass das Wasser nach innen überfliesst, daher werden die Zellen so gefüllt, dass $\varepsilon=\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ beträgt

Um das Ueberlaufen nach innen zu verhindern und den Fassungsraum zu vergrössern, macht man die Radtiefen von 1¼ bis 1½ Fuss. Die Einführung erfolgt tangential, und um die Schützmündung recht nahe zu legen, wendet man ein geneigtes Schutzbrett an, dessen untere Kante abgerundet ist.

Die Leistung unterschlächtiger Kropfräder ist geringer als die der mittelschlächtigen, da das Druckgefälle geringer ist.

Morin findet durch Versuche nur den Wirkungsgrad 0,33 bis 0,41, nämlich:

$$Pv=\xi\left(\frac{c-v}{g}\,v+h_1\right)Q\gamma,$$

wo $\xi=0,60$ bis $0,74$ beträgt.

Auf Zapfenreibung ist hier keine Rücksicht genommen. Berücksichtigt man dieselbe, so ist:

$$\xi = 0{,}40 \text{ bis } 0{,}45, \text{ wenn } h_1 = \tfrac{1}{4} h,$$
$$\xi = 0{,}42 \text{ bis } 0{,}49, \text{ wenn } h_1 = \tfrac{2}{5} h,$$
$$\xi = 0{,}47, \quad \text{wenn } h_1 = \tfrac{2}{3} h,$$
$$\xi = 0{,}55, \quad \text{wenn } h_1 = \tfrac{1}{4} h,$$

Noch schwächere Leistungen geben die Räder im Schnurgerinne, bei denen nur die Wirkung durch Stoss erfolgt. Man wendet sie daher nur bei Gefällen bis 4 Fuss an; sie haben 12 bis 24 Fuss Höhe, 24 bis 48 meist radiale oder unten wenig schräg nach der Schütze zu gestellte Schaufeln, welche 3 mal so breit sind, als der ankommende Wasserstrahl dick ist, denn das Wasser nimmt nach vollbrachtem Stosse mit dem Rad eine Geschwindigkeit an, die höchstens 35 bis 40 Prozent seiner anfänglichen Geschwindigkeit beträgt, so dass der fortfliessende Strahl $2\frac{1}{2}$ bis 3 mal so dick ist, als der ankommende. In der Regel ist die Schaufelbreite 12 bis 20 Zoll. Das Schnurgerine ist horizontal oder geneigt, der Zwischenraum bis zum Rade höchstens 1 bis 2 Zoll. Gut ist es, wenn dem Gerinne eine schwache Krümmung gegeben, und das Rad so eng geschaufelt ist, dass 4 bis 5 Schaufeln ins Wasser reichen. Die Spannschütze wird schief gelegt, um Ausfluss- und Eintrittmündung möglichst nahe zu bringen, und die Contraction zu vermeiden. Unter dem Rade wird oft ein Abfall sein, weil der Rückstrom hier sehr stört; auch gibt es Vorrichtungen (Panzerzeuge) zum Heben und Senken des Rades, auch wohl des Gerinnes.

Man hat für die Leistung:

$$Pv = \frac{(c-v)\,v}{g}\,Q_1\,\gamma,$$

und also für die Umdrehungskraft:

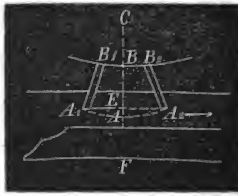
$$P = \frac{c-v}{g}\,Q_1\,\gamma = 2{,}112\,(c-v)\,Q_1.$$

Q_1 ist das zum Stoss gelangende Wasserquantum. Es kommt darauf an, in welchem Verhältniss dies zum Aufschlagsquantum steht.

Wasser geht unbenutzt hier durch den schädlichen Raum zwischen Rad und Gerinne, und ausserdem kommen gewisse, namentlich tiefere Wassertheile gegen die vorausgehende Schaufel gar nicht zum Stosse.

Der Wasserverlust im schädlichen Raume ergibt sich folgendermaassen. Steht die Schaufel AB (Fig. 185) im tiefsten Punkte, so ist die Höhe des schädlichen Raumes dem kürzesten Abstande $AF = \sigma$ des Rades vom Gerinne gleich. — Stehen dagegen 2 benachbarte Schaufeln A_1B_1 und A_2B_2 gleich viel vom tiefsten Punkte F ab, so hat der schädliche Raum die grösste Höhe EF.

Fig. 185.



Sei $CA = a$ der Radhalbmesser, n die Schaufelzahl, so ist die halbe Entfernung EA_1 zweier Schaufeln gleich $\frac{\pi a}{n}$, also die Bogenhöhe:

$$EA \text{ annähernd } = \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2},$$

die grösste Höhe des schädlichen Raumes:

$$EF = \sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{2},$$

und der mittlere Werth gleich:

$$\sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}.$$

Hiermit ist die Gerinnweite e_1 zu multipliciren, und der Querschnitt des schädlichen Raumes ist:

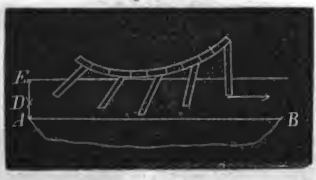
$$e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2 \frac{a}{4}\right].$$

Sei jetzt w die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser durch denselben entweicht. Wenn das Unterwasser in gleichem Niveau mit der Oberfläche des ankommenden Strahles steht, so geht das Wasser ungehindert mit der Geschwindigkeit c hindurch, und die Wassermenge ist:

$$Q_2 = \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] e_1\, c,$$

Steht aber das Unterwasser höher, ein Fall, welcher eintritt, wenn das Abzugsgerinne unter oder noch hinter dem Rade keinen Abfall hat, so ist die Geschwindigkeit wegen des Gegendrucks

Fig. 186.



vom Unterwasser her geringer. Sei $AD = d_1$ (Fig. 186) die Strahldicke, $AE = d_2$ die Höhe des abfliessenden Wassers, so ist:

$$d_2 = \frac{d_1 c}{v},$$

und der Niveauabstand:

$$d_2 - d_1 = \frac{c - v}{v} d_1,$$

also die Geschwindigkeit des entweichenden Wassers:

$$W = \sqrt{c^2 - 2g \frac{c - v}{v} d_1},$$

und der Wasserverlust:

$$Q_2 = e_1 \left[\sigma + \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 a\right] \sqrt{c^2 - 2g \frac{c - v}{v} d_1}.$$

Beide Ausdrücke von Q_2 sind aber mit einem Ausflusscoefficienten $\mu = 0,7$ zu multipliciren.

Das Wasser, welches zur Seite abfliesst, hat den Querschnitt $d_1 \sigma_1$, also diese Abflussmenge ist im ersten Falle:

$$Q_3 = 2\mu d_1 \sigma_1 c,$$

und im zweiten:

$$Q_3 = 2\mu d_1 \sigma_1 \sqrt{c^2 - 2g \frac{c - v}{v} c_1}.$$

Das Wasserquantum, welches zwischen den Schaufeln durchgeht, aber nicht zum Stosse gelangt, gibt Gerstner auf folgende Weise durch eine Annäherungsformel.

Sei $AE = k$ (Fig. 187) die Entfernung zweier Schaufeln, und die Länge $l = AB = A_1 B_1 = A_2 B_2 \ldots$ der Wasserfäden, welche zwischen zwei Schaufeln Platz finden, ist dann:

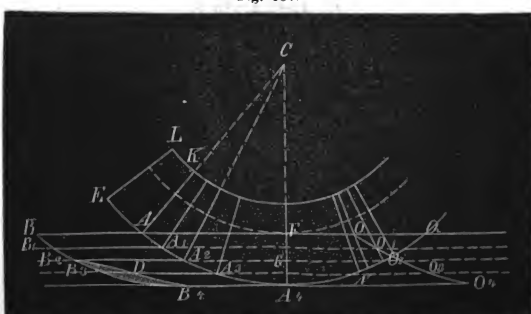
$$l = \frac{ck}{v}.$$

Trifft nun von AB das erste Element A die Schaufel AK in A, so trifft das letzte B sie in O, und man hat:

$$\frac{AO}{v} = \frac{BO}{c},$$

d. h.:

Fig. 187.



$$\frac{AO}{v}=\frac{AO}{c}+\frac{BA}{c},$$

also:

$$AO=\frac{v}{c-v}BA=\frac{vl}{c-v},$$

und:

$$AO=A_1O_1=A_2O_2\ \ldots$$

Das letzte Element B_2 von Faden A_2B_2 trifft noch die Schaufel, dagegen B_3, welcher in O_3 treffen würde, kann nicht mehr zum Stosse gelangen, da die Schaufel sich über A_3B_3 dann schon erhoben hat, dies aber geschieht mit allen Punkten in B_3D, wo D erst die Schaufel in N trifft.

Man hat nun:

$$A_3D=\frac{c-v}{v}A_3N,$$

es ist also die Summe aller Fadentheile zwischen $AB_3\,DA_4\,A_3\,A_2$, welche eine Schaufel stossen, gleich $\frac{c-v}{v}$ mal Schwersumme zwischen A_2O_2 und A_4, d. h. das Kreissegment $A_2O_2A_4$, und wenn man dies annähernd gleich $\frac{2}{3}AO$ mal A_4G setzt, so ist der Querschnitt der zum Stoss gelangenden Wassermenge:

$$A_2B_2DA_4=\frac{c-v}{v}\,\frac{2}{3}\,\frac{vl}{c-v}A_4G,$$

d. h.:

$$A_2B_2DA_4=\tfrac{2}{3}l\cdot A_4G,$$

also wenn Q_4 die zum Stoss gelangende Wassermenge ist:

$$\frac{Q_4}{Q}=\frac{ABB_2A_2+A_2B_2DA_4}{ABB_4A_4}=\frac{l\cdot FG+\frac{2}{3}l\cdot AG}{l\cdot A_4F},$$

d. h.:

$$\frac{Q_4}{Q}=1-\frac{A_4G}{3A_4F}.$$

Sei noch $a=CA$ der Radhalbmesser, so ist annähernd:

$$A_4F=\frac{AF^2}{2a},\quad A_4G=\frac{A_2G^2}{2a},$$

also:

$$A_4G\,AF^2=A_4G^2A_4F,$$

und:

$$A_2G=\tfrac{1}{2}\frac{vl}{c-v},\quad AF=\tfrac{1}{2}n_1k,$$

wo n_1 die Anzahl der ins Wasser getauchten Schaufeln ist, also:

$$\frac{A_4G}{A_4F}=\frac{1}{n_1^2}\left(\frac{c}{c-v}\right)^2,$$

also:

$$Q_4=\left[1-\frac{1}{3n_1^2}\left(\frac{c}{c-v}\right)^2\right]Q.$$

Dieser Verlust ist desto geringer, je grösser n_1 also auch n ist.

Mit Berücksichtigung der Zapfenreibung ergibt sich nun die Leistung:

$$L=\frac{c-v}{g}v(Q_4-Q_3)\gamma-\frac{\varphi r}{a}Gv,$$

und annähernd, wenn gesetzt wird:

$$Q_3=\sigma ec=\frac{\sigma}{d_1}Q,\quad L=\frac{c-v}{g}v\left[1-\frac{\sigma}{d_1}-\frac{1}{3n_1^2}\left(\frac{c}{c-v}\right)^2\right]Q\gamma-\frac{\varphi r}{a}Gv.$$

Fällt die Sohle des Abzugsgrabens mit der des Schutzgerinnes zusammen, so fliesst das Wasser mit Geschwindigkeit v und der Tiefe $d_2 = \frac{c}{v} d_1$ fort, dann hat man noch eine Reaction des Wassers auf die Radschaufeln, deren Arbeit beträgt:

$$L_1 = (d_2 - d_1) Q\gamma = \frac{c-v}{v} d_1 Q\gamma.$$

Um die der grössten Leistung entsprechende Geschwindigkeit zu ermitteln, vernachlässigen wir die Zapfenreibung. Durch Differenziiren ergibt sich dann:

$$v = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{c^2}{3n_1^2\left(1-\frac{a}{d_1}\right)(c-v)^2}\right),$$

also dann, wenn die Anfangsgeschwindigkeit etwas kleiner als die halbe Wassergeschwindigkeit ist.

Smeaton hat den grössten Wirkungsgrad experimentell bestimmt, er findet denselben gleich 0,165 bis 0.25 für das Verhältniss: $\frac{v}{c} = 0.34$. Bossut gibt denselben etwas grösser. Im Mittel kann man setzen:

$$L = 1{,}288\,(c-v)\,v\,Q \text{ Fusspfund},$$

jedoch genügt diese Form nur, wenn der Spielraum $1\frac{1}{2}$ Zoll nicht übersteigt. Ist dies der Fall, so ist nach Christian:

$$L = 1{,}605\,(c-v)\,Fcv,$$

wo F den Inhalt des eingetauchten Flächenstückes der Schaufeln bezeichnet.

Es kommt oft vor, dass die Wasserkraft auf mehrere Räder vertheilt wird. Seien deren zwei gegeben, die in einem horizontalen Schnurgerinne hängen. Das Wasser kommt dann an das zweite Rad mit der Geschwindigkeit v_1, mit der das erste umgeht; ist v_2 die des zweiten Rades, c die Eintrittsgeschwindigkeit, Q das Aufschlagsquantum für beide Räder, ξ eine Erfahrungszahl, die wir gleich 1,288 setzen, so sind die Leistungen:

$$L_1 = \xi(c-v_1)\,v_1\,Q,$$
$$L_2 = \xi\,(c-v_2)\,v_2\,Q,$$

und wenn beide Räder gleich viel leisten, und man $v_2 = \frac{1}{2} v_1$ setzt:

$$(c-v_1)\,v_1 = (v_1 - v_2)\,v_2,$$

und:

$$v_1 = \tfrac{4}{5} c, \qquad v_2 = \tfrac{2}{5} c,$$

die Gesammtleistung:

$$L_1 + L_2 = \tfrac{8}{25}\,\xi\,c^2\,Q = 0{,}32\,\xi\,c^2\,Q.$$

Bei einem Rade erhielte man nur $\frac{1}{4} c^2 Q$.

6) Construction der Schiffsmühlenräder.

Schiffsmühlenräder sind Räder ohne jedes Gerinne, die daher nur einen Theil der Flussbreite einnehmen. Die Zapfen ruhen auf Schiffen, welche durch Seile oder Anker befestigt sind. Auch findet sich zuweilen ein Angewelle auf dem Schiffe, während das andere am Ufer ruht. Im ersteren Falle muss sich die Arbeitsmaschine ebenfalls auf dem Schiffe, im letzteren auf dem Lande befinden.

Diese Räder sind 12 bis 15 Fuss hoch, haben wenigstens 6, besser aber 12 und mehr Schaufeln, oft fehlen die Kränze, und die Schaufeln befinden sich an den Radarmen, sind lang (6 bis 18 Fuss) und breit 1 bis 2 Fuss). Zweckmässig ist den Schaufeln 10 bis 20° Neigung unten gegen den Strom zu geben, und nur etwas über die Hälfte ins Wasser tauchen zu lassen. Um das Biegen der Arme zu verhindern, verbindet man dieselben mit Staben.

Die Leistung ist kleiner als die bei Rädern in Gerinnen, denn ein Theil des Wassers weicht zur Seite aus, und ein grösseres Wasserquantum gelangt nicht zum Stoss, weil wenige Schaufeln eingetaucht sind. Die Leistung ist wieder durch die Formel gegeben:

$$L = \frac{(c-v)\,vc}{g}\,F\gamma,$$

wo F der Inhalt des eingetauchten Theils einer Schaufelfläche ist. Der Wasserverluste wegen multiplicirt man L jedoch mit einem Coefficienten. Ist die Zahl n_1 der eingetauchten Schaufeln n_1 nicht sehr klein, so kann man wieder setzen:

$$\frac{Q_1}{Q} = \left(1 - \frac{c^2}{3\,n_1^2\,(c-v)^2}\right) Q.$$

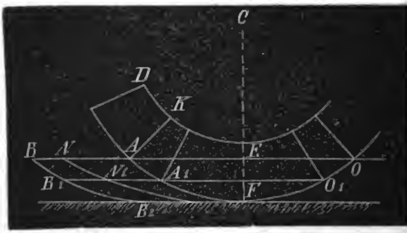
wenn aber n_1 sehr klein ist, so trifft schon der oberste Wasserfaden AB (Fig. 188) möglicherweise nicht vollständig die Schaufel AK, und nur AN gelangt zum Stosse; dann ist:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{ANN_1FA_1}{ABB_2FA_1},$$

$$ANN_1FA_1 = \frac{c-v}{v}\,AOF,$$

also:

Fig. 188.



$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{v\, n_1\, AD}{cAD} = \frac{2n_1}{3}\,\frac{c-v}{c},$$

also die Leistung:

$$L = \tfrac{2}{3}\, n_1\, \frac{(c-v)^2\, v}{gc}\, Q\gamma = \tfrac{2}{3}\, n_1\, \frac{(c-v)^2\, v}{g}\, \gamma.$$

Die grösste Leistung findet dann für $v = \frac{1}{3}\, c$ statt, und beträgt:

$$L = \frac{8}{81}\, n_1\, \frac{c^3}{g}\, F\gamma = \frac{8}{81}\, n_1\, \frac{c^2}{g}\, Q\gamma.$$

Der Wirkungsgrad ist:

$$\eta = \frac{16 n_1}{81}.$$

Für eine beträchtliche Anzahl von Schaufeln dagegen gilt die Formel für Räder im Gerinne.

Ist der Radhalbmesser a und die Tiefe $EF = e_1$ der Eintauschung gegeben, so hat man:

$$2\pi\, a n = AO\, n_1, \quad \text{und} \quad AO = 2\sqrt{(2 a e_1)},$$

also:

$$n_1 = \frac{n\sqrt{2 a e_1}}{\pi a} = 0{,}45\sqrt{\frac{e_1}{a}}.$$

Nach Bossuts Versuchen ist in dem Falle, wo wenig Schaufeln eintauchen:

$$L = \xi\, \frac{(c-v)^2}{v}\, F\gamma$$

zu setzen, wo $\xi = 1{,}37$ bis $1{,}79$ ist, und wenn viele Schaufeln eintauchen:

$$L = \xi\, \frac{(c-v)\, v\, c}{g}\, F\gamma, \qquad \xi = 0{,}847 \text{ bis } 0{,}706.$$

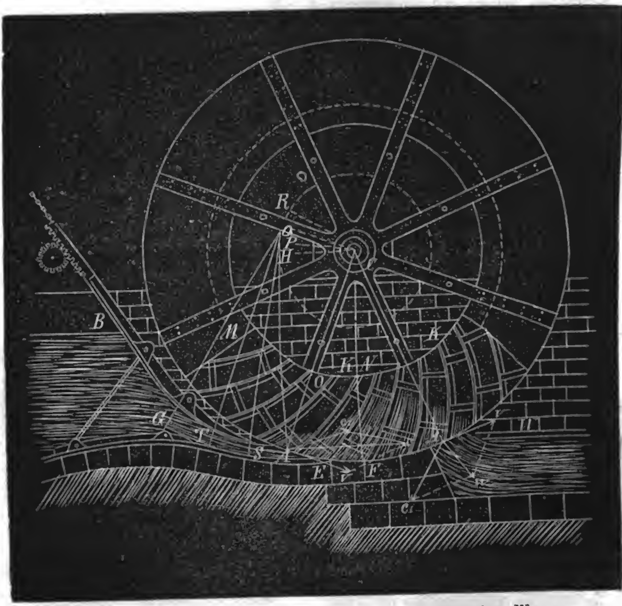
Das vortheilhafteste Verhältniss finden Bossut und Poncelet $\frac{v}{c} = 0{,}4$, und den Wirkungsgrad:

$$\eta = 0{,}384.$$

7) Construction der Ponceleträder.

Ponceleträder heissen nach ihrem Erfinder unterschlächtige Räder, deren Schaufeln derart gekrümmt sind, dass der Wasserstrahl an der hohlen Seite derselben hinströmt, und ohne Stoss durch Druck wirkt. Sie sind den andern unterschlächtigen Rädern vorzuziehen, und werden bei Gefällen unter 6 Fuss angewandt. C ist die Axe (Fig. 189), AK, A_1K_1 . . . Schaufeln, BD das geneigte Schutzbrett, TA der eintretende Wasserstrahl, der dann an den Schaufeln hinauf- und hinuntersteigt. Das Rad hat nur einen engen Spielraum im Gerinne, das Schutzbrett ist an der unteren Kante abgerundet, um Contraction zu vermeiden, die Mündung ist dem Rade nahe,

Fig. 189.



und um den Verlust an Wasserreibung auszugleichen, gibt man dem Vorgerinne wohl $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{13}$ Neigung. In der Regel wendet man einen kreisförmigen Kropf an, welcher sich wenigstens auf 2 Schaufelstellungen erstreckt, bringt hinter demselben einen Abfall von $\frac{1}{2}$ Fuss an, und erweitert auch wohl den Abzugsgraben, damit das Rad nicht im Wasser wate. Die Räder haben 10 bis 20 Fuss Höhe, 32 bis 48 Schaufeln von Blech oder Holz. Die Schutzöffnung ist $\frac{1}{2}$ bis 1 Fuss hoch.

Sei wieder $c = AC$ die Eintrittsgeschwindigkeit, $v = AV$ die Umfangsgeschwindigkeit des Rades, dann gibt Diagonale $Ac_1 = c_1$ des Parallelogramms $Avcc_1$ die relative Geschwindigkeit des Wassers in Bezug zum Rade. Schliesst nun Schaufel AK sich tangential an Ac_1, so ist kein Stoss vorhanden.

Sei Winkel cAv, um welchen die Richtung des ankommenden Wassers vom Radumfange abweicht, $= \alpha$, so ist:

$$c_1^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos\alpha,$$

und Winkel $vAc_1 = \beta$, um den die Richtung der relativen Geschwindigkeit von dem Radumfange abweicht, ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{c\sin\alpha}{c_1}.$$

Aber nicht bloss in der Mitte A, sondern in der ganzen Höhe, also auch in D und E soll der Strahl mit Winkel α in das Rad treten, d. h. es muss in einem Kreisevolventenbogen zugeführt werden GA, dessen Grundkreis dem Rade concentrisch ist, und dessen Erzeugungslinie AH im Anfange auf der Bewegungsrichtung AA_1 des Strahls beim Eintritte senkrecht steht. Denn wenn man in dem der Strahlhöhe gleichen Abstande Aequidistanten zu diesem

Evolventenbogen bildet, so schneiden diese den Radumfang in D und E unter demselben Winkel, wie die erstere in A.

Die der Axe des eintretenden Strahls entsprechende Evolvente wird construirt, wenn man auf dem Grundkreise die Stücke HP, PQ ... abschneidet, durch P und Q ... Tangenten zieht, und diese bezüglich um HP, HQ ... gegen die erste AH wachsen lässt. Das Wasser steigt mit abnehmender relativer Geschwindigkeit so lange, bis diese Geschwindigkeit Null wird, fällt dann so, dass es mit der Anfangsgeschwindigkeit c_1 wieder unten in A_1 ankommt. Wird nun diese Geschwindigkeit $A_1C_1 = c_1$ mit der Umfangsgeschwindigkeit v vereint, so erhalten wir $A_1w = w$, und:

$$w = \sqrt{(c_1{}^2 - v^2 - 2c_1 v \cos\beta)}.$$

Die mechanische Arbeit, welche das abfliessende Wasser behält, ist also:

$$L_1 = \frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{c_1{}^2 + v^2 - 2c_1 v \cos\beta}{2g} Q\gamma,$$

die Radleistung ist also:

$$L = \frac{c^2 - w^2}{2g} Q\gamma = \frac{c_1 v \cos\beta}{g} Q\gamma = \frac{2v(c\cos\alpha - v)}{g} Q\gamma.$$

Diese Leistung ist am grössten für $v = \frac{1}{2} c \cos\alpha$, nämlich:

$$L = \frac{c^2 \cos\alpha^2}{2g} Q\gamma.$$

Ist $\alpha = 0$, so ist der Verlust sogar Null. Dies ist jedoch unmöglich, jedoch ist α nur klein, d. h. nicht über 20° zu nehmen.

Wird die Centrifugalkraft nicht berücksichtigt, so steigt das Wasser zur Höhe $\frac{c_1{}^2}{2g}$. Diese Centrifugalkraft ist fast der Schwerkraft parallel, und ihre Grösse:

$$p = \frac{v_1{}^2}{a_1}.$$

Wenn a_1 der Halbmesser, v_1 die mittlere Geschwindigkeit des mittleren Radkranzes vorstellt, dann ist:

$$(g+p)\, h_1 = \frac{c_1{}^2}{2},$$

also die Steighöhe:

$$h_1 = \frac{c_1{}^2}{2\left(g + \frac{v_1{}^2}{a_1}\right)}.$$

Damit das Wasser aber nicht oben überschlägt, muss die Kranzbreite $FN = d$ eine gewisse Grösse haben, und zwar:

$$d = LN + FL = h_1 + CF - CL,$$

d. h.:

$$d = h_1 + a\,(1 - \cos\lambda),$$

wo λ den Winkel ABF vorstellt, um welchen der Eintrittspunkt A vom tiefsten F absteht. Indess ist noch die Strahldicke d_1 zuzuzählen, weil um diese die oberen Wasserfäden bei Annahme einer mittleren Geschwindigkeit höher steigen als die unteren, also:

$$d = d_1 + h_1 + a\,(1 - \cos\lambda).$$

Die Radweite beträgt:

$$e = \frac{Q}{d_1 c}.$$

Der Fassungsraum dev_1 soll 2 bis $2\frac{1}{2}$ mal so gross sein, als das Aufschlagsquantum, also:

$$d_1 = \frac{2}{5} \frac{dv_1}{c} \text{ bis } \frac{1}{2} \frac{dv_1}{c}.$$

Wegen $\frac{v_1}{v} = \frac{a - \frac{d}{2}}{a}$ hat man noch:

$$v_1 = \left(1 - \frac{d}{2a}\right) v,$$

also:

$$d_1 = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{d}{2a}\right)\frac{dv}{c} \text{ bis } \frac{1}{2}\left(1 - \frac{d}{2a}\right)\frac{dv}{c},$$

oder wenn $v = \frac{c}{2}\cos\alpha$ gesetzt wird:

$$d_1 = \frac{1}{5} d\cos\alpha\left(1 - \frac{d}{2a}\right)$$

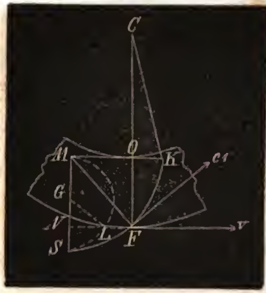
$$\text{bis } \frac{1}{4} d\cos\alpha\left(1 - \frac{d}{2a}\right).$$

Nach Morin ist $d = \frac{a}{3}$ bis $\frac{a}{2}$ zu setzen.

Noch ist die Eintrittsstelle A und die Austrittsstelle A_1 zu bestimmen. Man nimmt diese Punkte gleich weit vom tiefsten F. Die Bogenlänge AA_1 hängt von der Zeit t ab, welche das Wasser in den Schaufeln bleibt; es ist nämlich:

$$AA_1 = 2\lambda a = vt.$$

Fig. 190.



Damit das Wasser bei der höchsten Stelle K in den Schaufeln nicht überschlage, muss das innere Schaufelende K beim tiefsten Stande FK (Fig. 190) der Schaufel nicht überhängen; aber es soll die Schaufel auch nicht zu lang sein, also darf das Ende K den inneren Radumfang nicht zu spitz schneiden, und deshalb soll das innere Schaufelende beim mittleren Stande vertical sein.

Wenn die Schaufel eine cylindrische Form hat, so erhält man das Centrum M des kreisförmigen Durchschnittes, wenn man MF senkrecht auf Fc_1, und OM horizontal zieht. Der Krümmungshalbmesser $MF = KM = r$ ergibt sich:

$$r = \frac{d}{\cos\beta},$$

da Winkel $MFO = c_1\, Fv = \beta$ ist.

Die Zeit, welche das Wasser zum Hinaufsteigen und Hinabsteigen am Bogen FK braucht, kann als Schwingungszeit eines Pendels betrachtet werden, wenn die Schwere durch die Grösse $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ ersetzt wird. Es ist:

$$t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}\,\left[\varphi + \frac{h}{8r}(\varphi + \sin\varphi)\right],$$

wo h die Fallhöhe, also $= r$, φ der Centriwinkel MGL ist, welcher dem Kreise MLS mit Durchmesser r und der Bogenhöhe:

$$MN = MF\cos FMN = r\cos\beta$$

entspricht. Man hat dann:

$$\cos\varphi = -\frac{NG}{LG} = 1 - 2\cos\beta,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\cos\varphi},$$

also wenn man g durch $g + \frac{v_1^2}{a_1}$ ersetzt:

$$2t = \frac{9\varphi + \sin\varphi}{8}\sqrt{\frac{r}{g + \frac{v_1^2}{a_1}}},$$

und die Länge des wasserhaltenden Bogens AA_1:

$$b = 2\lambda a = 2vt.$$

Aus diesen Angaben sind Regeln für die Construction der Räder aufzustellen.

Gegeben ist das Aufschlagquantum Q und das Gefälle h, also $c, c_1, v, \alpha, \delta, \lambda$ a, d, e sind zu bestimmen.

Annähernd ist:

$$v = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{(2gh)}}{2},\quad d = \frac{h}{4},\quad d_1 = \frac{d}{4}.$$

In dem Ausdruck für $\frac{vt}{a}$ kann annähernd:

$$\varphi = \pi,\ v_1 = v = \frac{c}{2},\ a_1 = a,\ r = d$$

gesetzt werden. Es kommt:

$$\lambda = \frac{0{,}883\,h}{\sqrt{a(2a+h)}},$$

und:

$$a^2 + \frac{ha}{2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{0{,}883\,h}{\lambda}\right)^2,$$

woraus sich a ergibt:

$$a = \frac{h}{4}\left(\sqrt{1 + \frac{6{,}238}{\lambda^2}} - 1\right).$$

Führt man, wie es am zweckmässigsten ist, den Wasserstrahl horizontal ein, so ist:

$$\alpha = \lambda = 20^\circ,\ a = 1{,}56\,h,\ c = 0{,}98\,\mu\sqrt{(2gh)},$$

$$v = \tfrac{1}{2}c\cos\alpha,\ u = \frac{30v}{\pi\alpha},$$

wo v die vortheilhafteste Radgeschwindigkeit, u die Umdrehungszahl ist.

Ferner:

$$\operatorname{tg}\delta = 2\operatorname{tg}\alpha,\quad c_1 = \frac{v}{\cos\delta},$$

und wenn man annähernd setzt:

$$\frac{v_1^2}{a_1} = \left(1 - \frac{d}{2a}\right)\frac{v^2}{a} = \left(1 - \frac{h}{8a}\right)\frac{v^2}{a} = 0{,}9\frac{v^2}{a},$$

schärfer bestimmt:

$$d = \tfrac{2}{5}\,\frac{c_1^2}{g + 0{,}9\frac{v^2}{a}} + 0{,}08\,a,$$

$$d_1 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{d}{2a}\right) d \cos\alpha, \quad e = \frac{Q}{d_1 c}.$$

e ist die Radweite. Für den Halbmesser r der Schaufelkrümmung und den Hülfswinkel φ kommt:

$$r = \frac{d}{\cos\delta}, \quad \sin\frac{\varphi}{2} = \sqrt{\cos\delta},$$

endlich:

$$\lambda = \frac{9\varphi + \sin\varphi}{16} \frac{v}{a} \sqrt{\frac{r}{g + 0{,}9\frac{v^2}{a}}}.$$

Ist der mittlere Abstand zweier Schaufeln 1 Fuss, so wird:

$$n = 2\pi a_1.$$

Poncelet findet experimental das vortheilhafteste Verhältniss $\frac{v}{c} = 0{,}50$ bis 0,60, den Wirkungsgrad $\eta = 0{,}5$ für 2 bis 2,3 Meter Gefälle, für 1,5 bis 2,0 dagegen $\eta = 0{,}55$, und für kleinere $\eta = 0{,}6$. Die Nutzleistungen sind in diesen drei Fällen:

$$\xi(c - v)\, v\, Q \text{ Fusspfund,}$$

und bezüglich:

$$\xi = 2{,}53, \quad 2{,}74, \quad 2{,}95.$$

Neuere Versuche sind von Morin, Marozeau und Lacolonge angestellt.

Ueber verticale Wasserräder ist Ausführliches enthalten in Weissbach's Maschinenmechanik. Von dem betreffenden Abschnitte dieses Werkes ist dieser Artikel ein Auszug. Ausserdem in Poncelet's: *Cours de mécanique appliqué*, Redtenbacher's: Theorie und Bau der Wasserräder.

Wasserrad, horizontales — Turbine (Hydraulik und Maschinenlehre).

1) Allgemeines.

Die horizontalen Wasserräder oder Turbinen werden in Stoss-, Druck- und Reactionsräder, je nach der Art ihrer Wirkung getheilt. — Die Stossräder haben ebene, ausgehöhlte Schaufeln, auf die das Wasser ungefähr winkelrecht schlägt, die Druckräder krumme Schaufeln, an denen es hindurchläuft, endlich die Reactionsräder Röhren, aus denen das Wasser ziemlich tangential ausfliesst. Die beiden letzteren Arten, im Uebrigen sehr ähnlich, unterscheiden sich in der Construction namentlich dadurch von einander, dass bei den ersteren die Zellen nicht ganz vom Wasser ausgefüllt werden, was bei den letzteren der Fall ist.

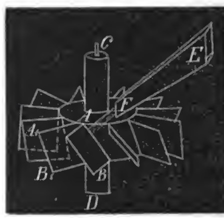
Bei den Stossrädern breitet sich das Wasser von allen Seiten an den Schaufeln aus, bei den beiden andern fliesst es nur nach einer Seite. Je nach der Art, wie das Wasser abfliesst, zerfallen noch die Druck- und Reactionsräder in vier Arten.

Die relative Bewegung des Wassers kann nämlich eine horizontale oder eine geneigte sein. Im ersteren Falle kann das Wasser von innen nach aussen oder umgekehrt, im letzteren von oben nach unten oder umgekehrt abfliessen. Räder, wo der Abfluss von unten nach oben geht, werden auch Danaiden genannt.

2) Construction der Stossräder.

Stossräder sind die einfachsten, aber auch die unvollkommensten Horizontalräder. Sie haben 16 bis 20 rechtwinkige Schaufeln, AB, A_1B_1 ... (Fig. 191), welche unter 70° gegen den Horizont geneigt aufsitzen. Zum Zuführen

Fig. 191.



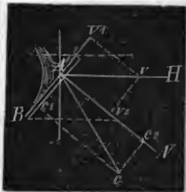
des Wassers dient ein pyramidales Gerinne EF von 20 bis 40 Grad Neigung, so dass das Wasser fast rechtwinklig aufschlägt. Man wendet sie bei 10 bis 20 Fuss Gefälle dann an, wenn die Umdrehungszahl gross sein soll. Man gibt ihnen 5 Fuss Durchmesser, den Schaufeln 15 Zoll Höhe und 8 bis 10 Zoll radiale Länge.

Um die Leistung zu ermitteln, sei $Ac = c$ (Fig. 192) die Geschwindigkeit des Aufschlagewassers, $Av = v$ die der Schaufeln. Man zerlegt beide nach der Neigungslinie und der Normale einer Schaufel in:

$$c_1 = c\sin\vartheta, \quad c_2 = c\cos\vartheta,$$
$$v_1 = v\sin\alpha, \quad v_2 = v\cos\alpha,$$

wo ϑ der Winkel cAN zwischen der

Fig. 192.



Normale AN und der Richtung des Wasserstrahls, α der Neigungswinkel HAN der Normale gegen den Horizont. c_1 bleibt ungeändert durch den Stoss, dagegen geht c_2 in v_2 über, also der Geschwindigkeitsverlust ist $c_2 - v_2$, und der Arbeitsverlust:

$$\frac{(c \cos \vartheta - v \cos \alpha)^2}{2g} Q\gamma.$$

Das Arbeitsvermögen des abfliessenden Wassers ist:

$$\frac{c^2 \sin \vartheta^2 + v^2 \cos \alpha^2}{2g} Q\gamma,$$

da es mit Geschwindigkeit:

$$W = \sqrt{(c^2 \sin \vartheta^2 + v^2 \cos \alpha^2)}$$

abfliesst. Beide Grössen sind von $\frac{c^2}{2g} Q\gamma$ abzuziehen, und die Leistung ist:

$$L = Pv = \frac{(c \cos \vartheta - v \cos \alpha)\, v \cos \alpha}{g} Q\gamma.$$

Die grösste Leistung findet für $\vartheta = 0$ statt, d. h. wenn der Strahl senkrecht gegen die Schaufel gerichtet ist. Auch ist wie bei den verticalen Rädern zu nehmen:

$$2v \cos \alpha = c,$$

so dass man die grösste Leistung erhält:

$$L = \frac{c^2 Q\gamma}{4g} = \frac{h\, Q\gamma}{2},$$

also das halbe Arbeitsvermögen.

Die Wirkung ist eine grössere, wenn die Schaufeln mit Leisten eingefasst, oder löffelförmig ausgehöhlt sind. Die Schaufel weicht dann in der Richtung des Strahles mit Geschwindigkeit:

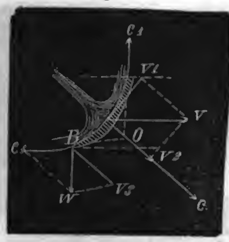
$$v_2 = v \cos \alpha$$

aus, also die relative Geschwindigkeit des Wassers ist dann:

$$c_1 = c - v_2 = c - v \cos \alpha.$$

Sei β der Winkel $c_1 O c$ (Fig. 193), um

Fig. 193.



welchen das Wasser von seiner anfänglichen Richtung abgelenkt wird, so ist die Geschwindigkeit des abfliessenden Wassers:

$$w = \sqrt{(c_1^2 + v_2^2 + 2 c_1 v_2 \cos \beta)},$$

und der Arbeitsverlust:

$$\frac{Q w^2 \gamma}{2g},$$

die Leistnng also:

$$L = \frac{c^2 - w^2}{2g} Q\gamma$$

$$= (1 - \cos \beta) \frac{(c - v \cos \alpha)\, Q\gamma}{g}.$$

Bei ebenen Schaufeln ist $\beta = 90°$, bei hohlen ist β stumpf, also der Ausdruck in der That grösser.

Versuche an derartigen Rädern von Piobert und Tardy geben:

$$L = 0{,}75\ (c - v \cos \alpha) \frac{v \cos \alpha}{g} Q\gamma,$$

wenn das Verhältniss $\frac{v}{c}$ nahe 0,6 ist. Der Wirkungsgrad ist 0,16 bis 0,40.

3) Stoss- und Druckräder.

Haben die Schaufeln eine grössere Ausdehnung und sind so ausgehöhlt, dass sie nahezu horizontal laufen, so findet neben dem Stosse noch ein Druck statt, welcher den Effect vermehrt.

Vom Einfallspunkte A (Fig. 194) errichte man Normale AN, der Winkel cAN der Eintrittsrichtung mit der Normale sei wieder gleich ϑ, $vAN = \alpha$, also:

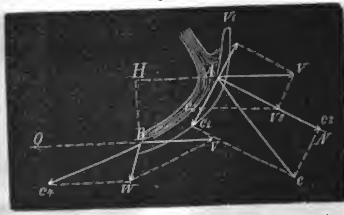
$$c_2 - v_2 = c \cos \vartheta - v \cos \alpha,$$

und der Arbeitsverlust:

$$L_1 = \frac{(c \cos \vartheta - v \cos \alpha)^2}{2g} Q\gamma,$$

und das Wasser beginnt an den Schau-

Fig. 194.



feln niederzufliessen mit der relativen Geschwindigkeit:

$$c_1+v_1=c_1+c_3=c\sin\vartheta+v\sin\alpha.$$

Sei h_1 die Höhe BH, von welcher das Wasser an der Schaufel niedersinkt, so ist die relative Geschwindigkeit unten an der Schaufel in 3):

$$c_4=\sqrt{(c\sin\vartheta+v\sin\alpha)^2+2g\,h_1}.$$

Ausserdem hat das Wasser die Radgeschwindigkeit v, also die absolute Geschwindigkeit:

$$w=\sqrt{(c_4^2+v^2-2\,c_4\,v\cos\delta)},$$

wo δ der Winkel c_4BO von Schaufelfuss und Horizont ist; der entsprechende Arbeitsverlust $\frac{w^2 Q\gamma}{2g}$ ist nebst L_1 abzuziehen, also ist die Leistung:

$$L=[c^2+2g\,h_1-(c\cos\vartheta-v\cos\alpha)^2 -(c_4^2+v^2-2\,c_4\,v\cos\delta)]\,\frac{Q\gamma}{2g};$$

beim winkelrechten Stosse kommt:

$$c_4=\sqrt{(v^2\sin\alpha^2+2g\,h_1)},$$

also:

$$L=[(c\cos\alpha-v)\,v +\cos\delta\,\sqrt{(v^2\sin\alpha^2+2g\,h_1)}]\,\frac{Q\gamma}{2g}.$$

Bei der grösstmöglichen Leistung ist $w=0$, also $\delta=0$, $c_4=v$, d. h.:

$$v=\frac{\sqrt{(2g\,h_1)}}{\cos\alpha}.$$

4) Druckräder.

Man kann aber verlangen, dass das Wasser ganz ohne Stoss eintrete, dann ist:

$$v\cos\alpha=c\cos\delta.$$

Gibt es beim Druck die ganze lebendige Kraft ab, d. h. ist $\delta=0$, $c_4=v$, so kommt:

$$(c\sin\vartheta+v\sin\alpha)^2+2g\,h_1=v^2,$$

oder:

$$c^2+2g\,h_1=2\,c\,v\cos(\alpha+\vartheta),$$

also:

$$v=\frac{g\,(h+h_1)}{c\cos\alpha_1},$$

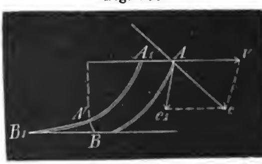
wenn h die Geschwindigkeitshöhe des eintretenden Wassers, also $h+h_1$ das Gesammtgefälle, und $\alpha_1=cAv$ also der Winkel zwischen Wasser- und Rad-Geschwindigkeit ist. Die Leistung ist dann:

$$L=(h+h_1)\,Q\gamma,$$

also der Wirkungsgrad gleich 1.

Aus der vortheilhaftesten Geschwindigkeit v findet man die Schaufellage, wenn man durch den Eintrittspunkt A (Fig. 195) eine Linie parallel vc legt,

Fig. 195.



und Parallelogramm $A\,v\,c\,c_1$ bildet. Ac_1 ist dann die relative Anfangsgeschwindigkeit des Wassers an der Schaufel, also auch die Richtung des Schaufelkopfes. Uebrigens muss des ungehinderten Abflusses wegen der Schaufelfuss B einen kleinen Winkel δ gegen den Horizont machen. Sei a der mittlere Radhalbmesser, l die mittlere radiale Schaufellänge, so ist der Querschnitt der Abflussöffnung einer Zelle gleich:

$$lBN=l\sin\delta\cdot B\,B_1,$$

also die Summe aller: $2\pi\,a\,l\sin\delta$.

Ist c_2 die relative Geschwindigkeit, mit der das Wasser an den Radfuss gelangt, so ist:

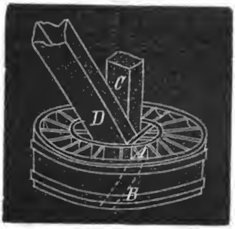
$$c_2 = \sqrt{(c^2+v^2-2cv\cos\alpha_1+2gh_1)},$$

so ist:

$$\sin\delta = \frac{Q}{2\pi a l c_2}.$$

Die eben beschriebenen Räder heissen auch Borda'sche Turbinen. *AB* (Fig. 196) ist eine der krummen Schaufeln,

Fig. 196.



die aus drei Holzbrettchen bestehen und sich in Mänteln, die aus Dauben zusammengesetzt sind, befinden. Die Welle *C* ist viereckig, *D* ist die um 45° geneigte Einfallslutte.

Nach Borda ist die effective Leistung:

$$L = 0{,}75\left(h + h_1 - \frac{(c\cos\vartheta - v\cos\alpha)^2 - w^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

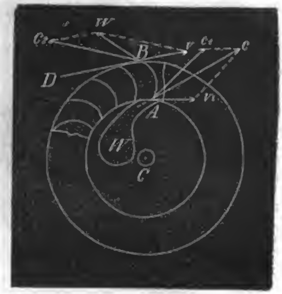
Die Kufenräder, von ähnlicher Wirkung, sind wie die Stossräder geformt, haben jedoch nur 9 krumme Schaufeln und sind von 2 Reifen umgeben.

Die Burdin'schen Turbinen sind vervollkommnete Borda'sche. In ihnen tritt das Wasser gleichzeitig an mehreren Punkten ein, und die Ausmündungen vertheilen sich auf drei concentrische Kreise. Dies geschieht, damit das abfliessende Wasser dem Rade keinen Reactionswiderstand darbiete. Für diese Räder hat man den Wirkungsgrad 0,67 gefunden. Auch sind nach dem Prinzip derselben Verticalräder construirt.

5) **Tangentialräder.**

Während sich bei den bis jetzt beschriebenen Rädern das Wasser in einer Cylinderfläche bewegt, tritt bei den Tangentialrädern auch eine vertical oder auch eine radial gerichtete Bewegung

Fig. 197.



ein, und ist dann bei denselben die Centrifugalkraft zu berücksichtigen.

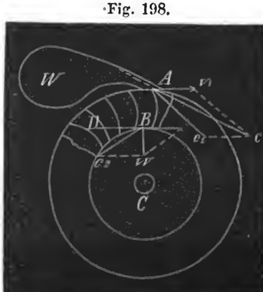
Wenn sich ein Wasserelement *M* in einem Radkanale *AB* (Fig. 197) auswärts bewegt, das Rad *ACB* aber selbst sich mit Winkelgeschwindigkeit ω umdreht, so bewirkt die Centrifugalkraft einen Zuwachs an Arbeitsvermögen:

$$L = \frac{v^2 - v_1^{\,2}}{2g}\, G,$$

wo *G* das Gewicht des Elementes, v und v_1 die Umfangsgeschwindigkeiten des Rades an der Eintrittsstelle *A* und an der Austrittsstelle *B*, g die Beschleunigung der Schwere ist.

Bewegt sich aber das Wasserelement von aussen nach innen (Fig. 198), so fin-

Fig. 198.



det ein Arbeitsverlust statt. — Ist c_1 die relative Eintrittsgeschwindigkeit, so

ist die Austrittsgeschwindigkeit in beiden Fällen bestimmt durch die Formel:

$$\frac{c_2^2}{2g} = \frac{c_1^2 + v^2 - v_1^2}{2g},$$

d. h.:

$$c_2^2 = c_1^2 + v^2 - v_1^2.$$

Das Wasser soll aber bei A ohne Stoss eintreten, c muss sich also in c_1 in Richtung des Schaufelendes bei A, und v_1 gleich und gleich gerichtet der Radgeschwindigkeit zerlegen lassen. Sei Winkel cAv zwischen Strahl und Radumfang α, Winkel c_1Av der Schaufel AB in A mit dem Radumfang gleich β, so ist:

$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2\,c\,v_1 \cos\alpha,$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c},$$

also c_1 und β bestimmt, wenn man c, v_1 und α kennt. Die relative Austrittsgeschwindigkeit wird:

$$c_2^2 = c^2 + v^2 - 2\,c\,v_1 \cos\alpha.$$

Sei δ der Winkel DBc_2 des Schaufelendes B mit dem Radumfang, so ist für die absolute Ausflussgeschwindigkeit w:

$$w^2 = c_2^2 + v^2 - 2\,c_2\,v \cos\delta.$$

Das Arbeitsvermögen $\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma$ soll im Minimum sein, was $v = \delta = 0$ gibt. In der That ist $\delta = 15$ bis $20°$ zu nehmen, um dem abfliessenden Wasser den nöthigen Querschnitt zu geben. Ist dann $c_2 = v$, so hat man:

$$w = 2\,v \sin\frac{\delta}{2},$$

und der Arbeitsverlust:

$$\frac{w^2 Q\gamma}{2g} = \frac{\left(2v \sin\frac{\delta}{2}\right)^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Setzt man $v = c_2$ in den Ausdruck für c_2, so kommt die Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{c}{2\cos\alpha} = \frac{\sqrt{(2g\,h)}}{2\cos\alpha}.$$

Sind r und r_1 die Radhalbmesser CB und CA, so ergibt sich:

$$v = \frac{r}{r_1}\,v_1 = \frac{r\,c}{2r_1\cos\alpha} = \frac{r\sqrt{(2g\,h)}}{2r_1\,\cos\alpha},$$

und der Arbeitsverlust:

$$\frac{w^2\,Q\gamma}{2g} = \left\{\frac{r}{r_1}\,\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\alpha}\right\}^2 Q\,h\,\gamma.$$

Es ist aber die (theoretische) Arbeitsmenge:

$$L = h\,Q\gamma - \frac{w^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Hiervon gehen jedoch wegen der Reibung des Wassers in der Zuleitungsröhre und in den Radcanälen zwei Arbeitsmengen ab, die c und c_2 proportional sind. Seien ζ und ζ_1 also Erfahrungszahlen, so ist dieser Verlust:

$$\frac{\zeta c^2}{2g} + \zeta_1\,\frac{c_2^2}{2g}\,Q\gamma,$$

und die Gesammtarbeit, wenn $\frac{c^2}{2g} = h$ und $c_2 = v$ genommen wird:

$$L = \left\{1 - \frac{r^2\zeta_1}{4\,r_1^2\cos\alpha^2} - \frac{r^2\sin\frac{\delta^2}{2}}{r_1^2\cos\alpha^2}\right\} Qh\gamma,$$

$$\zeta = \zeta_1 = 0{,}05 \text{ bis } 0{,}010.$$

Man hat aber genauer:

$$(1+\zeta)\,c^2 = 2gh,$$

$$(1+\zeta_1)\,c_2^2 = c^2 + v^2 - 2c\,v_1\cos\alpha.$$

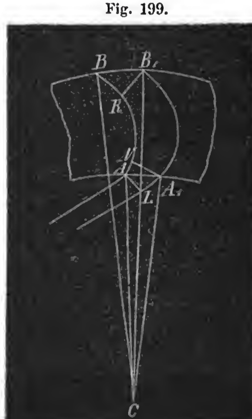
Setzt man:

$$\zeta_1\,c_2^2 = \zeta_1\,v^2 = \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 v_1^2,$$

und annähernd:

$$\zeta_1\,c_2^2 \doteq \zeta_1\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\left(\frac{c}{2\cos\alpha}\right)^2,$$

Fig. 199.



also:

$$v_1 = \left[1 - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{(2\cos\alpha)^2}\right] \frac{c}{2\cos\alpha}.$$

Wegen des Nenners $\cos\alpha$ ist der Einführungswinkel klein zu nehmen, und daher kommt der Name Tangentialrad. Je nachdem das Wasser von innen nach aussen oder umgekehrt geht, unterscheidet man solche mit innerer und äusserer Beaufschlagung.

Ist die Aufschlagemenge Q bekannt, so kann man den Querschnitt F der Ausmündung des Aufschlagreservoirs, den Querschnitt F_1 des Wassers beim Eintritte und F_2 beim Austritte finden. Offenbar ist:

$$Q = Fc = F_1 c_1 = F_2 c_2,$$

also:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{F}{F_1} = \frac{AL}{AN},$$

wo AL und AN (Fig. 199) die Dicken des Strahles vor und nach dem Eintritte bezeichnen. Sei AA_1 der Bogen des Radumfanges, den der durchgehende Strahl einnimmt, so ist:

$$\frac{AL}{AN} = \frac{AA_1 \sin AA_1L}{AA_1 \sin AA_1N} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c},$$

ganz wie oben; aber:

$$\cot\alpha = \cot\beta - \frac{v_1}{c\sin\alpha},$$

und ohne Rücksicht auf die Nebenhindernisse:

$$v_1 = \frac{2}{c\cos\alpha},$$

also:

$$\cot\beta = \cot\alpha - \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \cot 2\alpha, \qquad \beta = 2\alpha,$$

und ausserdem:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{F}{F_2} = \frac{AL}{B_1R} = \frac{AA_1 \sin\alpha}{BB_1 \sin\delta}.$$

B_1R ist die Dicke des Strahles vor dem Austritt, BB_1 der Bogen, den er einnimmt, aber:

$$\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{CA}{CB} = \frac{r_1}{r},$$

also:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{r_1 \sin\alpha}{r\sin\delta},$$

also:

$$\sin\delta = \frac{r_1}{r}\,\frac{c}{v}\sin\alpha = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{c}{v_1}\sin\alpha,$$

also wenn man annähernd setzt:

$$v_1 = \frac{c}{2\cos\alpha},$$

so ist:

$$\sin\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \sin 2\alpha.$$

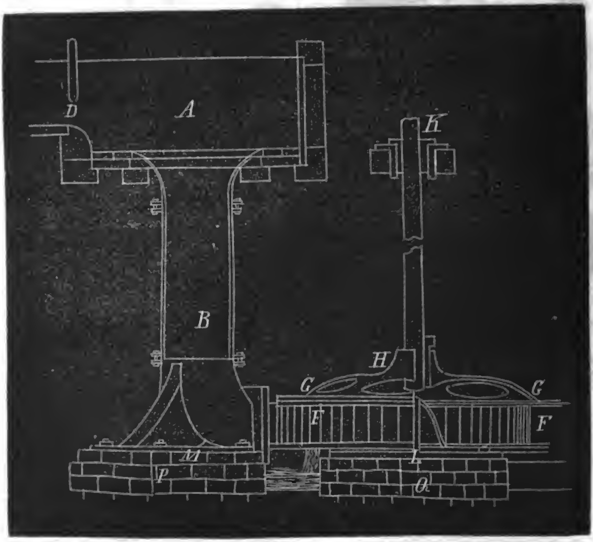
Bei innerer Beaufschlagung ist $\frac{r_1}{r}$ ein echter Bruch, bei äusserer ist $\frac{r_1}{r}$ grösser als 1, also im letzteren Falle δ grösser als im ersteren. Annähernd ist:

$$\sin\frac{\delta}{2} = \tfrac{1}{2}\sin\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \sin\alpha\cos\alpha,$$

also die Leistung:

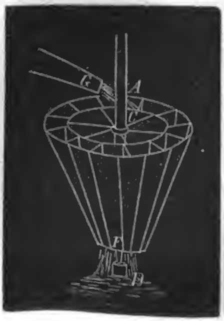
$$L = \left[1 - \zeta - \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{1}{4\cos\alpha^2} - \left(\frac{r_1}{r}\right)^4 \sin\alpha^4\right] Q\,h\,\gamma.$$

Fig. 200.



Da das dritte Glied bei den Rädern mit innerer, das vierte bei denen mit äusserer Beaufschlagung grösser ist, so haben beide ziemlich gleichen Werth.

Fig. 201.



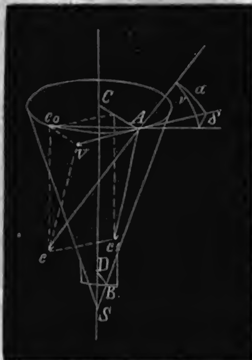
Tangentialräder haben folgende Form. *A* (Fig. 200) ist der Einfallkasten, *B* die Einfallröhre, *C* der Leitschaufelapparat, der aus 3 Kanälen besteht. Schieber *D* dient zum Reguliren des Zuflusses. Das Rad *FF* hat 60 Schaufeln, Teller *GG* und Muffe *H* verbinden es mit der stehenden Welle *KL*, die oben in einem Halslager *K* ausläuft, unten auf einen Stahlstift mittels einer Pfanne *L* gestellt ist. Der Wirkungsgrad dieser Räder ist nach Hülsse 0,46 bis 0,75. — Auch diesen ähnliche Vorrichtungen sind bei Verticalrädern angewandt worden.

6) Danaiden.

Danaiden haben die Form eines umgestürzten Kegels. Sie bestehen (Fig. 201) aus einer stehenden Welle *CD* und zwei Kegelmänteln mit Scheidewänden, durch welche ihr Zwischenraum in Kanäle getheilt ist. Durch Gerinne *G* wird das Aufschlagewasser zugeführt, durch Loch *F* fliesst es unten aus.

Die Scheidewände sind entweder Ebe-

Fig. 202.



nen oder Schraubenflächen. Zuweilen fehlt der äussere Mantel ganz, und das Rad ist in eine conische Radstube gestellt.

Sei wieder $Ac = c$ (Fig. 202) die Eintrittsgeschwindigkeit, ihre Abweichung cAv von der Umfangsgeschwindigkeit v gleich α, $Ac_1 = c_1$ die relative Geschwindigkeit, so ist:

$$c_1^2 = c^2 - v^2.$$

Das Wasser sinkt nun in der Höhe $CD = h_1$ herab, bis zur Radaxe, deren Umfangsgeschwindigkeit fast Null ist. Also setzt man $v_1 = 0$, so ist für die relative Geschwindigkeit c_2 beim Abflusse:

$$c_2^2 = c_1^2 + 2g\,h_1 - v^2 = c^2 + 2g\,h_1 - 2\,v^2,$$

oder wenn $h = \frac{c^2}{2g} + h_1$ das ganze Gefälle ist:

$$c_2^2 = 2g\,h - 2\,v^2.$$

Nun soll c_2 noch gleich Null sein, was:

$$v = \sqrt{(2g\,h)}$$

gibt. Die Leistung ist dann:

$$L = Q\,h\,\gamma.$$

Da aber c_2 und v_1 nicht völlig verschwinden, so ist die absolute Abflussgeschwindigkeit:

$$w = \sqrt{(c_2^2 + v_1^2)},$$

und von der Leistung geht noch ab:

$$\frac{w^2}{2g}\,Q\gamma = \frac{c_2^2 + v_1^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Sei $ASC = \vartheta$ der halbe Scheitelwinkel des Kegels, $90 - \vartheta$ also die Neigung der Fläche gegen den Horizont, ferner $cAv = \alpha$ der Winkel des eintretenden Strahls gegen die Umfangsgeschwindigkeit bei A, und $cAc_0 = r$ der Neigungswinkel des Strahls gegen den Horizont, dann ist:

$$c \sin r = c_1 \cos \vartheta = c \sin \alpha \cos \vartheta,$$

also:

$$\sin r = \sin \alpha \cos \vartheta,$$

und für Winkel $vAc_0 = \delta$ der Horizontalprojection der Strahlrichtung gegen die Radgeschwindigkeit ergibt sich:

$$v \operatorname{tg} \delta = v \operatorname{tg} \alpha \sin \vartheta,$$

also:

$$\operatorname{tg} \delta = \sin \vartheta \operatorname{tg} \alpha.$$

Wenn der obere Theil des Rades kreisförmig ist, so hat man ebene Schaufeln, also:

$$\vartheta = 90, \text{ und somit } \nu = 0,\ \delta = \alpha,$$

also der Strahl ist horizontal einzuführen. Ist dagegen der obere Theil cylindrisch, so ist:

$$\vartheta = 0,\quad \nu = \alpha,\quad \delta = 0,$$

also der Strahl tangential einzuführen.

Sei $CA = r$ der obere, $DB = r_1$ der untere Umfangshalbmesser, so ist die innere Umfangsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{r_1 v}{r}.$$

Sei r_2 der Wellenhalbmesser, so ist der Querschnitt der Ausmündung:

$$F_2 = \pi\,(r_1^2 - r_2^2),$$

also die relative Ausflussgeschwindigkeit:

$$c_2 = \frac{Q}{F_2} = \frac{Q}{\pi\,(r_1^2 - r_2^2)},$$

und es ergibt sich hieraus der Arbeitsverlust:

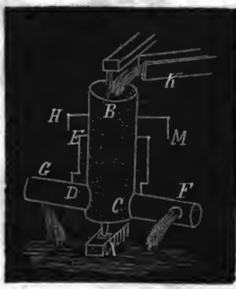
$$\frac{c_2^2 + v_1^2}{2g}\,Q\gamma.$$

7) Reactionsräder.

Ein Rad mit Ausflussröhren, durch welche das Wasser fortwährend abfliesst, bewirkt eine Umdrehung in der dem Ausflusse entgegengesetzten Richtung. Das **einfache Reactionsrad** hat nur eine solche Röhre.

Eine Einfallröhre (Fig. 203), welche bei B vertical aufgebogen ist, leitet das Wasser von unten zu. Die Welle AC mit den Schwungröhren CF und CG ist hohl, ihr Ende B passt in die Einfalls-

Fig. 203.



röhre. Eine Stopfbüchse bei B dient dazu, dass sich die Welle drehen kann, ohne Wasser durchzulassen. Die Seitenöffnungen F und G können durch Schieber verschlossen werden, welche durch Stangen und den Winkelhebel D mit einer Hülse E verbunden, durch Hebel HM gehoben und gesenkt werden. Bei K befindet sich das Transmissionsrad. Diese Einrichtung, dass das Wasser von unten kommt, bewirkt, dass die Maschine vom Wasser getragen wird, und keine Reibung an der Basis stattfindet.

Ist G das Gewicht der Maschine, h die Druckhöhe, $2r$ die Weite der Steigröhre, so ist:

$$G = \pi r^2 h\gamma, \quad r = \sqrt{\frac{G}{\pi h\gamma}}.$$

Ist v die Umdrehungsgeschwindigkeit, und h_1 die Druckhöhe des Wassers an der Mündung, so ist:

$$2g\,h_1 = 2g\,h + v^2,$$

also:

$$c = \varphi\,\sqrt{(2g\,h_1)} = \varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)},$$

wo φ der Geschwindigkeitscoefficient ist. w ist die absolute Geschwindigkeit beim Austritt; da Rad und Wasser die Geschwindigkeit v gemein haben, ist:

$$w = c - v = \varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)} - v,$$

also der Arbeitsverlust.

$$L_1 = \frac{[\varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)}-v]^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Die Nutzleistung ist, wenn $\varphi = 1$ gesetzt wird:

$$L = \left(h - \frac{w^2}{2g}\right) Q\gamma$$

$$= \frac{v\,\sqrt{(2g\,h+v^2)} - v^2}{g}\,Q\gamma,$$

sie wächst also mit v. — Belastet man die Maschine so, dass die Geschwindigkeitshöhe, welche der Umfangsgeschwindigkeit entspricht, dem Gefälle gleich, also $v^2 = 2g\,h$ ist, so hat man:

$$L = 2\,(\sqrt{2}-1)\,Qh\gamma,$$

$$= 0{,}828\,Qh\gamma,$$

und für $v = \infty$ ist:

$$L = Qh\gamma.$$

Es kommt also schon in diesem ersteren Falle die Leistung der nicht herzustellenden Maximalleistung nahe gleich. Für $v^2 = 4g\,h$ erhält man 0,944 der Maximalleistung.

Berücksichtigt man den Ausflusswiderstand, d. h. setzt man nicht $\varphi = 1$, so kommt:

$$c = \varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)} = \sqrt{\frac{2g\,h+v^2}{1+\zeta}}, \quad Q = Fc,$$

also:

$$L = [\varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)} - v]\,\frac{v\,Q\gamma}{g}.$$

F ist hier die Inhaltssumme der Ausmündungen.

Ist Q gegeben, so kommt:

$$L = \left(\frac{Q}{F} - v\right)\frac{vQ\gamma}{g},$$

also der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L}{Qh\gamma} = \left(\frac{Q}{F} - v\right)\frac{v}{gh}.$$

Soll dies ein Maximum sein, so erhält man:

$$v^4 + 2g\,h\,v^2 = \frac{\varphi^2\,g^2\,h^2}{1-\varphi^2},$$

woraus sich v ergibt. Es kommt dann:

$$\eta = 1 - \sqrt{(1-\varphi^2)},$$

und die effective Maximalleistung:

$$L = \eta\,Qh\gamma,$$

wo:

$$Q = \varphi\,Fc = F\,\sqrt{(2g)}\,\sqrt{\frac{1+\sqrt{(1-\varphi^2)}}{\sqrt{(1-\varphi^2)}}}.$$

Die Reactionskraft aber ist:

$$P = \frac{L}{v} = [\varphi\,\sqrt{(2g\,h+v^2)} - v]\,\frac{Q\gamma}{g}.$$

Die Withelaw'schen oder schottischen Turbinen unterscheiden sich von den eben behandelten durch ihre krummen Schwungröhren, deren gewöhnlich drei vorhanden sind. Ihre Ausmündung kann erweitert und verengt werden.

Die Combes'schen Räder haben eine grössere Anzahl Schaufeln, oft auch Leitschaufeln.

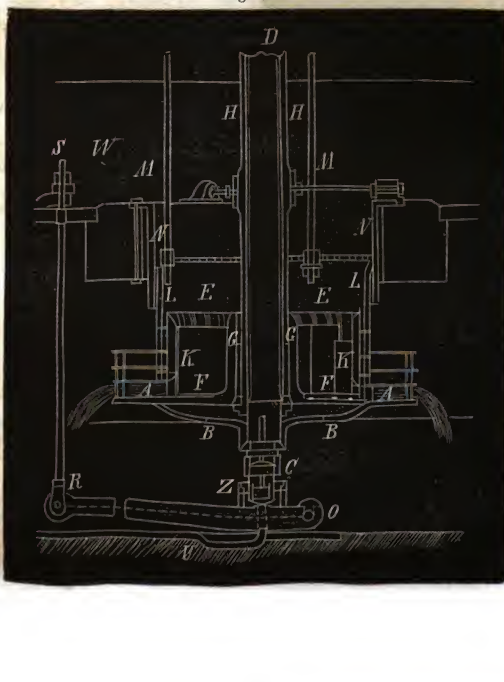
Bei den Cadiat'schen und Fourneyron'schen kommt das Wasser von oben. Die ersteren haben eine das Rad umschliessende kreisförmige Schütze; die letzteren sind mit Leitschaufeln versehen.

Bei allen diesen Rädern fliesst das Wasser von innen nach aussen, bei den Francis'schen Turbinen aber von aussen nach innen.

8) Fourneyron'sche Turbinen.

Die vollkommensten Turbinen sind die Fourneyron'schen. Sie gehen entweder in freier Luft oder unter Wasser, und sind Nieder- und Hochdruckturbinen. Bei den Niederdruckturbinen fliesst das Wasser mit freier Oberfläche in das oben offene Ausflussreservoir, bei den Hochdruckturbinen ist letzteres verschlossen, und eine Einfallröhre führt das Wasser von der Seite zu. Die letzteren kommen bei grossem Gefälle in Anwendung. Das Rad *AA* besteht aus zwei horizontalen Kränzen auf einem gusseisernen Teller *BB* und einer stehenden Welle *CD* (Fig. 204); das bei *W* zufliessende Wasser tritt in das Reservoir *EE*. Um den Druck auf den Radteller zu vermeiden, ist die Radwelle von einer Röhre *GH* umschlossen, an deren unterem Ende ein Bodenteller *EF* eingesetzt ist, welcher den Wasserdruck aufnimmt. Auf diesen sind cylindrisch gebogene Leitschaufeln von Blech eingesetzt (nach innen), zwischen den Radkränzen befinden sich die Radschaufeln (nach aussen). Das auffliessende Wasser erhält durch die Leitschaufeln eine bestimmte Richtung, mit welcher es zu dem Rade *AA* gelangt, dessen Zellen es von innen nach aussen durchläuft und seine Reaction ausübt. Zum Reguliren

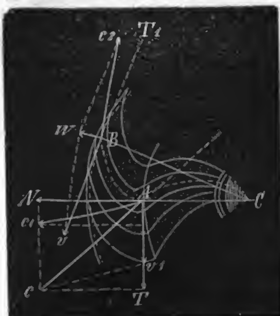
Fig. 204.



dient ein cylindrisches Schutzbrett $KLLK$, welches durch drei Stangen M gehoben werden kann. Die Schütze KL besteht aus einem gusseisernen Cylinder, dessen äussere Oberfläche die innere Seite des oberen Radkranzes fast berührt. Ein Lederstulp LL verhindert, dass Wasser zwischen die Schütze und den Cylinder NN tritt. Auf die Innenfläche der Schütze sind Holz- oder Metallstücke KK eingeschraubt, ihr Zweck ist die Vermeidung der Contraction. Bei Hochdruckturbinen gehen die Schützenstangen durch Stopfbüchsen im Deckel des Reservoirs, oder sie ergreifen die Schütze von aussen. Auch kann man durch Heben und Senken des Bodentellers F reguliren.

Um die Leistung der Fourneyron'schen Turbinen zu ermitteln, sei $CA = r$ (Fig. 205) der innere Halbmesser des Reser-

Fig. 205.



voirs, $CB = r$ der äussere, die innere und äussere Umfangsgeschwindigkeit bezüglich v_1 und v, c die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus dem Leitschaufelapparat tritt, c_1 die relative Geschwindigkeit beim Eintritt in die Radkanäle, c_2 die Zelle beim Austritt, der Winkel cAT des aus dem Reservoir tretenden Wassers mit dem inneren Radumfange sei $= \alpha$, der Winkel c_1AT des in die Zelle eintretenden Wassers mit dem letzteren $= \beta$, Winkel c_2BT_1 des aus den Zellen tretenden Wassers mit dem äusseren Radumfange $= \delta$, F der Inhalt aller Ausflussöffnungen der Leitschaufeln, F_1 der aller Eintrittsöffnungen ins Rad, F_2 der Inhalt aller Ausflussöffnungen am äusseren Radumfange. Das Radgefälle vom Oberwasser bis zur Mitte der Ausmündung des Rades oder bis zur Oberfläche des Unterwassers, wenn das Rad unter Wasser geht, sei h, die Höhe des Oberwassers über der Mitte der Ausmündungen des Reservoirs $= h_1$, und $h_2 = h_1 - h$, endlich sei x die Druckhöhe des Wassers da, wo es ins Rad tritt, dann ist:

$$c^2 = 2g\,(h_1 - x),$$

ohne Rücksicht auf Widerstände, und bei Berücksichtigung derselben:

$$(1+\zeta)\,c^2 = 2g\,(h_1 - x),$$

also:

$$x = h_1 - (1+\zeta)\,\frac{c^2}{2g}.$$

Es soll kein Stoss stattfinden, also die Geschwindigkeit c_1 muss sich in 2 andere zerlegen, deren eine die Radgeschwindigkeit v_1 ist, und die andere mit dem in den Radkanal eintretenden Strahl dieselbe Richtung hat. Hieraus folgt:

$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2c\,v_1 \cos\alpha.$$

Ausserdem erhält man bei Berücksichtigung der Centrifugalkraft:

$$c_2^2 = 2g\,(x - h_2) + c_1^2 + v^2 - v_1^2,$$

oder wenn man x und c_1 einsetzt:

$$c_2^2 = 2gh + v^2 - 2c\,v_1 \cos\alpha - \zeta c^2.$$

Sei noch $\frac{\zeta_1 c_2^2}{2g}$ der Arbeitsverlust wegen der Reibung und der krummlinigen Bewegung des Wassers, so kommt:

$$(1+\zeta_1)\,c_2^2 = 2g\,h + v^2 - 2c\,v_1 \cos\alpha - \zeta c^2.$$

Es ist noch:

$$Q = Fc = F_1\,c_1 = F_2\,c_2,$$

ausserdem:

$$r\,v_1 = r_1\,v,$$

also:

$$\left[1 + \zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] c_2^2$$

$$+ 2\,\frac{F_2}{F}\,\frac{r_1}{r}\,c_2\,v \cos\alpha - v^2 = 2g\,h.$$

Die absolute Geschwindigkeit beim Austritt muss ein Maximum sein. Dieselbe bildet die Resultante w aus c_2 und v, also:

$$w = \sqrt{(c_2^2 + v^2 - 2\,c_2\,v \cos\delta)},$$

also es muss $c_2 = v$ und δ möglichst klein sein, doch darf die letztere Grösse nicht unter 10 bis 20° betragen, damit eine hinreichende Wassermenge zufliesst. $c_2 = v$ gibt aber:

$$w = 2 v \sin \frac{\delta}{2}.$$

(Wegen der Nebenhindernisse ist c_2 sogar noch etwas kleiner als v zu nehmen, wenn die Leistung möglichst gross sein soll.) Aus dem Obigen folgt nun:

$$\left[2 \frac{F_2}{F} \frac{r_1}{r} \cos \alpha + \zeta \left(\frac{F_2}{F}\right)^2 + \zeta_1\right] v^2 = 2 g h,$$

woraus sich v ergibt.

Soll der Eintritt ungestört sein, so darf sich die absolute Geschwindigkeit c beim Eintritte nicht ändern. Es ist also die radiale Componente:

$$AN = c \sin \alpha = c_1 \sin \beta,$$

und die tangentiale:

$$AF = c \cos \alpha = c_1 \cos \beta + v_1.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{c_1}{c} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}, \quad \frac{c}{v_1} = \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

und da:

$$Fc = F_2 c_2 = F_2 c = \frac{r}{r_1} F_2 v_1,$$

$$\frac{F_2}{F} = \frac{r_1}{r} \frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

also auch:

$$\frac{2gh}{v^2} = 2 \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin \beta \cos \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} + \zeta \left(\frac{r_1 \sin \beta}{r \sin (\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1,$$

woraus sich v und mittels:

$$r v_1 = r_1 v$$

auch v_1 ergibt.

Berücksichtigt man die Nebenhindernisse nicht, so kommt:

$$v_1 = \sqrt{gh (1 - \operatorname{tg} \alpha \cot \beta)}.$$

Es ist noch der Druck des Wassers beim Uebergange ins Rad zu bestimmen. Man erhält leicht:

$$x = h_1 - \frac{(1 + \zeta) h}{1 + \cos 2\alpha + \cot \beta \sin 2\alpha + \zeta + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \left(\frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \beta}\right)^2}.$$

Geht die Turbine unter Wasser, so ist $h_1 = h + h_2$ (ebenso auch bei den Cadiat- und Whitelaw'schen Turbinen), also ohne Berücksichtigung der Nebenhindernisse:

$$x = \frac{\cos 2\alpha - \cot \beta \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha - \cot \beta \sin \alpha} h + h_2.$$

Wenn sie aber in freier Luft geht, so ist hier $h_2 = 0$ zu setzen. Soll im letztern Falle der Druck dem atmosphärischen gleich sein, so ist $x = 0$, und soll er im ersteren dem Druck des Unterwassers gegen die Radmündung gleich sein, so ist $x = h_2$. Also in beiden Fällen:

$$\beta = 2\alpha.$$

Ist $\beta \gtrless 2\alpha$, so ist der innere Druck bezüglich grösser oder kleiner als der äussere. Berücksichtigt man aber die Nebenhindernisse, so kommt:

$$\cot \beta \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 (\cos \alpha - \cot \beta \sin \alpha)^2.$$

Im letzten Gliede kann man annähernd $\beta = 2\alpha$ setzen, dann kommt:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + \zeta_1 \frac{r^2}{(2 r_1 \cos \alpha)^2}},$$

also β etwas kleiner als 2α.

Ohne Berücksichtigung von ζ und ζ_1 kommt:

$$v_1 = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2} gh)}}{\cos\alpha}, \quad c = \sqrt{(2gh)}.$$

Soll der innere Druck grösser, bezüglich kleiner als der äussere sein, so ist zu nehmen:

$$v_1 \gtrless \frac{\sqrt{(\frac{1}{2} gh)}}{\cos\alpha}, \quad c \lesseqgtr \sqrt{(2gh)}.$$

Dass der innere Druck dem äusseren gleich sei, ist darum wichtig, weil die Uebergangstelle zwischen Rad und Reservoir nicht abgedichtet ist, also im entgegengesetzten Falle Luft oder Wasser eindringt. Macht man aber diese Bedingung nicht, so sind auch α und β nicht völlig willkürlich. Die Formel:

$$v_1 = \sqrt{gh(1 - \operatorname{tg}\alpha \cot\beta)}$$

zeigt, dass nicht gleichzeitig $\alpha \lesseqgtr 90$ und $\beta \lesseqgtr \alpha$ sein kann. Die Formel:

$$c = \frac{v_1 \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

gibt für $\beta < \alpha$ negativen Werth, also auch dieser ist auszuschliessen. Es muss also sein:

$$\beta > \alpha, \qquad \alpha < 90.$$

Fourneyron nimmt $\alpha = 30$ bis $38°$ und $\beta = 90°$. Am gerathensten ist, $\beta = 100$ bis $120°$, $\alpha = 30$ bis $40°$ zu nehmen.

Sei a noch die Luftdruckhöhe, so darf $a + x$ nicht negativ sein, da sonst Luft vom äussern Radumfange eintritt. Setzt man daher $x = -a$ in die Formel für x ein, so kommt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(h+a)\sin 2\alpha}{(h+a)\cos 2\alpha + a},$$

und die entsprechende vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit:

$$v_1 = \frac{h}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{2(h+a)}}.$$

9) Turbinen ohne Leitschaufeln.

Bei den Turbinen ohne Leitschaufeln, wo das Wasser radial ausfliesst, ist $\alpha = 90°$ zu setzen. Dies findet bei den Turbinen von Combes, Cadiat und Whitelaw statt. — Es wird hier die vortheilhafteste Geschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\zeta \operatorname{tg}\beta^2 + \zeta_1 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}}.$$

Ohne Berücksichtigung der Nebenhindernisse wäre $v_1 = \infty$. Indess hat die Geschwindigkeit ihre Grenze, wenn die disponible Arbeit gleich den Widerständen, also wenn:

$$Qh\gamma = Q\gamma\left(\frac{w^2}{2g} + \frac{\zeta c^2}{2g} + \zeta_1 \frac{c_2^2}{2g}\right),$$

also wenn:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{\left(2\sin\frac{\delta}{2}\right)^2 + \zeta\left(\frac{r_1}{r}\operatorname{tg}\beta\right)^2 + \zeta_1}},$$

und auch dann, wenn:

$$x = -a, \quad \text{d. h.} \quad h - \frac{c^2}{2g} = -a,$$

also:

$$v = \frac{r}{r_1} \cot\beta \sqrt{2g(a+h)}$$

ist. Diese Werthe dürfen also nicht überschritten werden.

Uebrigens beträgt der Verlust wegen der Nebenhindernisse wenigstens fünf Prozent. Man kann nämlich bei den Rädern von Combes und Cadiat $\zeta = 0{,}05$, bei denen von Withelaw $\zeta = 0{,}1$, und allgemein $\zeta_1 = 0{,}1$ setzen.

Setzt man $\beta = 60^\circ$, $\frac{r}{r_1} = \frac{1}{2}$, so ist für die ersteren Räder:

$$v_1 = 1{,}75 \sqrt{(2gh)},$$

und für die letzteren:

$$v_1 = 1{,}45 \sqrt{(2gh)}.$$

Um den Stoss beim Eintritt zu vermeiden, ist noch zu setzen:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{r_1}{r} \operatorname{tg}\beta,$$

wo F_2 durch den Schützenstand bestimmt wird.

10) Grösste Leistung.

Die Arbeit welche die Nebenhindernisse erfordern, war:

$$(\zeta c^2 + \zeta_1 c_2^2) \frac{Q\gamma}{2g},$$

und die lebendige Kraft des fortfliessenden Wassers:

$$\frac{w^2}{2g} Q\gamma = \frac{Q\gamma}{2g} (c_2^2 + v^2 - 2c_2 v \cos\delta),$$

also die Radleistung:

$$L = (cv_1 \cos\alpha + c_2 v \cos\delta - v^2) \frac{Q\gamma}{g},$$

wie man erhält, wenn man die Gleichung:

$$2gh + v^2 - 2cv_1 \cos\alpha - \zeta c^2 = (1+\zeta_1) c_2^2$$

berücksichtigt.

Wegen des Werthes von c:

$$c = \frac{v_1 \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{r_1}{r} \frac{v \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

ist aber:

$$c_2^2 = \frac{2gh + \psi v^2}{1+\zeta_1},$$

wo gesetzt ist:

$$1 - 2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} - \zeta\left(\frac{r_1}{r} \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)^2 = \psi.$$

Setzen wir noch:

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin\beta \cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} = \varphi,$$

so ist auch:

$$cv_1 \cos\alpha = \varphi v^2,$$

$$c_2 v \cos\delta = \frac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\zeta_1)}} v \sqrt{(2gh + \psi v^2)},$$

also, wenn:

$$\frac{(1-\varphi)\sqrt{(1+\zeta_1)}}{\cos\delta} = \chi$$

gesetzt wird:

$$L=\frac{\cos\delta\, Q\gamma}{g\sqrt{(1+\zeta_1)}}\,[\sqrt{(2gh+\psi v^2)}-\chi v]\,v.$$

Dieser Ausdruck ist ein Maximum, wenn:

$$v^4+\frac{2gh}{\psi}\,v^2=\frac{g^2h^2}{\psi(\chi^2-\psi)},$$

woraus sich v ergibt. (Es reicht nämlich wegen der Nebenhindernisse hier nicht aus, $w=0$ zu setzen, namentlich dann nicht, wenn α nahe $=90°$ ist.) In diesem Falle wird die Maximalleistung:

$$L=\frac{\chi-\sqrt{(\chi^2-\psi)}}{\psi}\,\frac{\cos\delta}{\sqrt{(1+\zeta_1)}}\,Qh\gamma.$$

Es ist dann zu setzen:

$$c=\frac{v_1\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},\quad c_1=\frac{c\sin\alpha}{\sin\beta},\quad c_2=\sqrt{\frac{\chi+\sqrt{(\chi^2-\psi)}}{(1+\zeta_1)\sqrt{(\chi^2-\psi)}}\,gh},$$

$$F=\frac{Q}{c},\quad F_1=\frac{Q}{c_1},\quad F_2=\frac{Q}{c_2}.$$

Fehlen die Leitschaufeln, so ist:

$$\alpha=90°,\quad \psi=1-\zeta\left(\frac{r_1}{r}\operatorname{tg}\beta\right)^2,\quad \chi=\frac{\sqrt{(1+\zeta_1)}}{\cos\delta}.$$

11) **Etagenräder, Stellapparate.**

Bei ober- und mittelschlächtigen Rädern wird bei geringen Arbeits- oder Wassermengen der Wirkungsgrad vermehrt, wenn die Schütze tiefer gestellt wird, da die Zellenfüllung dann geringer ist. Bei den Turbinen aber wird er in diesem Falle vermindert, weshalb sie den obigen Rädern nachstehen. Der Grund hiervon ist folgender. — Wir zerlegen c und c_1 in eine radiale und eine tangentiale Componente, bezüglich:

$$c\sin\alpha,\qquad c_1\sin\beta,\qquad c\cos\alpha,\qquad c_1\cos\beta.$$

Es ist also die relative Geschwindigkeit nach beiden Richtungen:

$$c\sin\alpha-c_1\sin\beta,\quad c\cos\alpha-c_1\cos\beta-v_1,$$

und deshalb der Verlust an Druckhöhe:

$$y=\frac{1}{2g}\,[(c\sin\alpha-c_1\sin\beta)^2+(c\cos\alpha-c_1\cos\beta-v_1)^2],$$

und an Leistung:

$$Y=y\,Q\gamma,$$

Setzen wir hierin:

$$c_2=v,\quad v_1 r=v r_1,\quad cF=vF_2,\quad c_1F_1=vF_2,$$

so kommt:

$$Y=\left[\left(\frac{F_2}{F}\sin\alpha-\frac{F_2}{F_1}\sin\beta\right)^2+\left(\frac{F_2}{F}\cos\alpha-\frac{F_2}{F_1}\cos\beta-\frac{r_1}{r}\right)^2\right]\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Wenn die Schütze nicht völlig geöffnet ist, so wird den Gleichungen:

$$F_1\sin\alpha=F\sin\beta,\qquad F_1\cos\alpha=F\cos\beta+\frac{FF_1}{F_2}\,\frac{r_1}{r}$$

nicht mehr entsprochen. Setzt man f für F in den Werth von Y, indem man F so bestimmt, dass es den beiden letzten Gleichungen genügt, und setzt übrigens:

$$c_2=v=\sqrt{\frac{gh\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\alpha}},$$

so kommt:

$$Y=\left(\frac{F_2}{f}-\frac{F_2}{F}\right)^2\frac{v^2}{2g}\,Q\gamma.$$

Sei z. B. $\frac{v_1^2}{2g} = \frac{1}{2}$, wie dies bei den Fourneyron'schen Turbinen statthaft ist, so wird:

$$Y = \left(\frac{F_2}{f} - \frac{F_2}{F}\right)^2 \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 \frac{Qh\gamma}{2},$$

also bei halb geöffneter Schütze, wo $f = \frac{F}{2}$ ist:

$$Y = \tfrac{1}{2}\, Qh\gamma \left(\frac{F_2 r}{F r_1}\right)^2.$$

Dieser Verlust wird vermindert, wenn $\frac{F_2}{F}$ und $\frac{r}{r_1}$ klein sind, also wenn die Ausmündung und der äussere Halbmesser des Rades ab-, die des Reservoirs aber zunehmen. Wegen:

$$\frac{F_2}{F} = \frac{r_1 \sin\beta}{r \sin(\beta - \alpha)},$$

hat man in diesem Falle noch:

$$Y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}\right)^2 Qh\gamma,$$

also für:

$$\alpha = 40^\circ, \quad \beta = 90^\circ:$$
$$Y = 0{,}57\, Qh\gamma,$$

so dass 57 Procent der Leistung verloren gehen.

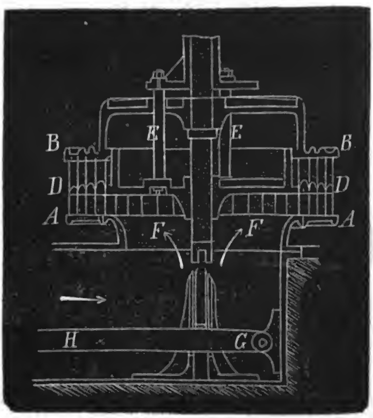
Dieser Verlust wird vermindert bei den Etagenrädern. Sie unterscheiden sich von andern Turbinen dadurch, dass sie durch einen oder zwei ringförmige Scheidewände in zwei oder drei Räume getheilt sind. Bei tieferem Schützenstande sind dann eine oder zwei Abtheilungen geschlossen.

Noch besser ist der Stellapparat von Combes. Zwischen beiden Radkränzen *AA* und *BB* (Fig. 206) befindet sich der Teller *DD*, der durch Stangen *EE* gehoben und gesenkt werden kann, so dass das bei *FF* zuströmende Wasser immer den Raum *AD* vollständig ausfüllt. Aehnliche Constructionen geben Laurent und Deckherr, ferner Callon und Gentilhomme.

12) Vergleich zwischen Reactions-, Druck- und Stossturbinen.

Reactionsturbinen gehen in Stoss- und Druckturbinen dann über, wenn die Schütze die grössere Hälfte der Radweite verschliesst. Das Wasser füllt dann die Radcanäle nur zum Theil, geht also die Turbine in freier Luft, so ist der übrige Theil mit Luft gefüllt, der Druck vor dem Rade ist der atmosphärische, die Geschwindigkeit $c = \sqrt{(2gh)}$ von dem Gange des Rades unabhängig. Die Austrittsgeschwindigkeit ist dann:

Fig. 206.



$$c_2^2 = 2g\,h + v^2 - 2c\,v_1 \cos\alpha,$$

und für die grösste Leistung $c_2 = v$ also:

$$2c\,v_1 \cos\alpha = 2g\,h, \quad v_1 = \frac{\sqrt{(2g\,h)}}{2\cos\alpha}.$$

Für Reactionsturbinen aber ist:

$$v_1 = \sqrt{2g\,h\,(1 - \operatorname{tg}\alpha \cot\beta)},$$

und beide Bedingungen fallen zusammen, wenn $\beta = 2\alpha$ ist.

Was die Leistungen beider Arten von Turbinen anbetrifft, so stellt sich bei den Reactionsturbinen ein kleinerer Wirkungsgrad heraus, wenn man die Schütze tiefer stellt; geht dies aber so weit, dass die Turbine eine Druckturbine wird, so nimmt derselbe plötzlish wieder zu, weil der durch die Geschwindigkeitsveränderung herbeigeführte Arbeitsverlnst nun wegfällt. Bei weiterer Tiefstellung nimmt dann der Wirkungsgrad wieder ab.

Somit wären die Druckturbinen vortheilhafter, indess ist dies aus anderen Gründen nur dann der Fall, wenn die Wassermengen sehr veränderlich sind und die Turbine nicht unter Wasser läuft. Denn da das eintretende Wasser einen weiteren Raum findet, als für seine Geschwindigkeit passt, so nimmt es unregelmässige Bewegungen an, und verliert einen Theil seines Arbeitsvermögens durch besondere Widerstände. Turbinen unter Wasser sind nur Reactionsturbinen.

13) Leistung der Reactionsturbinen.

Man hat:

$$L = Q h\,\gamma$$

das disponible Arbeitsquantum, wo h das Gefälle ist. Der Druckhöhenverlust ist:

$$h_1 = \frac{\zeta c^2}{2g}$$

beim Durchgange durch die Leitschaufeln,

$$h_2 = \frac{\zeta_1 c_2^2}{2g}$$

beim Durchgange durch die Radcanäle. Weissbach setzt:

$$\zeta = \zeta_1 = 0{,}05 \quad \text{bis} \quad 0{,}1.$$

Hierzu kommt noch die Geschwindigkeitshöhe:

$$h_3 = \frac{w^2}{2g}$$

des abfliessenden Wassers. Es ist also die effective Leistung:

$$L_1 = (h - h_1 - h_2 - h_3)\,Q\gamma = \left(h - \frac{\zeta c^2 + \zeta_1 c_2^2 + w^2}{2g}\right) Q\gamma.$$

Für den vortheilhaftesten Gang ist zu setzen:

$$c_2 = v, \quad w = 2v \sin\frac{\delta}{2},$$

also wegen $c\,r_1 \sin\alpha = c\,r_2 \sin\delta$:

$$c = \frac{r \sin\delta}{r_1 \sin\alpha}\,c_2 = \frac{r \sin\delta}{r_1 \sin\alpha}\,v.$$

Sei noch $\zeta_1 = \zeta$, so ist:

$$L_1 = \left\{1 - \left(\zeta\left[1 + \left(\frac{r \sin\delta}{r_1 \sin\alpha}\right)^2\right] + 4\sin\frac{\delta^2}{2}\right)\frac{v^2}{2gh}\right\} Q h\,\gamma,$$

und der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{L_1}{L} = \frac{L_1}{Q h \gamma}.$$

Es war aber:

$$\frac{v^2}{2gh} = \frac{1}{\zeta\left[1+\left(\frac{r_1 \sin\beta}{r \sin(\beta-\alpha)}\right)^2\right]+2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}},$$

und:

$$c = \frac{r_1 \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{r_1}{r}\frac{v \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{r \sin\delta_1 v}{r_1 \sin\alpha},$$

also:

$$\sin\delta = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

und daher:

$$\frac{v^2}{2gh} = \frac{1}{\zeta\left[1+\left(\frac{r\sin\delta}{r_1\sin\alpha}\right)^2\right]+2\cot\alpha\sin\delta},$$

$$\eta = 1 - \frac{\zeta\left[1+\left(\frac{r\sin\delta}{r_1\sin\alpha}\right)^2\right]+4\sin\frac{\delta^2}{2}}{\zeta\left[1+\left(\frac{r\sin\delta}{r_1\sin\alpha}\right)^2\right]+2\cot\alpha\sin\delta}.$$

Es ist aber noch der Arbeitsverlust abzuziehen, welcher durch die Reibung am Radstifte entsteht. Sei G das Turbinengewicht, r_2 der Zapfenhalbmesser, φ der Reibungscoefficient, so ist dieser Verlust:

$$L_2 = \tfrac{2}{3}\,\varphi\, G\,\frac{r_2 v}{r}.$$

Ist die Beaufschlagung eine äussere, so sind übrigens v und v_1, r und r_1 zu vertauschen.

h ist bei Turbinen, welche unter Wasser gehen, vom Oberwasser- zum Unterwasserspiegel, von solchen, die in freier Luft gehen, vom Oberwasser bis zur Mitte der Ausmündungen des Rades zu nehmen.

Wegen der Bewegungshindernisse ist nicht genau $c_2 = v$ für den vortheilhaftesten Gang, um so mehr, wenn Stoss stattfindet. Sehen wir also von der vortheilhaftesten Geschwindigkeit ab, nehmen aber an, dass die Schütze ganz offen sei, also:

$$Fc = F_1 c_1, \quad c\sin\alpha = c_1 \sin\beta,$$

und es ergibt sich wieder:

$$\left[1+\zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2+\zeta_1\right]c_2^2 + 2\frac{F_2}{F}\frac{r_1}{r}c_2 v\cos\alpha - v^2 = 2g(h-y),$$

oder:

$$\left[1+\zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2+\zeta_1\right]c_2^2 + \left[\left(\frac{F_2\cos\alpha}{F} - \frac{F_2\cos\beta}{F_1}\right)c_2 - \frac{r_1}{r}v\right]^2$$
$$+2\frac{F_2}{F}\frac{r_1}{r}c_2 v\cos\alpha - v^2 = 2gh,$$

woraus sich c_2 in v ergibt. Bestimmt man c, so ist:

$$L_1 = \left(h - y - \frac{\zeta c^2 + \zeta_1 c_1^2 + w^2}{2g}\right)Q\gamma = Q\gamma\left\{h - \frac{1}{2g}\left[\zeta\left(\frac{F_2}{F}\right)^2+\zeta_1\right]^2 c_2^2\right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{F_2\cos\alpha}{F} - \frac{F_2\cos\beta}{F_1}\right)c_2 - \frac{r_1}{r}v\right]^2 + (c_2^2 - 2c_2 v\cos\delta + v^2)\right\}.$$

Geht das Rad unbelastet mit Geschwindigkeit v_0 um, so ist $L_1 = 0$, und wenn man die Gleichung für c_2 berücksichtigt:

$$v_0 = \left(\frac{F_2}{F}\frac{r_1}{r}\cos\alpha + \cos\delta\right)c_2.$$

Der Werth von c_2, der sich hieraus ergibt, ist in die Gleichung $L_1 = 0$ zu setzen, wodurch man v_0 erhält.

14) Anordnung der Leitschaufelturbinen.

Es ist entweder Q und h gegeben, oder h und L, woraus dann $Q = \frac{L}{\eta h \gamma}$ folgt. (η ist ungefähr 0,75 zu setzen.) α ist beliebig, man nimmt ihn, wie gezeigt, gleich 20 bis 30°. Soll das Wasser ohne Druck eintreten, so ist $\beta = 2\alpha$. Damit aber beim Tieferstellen der Schütze der Druck nicht negativ wird, ist zu setzen:

$$\beta = 2\alpha + 20^\circ \quad \text{bis} \quad 2\alpha + 40^\circ.$$

Das Verhältniss $\nu = \frac{r}{r_1}$ nimmt man gewöhnlich 1,25 bis 1,5. Ist β grösser, so ist ν kleiner zu machen. Man hat ferner:

$$\sin \delta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\nu^2 \sin (\beta - \alpha)}.$$

α, β und ν sind jedoch so auszuwählen, dass δ nicht über 20° beträgt. Machen wir noch die Bedingung, dass die Geschwindigkeit im Reservoir nicht über 3 Fuss steige. Im Grenzfall ist dann:

$$Q = 3\pi r_1^2, \quad \text{also} \quad r_1 = 0{,}326 \sqrt{Q}.$$

(r_1 in Fuss, Q in Cubikfuss).

Die innere Radgeschwindigkeit war:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{\frac{2 \sin \beta \cos \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} + \zeta \left(\frac{\sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}\right)^2 + \zeta_1 \nu^2}},$$

und die Austrittsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{v_1 \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

der Querschnitt:

$$F = \frac{Q \sin (\beta - \alpha)}{v_1 \sin \beta},$$

die Eintrittsgeschwindigkeit:

$$c_1 = \frac{v_1 \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)},$$

der Querschnitt:

$$F_1 = \frac{Q \sin (\beta - \alpha)}{v_1 \sin \alpha},$$

die äussere Rad- und die Austrittsgeschwindigkeit:

$$v = c_2 = r v_1,$$

der Inhalt aller Ausmündungen des Rades:

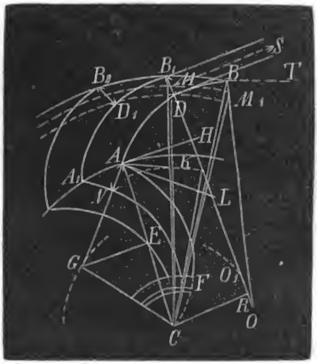
$$F_2 = \frac{Q}{v_1 r} = \frac{Fc}{r v_1},$$

die Umdrehungszahl in der Minute:

$$u = \frac{30 v}{\pi r} = 9{,}55 \frac{v}{r}.$$

Noch ist die Radschaufelzahl und die Dimensionen der Radmündungen zu bestimmen. Es ist anzunehmen, dass die Ausflussöffnungen vom Gesammtinhalt F_2 die durch die äusseren Schaufeln B_1, B_2 . . . (Fig. 207) gelegten Querschnitte $B_1 D$, $B_2 D_1$ . . . bilden, r die Entfernung CM der Mitte der Mündung $B_1 D$ von der Axe ist, und v die Umdrehungsgeschwindigkeit des Punktes M, dann ist δ der Winkel SMT, den die Axe des bei BD austretenden Strahles mit Tangente MT einschliesst. Sei n die Anzahl der Radschaufeln, s ihre Stärke, d die Weite $B_1 D$ der Ausmündungen, e die Radweite oder Schaufelhöhe, $\lambda = \frac{e}{d}$, also der Querschnitt der Ausmündungen:

Fig. 207.



$$F_2 = n d e = n \lambda d^2 = \frac{n e^2}{\lambda},$$

und die Anzahl der Schaufeln:

$$n = \frac{\lambda F_2}{e^2}.$$

Da der Querschnitt der Schaufeln $n s e$ ist, so hat man:

$$F_2 = \left(2\pi r \sin \delta - \frac{\lambda F_2 s}{e^2}\right) e,$$

also:

$$e = \frac{F_2}{2\pi r \sin \delta - \frac{\lambda F_2 s}{e^2}},$$

und annähernd:

$$e = \frac{F_2}{2\pi r \sin \delta}\left(1 + \frac{2\pi r \sin \delta \lambda s}{F_2}\right).$$

Man setzt $\lambda = 2$ bis 5, ersterer Werth wird bei langen, wenig gekrümmten Radcanälen vorgezogen. Die Weite der Ausmündungen und die Schaufelzahl sind nun:

$$d = \frac{e}{\lambda}, \quad n = \frac{\lambda F_2}{e^2}.$$

Die Anzahl n_1 der Leitschaufeln ergibt sich folgendermaassen. Es war:

$$\frac{F}{F_2} = \frac{2\pi r_1 \sin \alpha}{2\pi r \sin \delta}.$$

Bei der Leitschaufelstärke s_1 aber ist:

$$\frac{F}{F_2} = \frac{2\pi r_1 \sin \alpha - n_1 s_1}{2\pi r \sin \delta - n s}.$$

Die Vereinigung beider Gleichungen gibt:

$$n_1 = \frac{n \sin \alpha}{r \sin \delta}.$$

15) **Schaufelconstruction.**

Die Schaufeln sind nach Kreisbögen zu gestalten, und zwar die Leitschaufeln als ein Bogen, die Radschaufeln als zwei sich berührende. Es wird mit Radius $CM = r$ (Fig. 207) ein Kreis beschrieben, Tangente MT angetragen, und Winkel $SMT = \delta$ (Ausflusswinkel) nach der obigen Bestimmung angelegt. Der Theilwinkel $\varphi = \frac{360^\circ}{r}$ gibt nun $\frac{1}{2} d_1 = r \sin \delta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, und man trägt $MB_1 = MD = d_1$ nach beiden Seiten rechtwinklig auf MS an, zieht CB_1 und macht Winkel $B_1CB = \varphi$, beschreibt aus C durch B_1 und D Kreise B_1B und D_1D, der erstere stellt den äusseren Radumfang vor, B, B_1 sind die Schaufelenden. Man legt BO nun so, dass Winkel $BOD = BCB_1 = \varphi$ ist, dann ist O der Mittelpunkt, $BO = DO = a$ der Halbmesser des vom äussersten Schaufelende gebildeten Bogens BD. Man macht $B_1O_1 = DO$, und O_1 wird der Mittelpunkt des Endstückes B_1D_1 der folgenden Schaufel.

Denn es ist:

$$MM_1 = 2r \sin \frac{\varphi}{2}, \quad MOM_1 = \varphi, \quad OMM_1 = 90^\circ - SMT - TMM_1 = 90 - \left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right),$$

$$MM_1O = 90 - \left(\frac{\varphi}{2} - \delta\right).$$

Ferner:

$$OM_1 : MM_1 : OM = \sin OMM_1 : \sin MOM_1 : \sin MOM,$$

also:

$$OM_1 = \frac{r \cos\left(\frac{\varphi}{2} + \delta\right)}{\cos \frac{\varphi}{2}}, \quad OM = \frac{r \cos\left(\frac{\varphi}{2} - \delta\right)}{\cos \frac{\varphi}{2}},$$

oder:

$$OM_1 = r \cos \delta - r \sin \delta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad OM = r \cos \delta + r \sin \delta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

aber:

$$MD = MB_1 = M_1B = \frac{d_1}{2} = r \sin \delta \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

also:

$$OB = OM_1 + M_1B = r \cos \delta, \quad OD = OM - MD = r \cos \delta,$$
$$OB = OD = a = r \cos \delta.$$

Durch Construction wird a gefunden, wenn man $CR = MS$, und MR senkrecht auf MS zieht, dann ist $MR = a$.

Da das Schaufelende B_1 parallel dem gegenüberliegenden Schaufelelemente D ist, so fliesst der Strahl ohne Contraction aus, was also das Zweckmässigste ist. Der innere Theil DA der Radschaufel bildet auch einen Kreis. Sei $KD = KA = a_1$ der Halbmesser. Im Dreieck CMK ist nun:

$$CM = r, \quad MK = a_1 + \frac{d_1}{2}, \quad \text{Winkel } CMK = SMT = \delta,$$

also:

$$CK^2 = r^2 + \left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right)^2 - 2r\left(a_1 + \frac{d_1}{2}\right) \cos \delta.$$

Im Dreieck CAK ist:

$$CA = r_1, \quad AK = a_1, \quad \text{Winkel } CAK = 180 - \beta,$$

also:

$$CK^2 = r_1^2 + a_1^2 + 2 r_1 a_1 \cos \beta,$$

also durch Gleichsetzen beider Ausdrücke:

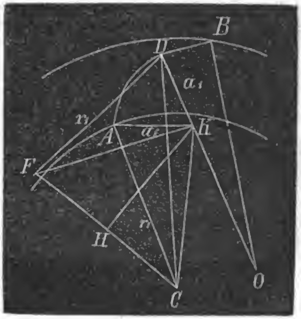


Fig. 208.

$$a_1 = \frac{r^2 - r_1^2 - r\,d_1 \cos\delta + \frac{d_1^2}{4}}{2(r\cos\delta + r_1\cos\beta) - d_1}.$$

Um diesen Halbmesser auch durch Construction zu finden, lege man an *DO* (Fig. 208) Winkel $ODF = 180 - \beta$, mache $DF = r_1$, ziehe *CF* und in der Mitte *H* dieser Linie errichte man Loth *HK*, welches *DO* in *K* schneidet, dann ist *K* das Centrum von Bogen *DA*, der das innere Schaufelstück bildet. Denn $KA = KD$, $CA = FD$, $CK = FK$, also Dreieck $CAK \cong FDK$, also:

Winkel $CAK = FDO = 180 - \beta$.

Was die Leitschaufel anbetrifft, so trage man *AL* (Figur 207) unter Winkel α an die Tangente *AK* des inneren Radumfanges, errichte darauf ein Loth und schneide dies durch eine in der Mitte *E* des Halbmessers *CA* errichtete Normale in *G*. Dieser Punkt ist Mittelpunkt der Leitschaufel *AF*: Der Halbmesser $GA = GC$ derselben ergibt sich: $a_2 = \frac{r_1}{2\cos\alpha}$. Die Mittelpunkte der übrigen Schaufelbogen befinden sich in den mit *CO*, *CK*, *CG* beschriebenen Kreisen.

16) Anordnung der Turbinen ohne Leitschaufeln.

Fehlen die Leitschaufeln, so sind die Verhältnisse zum Theil anders zu nehmen. Es ist $\alpha = 90^\circ$, β wird 140 bis 160 Grad genommen, damit man einen möglichst kleinen negativen Druck an der Uebergangsstelle erhalte. Das Halbmesserverhältniss $\nu = \frac{r}{r_1}$ ist hier 1,15 bis 1,3. weil sonst die Radkanäle zu lang ausfallen. Der Zutritt des Wassers erfolgt mit 2 Fuss Geschwindigkeit. Es ist also:

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{2\pi}} = 0{,}4\sqrt{Q}, \quad r = \nu r_1 = 0{,}4\,\nu\sqrt{Q}.$$

Sei nun:

$$1 - \zeta\frac{\operatorname{tg}\beta^2}{\nu^2} = \psi, \quad \frac{\sqrt{(1+\zeta_1)}}{\cos\delta} = \chi,$$

wo man in der Regel $\delta = 10$ bis 20°, $\zeta = \zeta_1 = 0{,}075$ nimmt, dann ist:

$$v = \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{(\chi^2 - \psi)}}{\psi'\sqrt{(\chi^2 - \psi)}}\,g\,h}, \quad v_1 = \frac{v}{\nu},$$

$$c = -v_1 \operatorname{tg}\beta, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2g\,h + \psi v^2}{1+\zeta_1}},$$

$$u = \frac{30v}{\pi r} = 9.55\frac{v}{r}, \quad F = \frac{Q}{c}, \quad F_2 = \frac{Q}{c_2},$$

$$e = \frac{F}{2\pi r_1}, \quad n = \frac{\lambda F_2}{e^2},$$

und da $F_2 = (2\pi r \sin\delta - ns)\,e$ (*s* die Schaufelstärke), so ist:

$$\sin\delta = \frac{(e + \lambda s)F_2}{2\pi r e^2}.$$

β und ν sind so auszuwählen, dass δ nicht viel über 15° beträgt.

17) Schottische Turbinen.

Die schottischen Turbinen unterscheiden sich insofern von den eben beschriebenen, als ihre Radkanäle getrennt sind. Wegen der grösseren Breite derselben tritt das Wasser mit Stoss ein, auch ist eine grössere Auswahl in der Form oder

Grösse gegeben. Namentlich kann δ viel kleiner gemacht werden. Die schottischen Turbinen werden bei grossem Gefälle und wenig Wasser darum angewandt, weil man die Anzahl der Kanäle beliebig klein nehmen kann. Wird eine Zuflussgeschwindigkeit von 6 Fuss höchstens vorausgesetzt, so ergibt sich:

$$r_1 = \sqrt{\frac{Q}{6\pi}} = 0{,}23\sqrt{Q}.$$

$\frac{r}{r_1} = \nu$ ist gleich 2 bis 4 zu setzen, je nach der Anzahl der Schwungröhren. Die Grössen F_1, F_2, v, r_1, c sind wie im vorigen Abschnitte, endlich die Radhöhe und die äussere Weite der Radkanäle:

$$e = \frac{F}{2\pi r_1}, \quad d = \frac{F_2}{ne}.$$

ζ ist etwa gleich 0,1 zu nehmen, und ζ_1 mindestens gleich 0,075.

Der Schwungröhrenaxe gibt man die Form einer Archimedischen Spirale. Da die Axen radial an das Reservoir stossen, so findet durch den Stoss ein entsprechender Arbeitsverlust statt. Die Ausflussgeschwindigkeit ist:

$$(1+\zeta_1)c_2{}^2 = 2g\,x + c^2 + v^2 - v_1{}^2,$$

und wegen:

$$2g\,x + c^2 = 2g\,h - \zeta c^2:$$

$$(1+\zeta_1)c_2{}^2 = 2gh + v^2\left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right) - \zeta c^2,$$

woraus sich c_2 ergibt.

Die dem Arbeitsverlust entsprechende Geschwindigkeitshöhe ist, da das Wasser beim Eintritt plötzlich die Tangentialgeschwindigkeit v_1 annimmt:

$$y = (c_2{}^2 + v^2 - 2c_2\,v\cos\delta + v_1{}^2 + \zeta_1\,c_2{}^2 + \zeta c^2)\frac{1}{2g}$$

$$= \left\{gh + v^2 - v\cos\delta\sqrt{\frac{2gh - \zeta c^2 + \left(1 - \frac{1}{\nu^2}\right)v^2}{1+\zeta_1}}\right\}\frac{1}{g},$$

also die effective Leistung:

$$L = [v\sqrt{(2g\,h - \zeta c^2 + \psi v^2)} - \chi v^2]\,\frac{Q\gamma}{\chi g},$$

wo:

$$\chi = \frac{\sqrt{(1+\zeta_1)}}{\cos\delta}, \quad \psi = 1 - \frac{1}{\nu^2}$$

ist. Wegen des kleinen ζ kann man auch setzen:

$$L = [v\sqrt{(2g\,h - \psi v^2)} - \chi v^2]\,\frac{Q\gamma}{\chi g},$$

und dann ist die vortheilhafteste Geschwindigkeit wie oben:

$$v = \sqrt{\frac{\chi - \sqrt{(\chi^2 - \psi)}}{\psi\sqrt{(\chi^2 - \psi)}}\,gh}.$$

Lässt man ζ_1 ausser Acht, und nimmt $\delta = 0$, so ist $\chi = 1$ und die vortheilhafteste Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{gh}{\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}}}, \qquad \eta = \frac{\nu}{1+\nu},$$

also der Wirkungsgrad η desto grösser, je länger die Schwungröhren sind. Noch hat man:

$$v_1 = \frac{v}{\nu}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{2gh - \zeta c^2 + \psi v^2}{1 + \zeta_1}},$$

$$F_2 = \frac{Q}{c_2}.$$

$\frac{F_2}{F}$ muss klein sein, damit der Widerstand beim Eintritt gering sei, also F möglichst gross, wenigstens so gross, dass c nicht grösser ist, als die Geschwindigkeit des zufliessenden Wassers. Dies wird erreicht, indem man den Querschnitt der Eintrittsmündung gleich dem des Zuleitungsrohres macht, also:

$$2\pi r_1 e = \pi r_1^2,$$

oder:

$$e = \frac{r_1}{2},$$

ausserdem ist:

$$d = \frac{F_2}{ne}.$$

Mit Vortheil kann man statt der getrennten Schwungröhren einen einzigen Schwungring (Fig. 209) *AA* mit gut abgerundeten conoidischen Mundstücken *BB* anwenden. Die Hindernisse im Rade sind dann sehr klein, und nur der eben betrachtete Arbeitsverlust beim Uebertritt in die Kernröhre *C* ist zu berücksichtigen. Der Wirkungsgrad kann dann auf $\frac{2}{3}$ gesteigert werden.

Fig. 209.

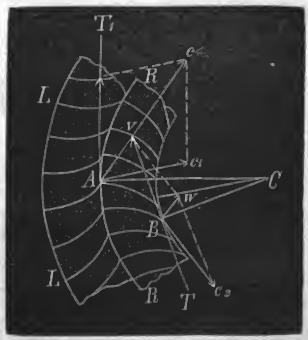


18) Turbinen mit äusserer Beaufschlagung.

Turbinen mit äusserer Beaufschlagung sind wie die Fourneyron'schen zu berechnen, wenn man $r_1 v_1$ auf das eintretende, rv auf das austretende Wasser bezieht.

Die Leitschaufeln *LL* (Fig. 210) mögen dem Rade *RR* mit Geschwindigkeit c das Wasser zuführen. Es ist dann Winkel $cAv_1 = \alpha$, und wie oben:

Fig. 210.



$$c_1^2 = c^2 + v_1^2 - 2cv_1 \cos\alpha,$$

und da durch die Centrifugalkraft das Arbeitsvermögen $Q\gamma\left(\frac{v_1^2 - v^2}{2g}\right)$ verloren geht:

$$(1+\zeta_1)\frac{c_2^2}{2g} = x - h_2 + \frac{c_1^2}{2g} - \frac{v_1^2 - v^2}{2g} = x - h_2 + \frac{c^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} - \frac{2cv_1\cos\alpha}{2g}.$$

Also wenn man setzt:

$$h_1 + h_2 = h, \quad (1+\zeta)\frac{c^2}{2g} = h_1 - x,$$

$$(1+\zeta_1)\, c_2^{\,2} = 2g\, h + v^2 - 2c\, v_1 \cos\alpha - \zeta c^2,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2g\, h}{\frac{2\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)} + \zeta\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}\right)^2 + \zeta_1\, \nu^2}}.$$

ν ist aber hier ein echter Bruch, weshalb die vortheilhafteste Geschwindigkeit etwas grösser ist als bei innerer Beaufschlagung. Jedoch ist dies nicht von Belang. Bei gleicher Geschwindigkeit verhalten sich nun die Umdrehungszahlen beider Arten von Turbinen wie die Halbmesser r, r_1, und also wenn u, u_1 die entsprechenden Umdrehungszahlen sind:

$$u_1 = \frac{u}{\nu}.$$

Die mit äusserer Beaufschlagung dreht sich also weniger oft. Da auch $c_2 = v$ bei denselben kleiner ist, so sind auch die Hindernisse geringer. Aber wegen:

$$\sin\delta = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

haben dieselben einen grösseren Austrittswinkel, und deshalb wird der Wirkungsgrad für sie geringer.

19) Turbinenwelle, Zapfen.

Die Stärke der Turbinenwelle bestimmt sich nach den Regeln der Torsionsfestigkeit:

$$d = 0{,}355\sqrt[3]{(Pr)} = 6\sqrt[3]{\frac{L}{u}}\ \text{Zoll},$$

wenn r in Fussen gegeben ist. Die Stärke des Zapfens d_1 wird gewöhnlich $\frac{2}{3}d$ bis $\frac{3}{4}d$ genommen. Sind 1500 Pfund Druck auf den Quadratzoll zulässig, und G das Gewicht der armirten Welle, so wäre:

$$1500\,\pi\,\frac{d_1^{\,2}}{4} = G,$$

also:

$$d_1 = 0{,}03\sqrt{G}\ \text{Zoll}.$$

Dies gilt jedoch nur für langsam umgehende Wellen. Bei Turbinenzapfen muss die Stärke mit u wachsen, wegen der grösseren Wärmeentwickelung. Man kann daher setzen:

$$d_1 = 0{,}03\sqrt{G\,(1+0{,}01\,u)}.$$

Die Wellenköpfe, d. h. diejenigen Wellentheile, wo der Radteller und wo das Transmissionsrad aufsitzen, sind stärker zu machen, weil sie durch die Keilspur abgeschwächt werden. Man nimmt sie gewöhnlich $\frac{5}{4}d$, und die Wanddicke der Hülsen, womit Radteller und Transmissionsrad aufsitzen, $\frac{1}{3}d$; somit ist der äussere Durchmesser einer solchen Hülse:

$$d_2 = \left(\tfrac{5}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{3}\right)d = \tfrac{23}{12}\,d.$$

Ist noch s die Stärke des Radtellers, wo er an seiner Hülse aufsitzt, so ist $\pi\, d_2 s$ der Inhalt der cylindrischen Fläche, womit er mit der Hülse zusammenhängt. Sei K der Festigkeitsmodul, so ist $\pi\, d_2\, s\, K$ die Kraft zum Umdrehen des Tellers, also das Moment:

$$Pr = \frac{\pi}{2}\, d_2^{\,2}\, s\, K,$$

und:

$$s = \frac{Pr}{1500\,\pi\, d_2^{\,2}},$$

und da:

$$Pr = 12\cdot 4870\,\frac{L}{u}\ \text{Zollpfund}$$

beträgt:

$$s = 12{,}4\,\frac{L}{u d_2^{\,2}} = 3{,}375\,\frac{L}{u d^2}.$$

Jedoch ist die Stärke in der Praxis noch grösser zu nehmen, und zwar gleich der des Bodentellers. Was den letzteren anbetrifft, so denken wir uns denselben massiv, und durch den Wasserdruck längs des Durchmessers $2r_1$ in zwei Theile getheilt; sei die Druckhöhe h, so ist der Druck auf jeden Theil:

$$P = \tfrac{1}{2}\pi\, r_1^{\,2}\, h\gamma,$$

und da der Schwerpunkt eines Halbkreises die Entfernung $y = \frac{4r_1}{3\pi}$ vom Mittelpunkte hat, so ist das Moment:

$$Py = \tfrac{2}{3}\, r_1^{\,3}\, h\gamma.$$

Für dies Moment ist aber, wenn s die Höhe der Bruchfläche, $2r_1$ die Breite ist, nach der Theorie der relativen Festigkeit zu setzen:

$$Py = \frac{2r_1\, s^2\, T}{6},$$

und daher:

$$s^2 = \frac{2 r_1{}^2 h \gamma}{T},$$

wo $\gamma = 66$, $T = 9000$ (alt) Pfund zu nehmen ist, also:

$$s = 0{,}12\, r_1 \sqrt{h} \text{ Zoll.}$$

r_1 und h sind in Fussen gegeben. Der Steifigkeit wegen aber setzt man noch 0,33 Zoll zu s zu.

Der Zapfen muss wegen seines grossen Reibungsmomentes sehr gut angefertigt und geölt sein. Um die reibende Fläche zu vergrössern, macht man ihn dick, meistentheils nur wenig schwächer als die Welle, auch muss der Zutritt des Wassers zwischen den Reibungsflächen verhindert werden. — Am Zapfen unten und auch am oberen Ende der Welle sind Lagerungen anzubringen.

Dergleichen sind von Cadiat, Fourneyron und Laurent angegeben worden.

20) Vergleich der Turbinen unter einander.

Aus dem Gesagten geht jetzt hervor, dass die mechanisch vollkommenste Turbine die mit Leitschaufelapparat ist, da dem Wasser durch sie fast alles Arbeitsvermögen entzogen wird. Bei den Fourneyron'schen, Cadiat'schen und Withelaw-schen ist die Radgeschwindigkeit ziemlich gleich, 0,7 $\sqrt{(2gh)}$ bis $\sqrt{(2gh)}$, aber die Maximalleistung verschieden, nämlich bezüglich 0,75, 0,65 und 0,5 bis 0,6 der Totalleistung. — Im Allgemeinen kommen die Fourneyron'schen und Cadiat'schen Turbinen bei kleineren Gefällen und grösseren Aufschlagmengen, die Withelaw'schen auch bei kleineren Gefällen aber bei kleineren Wassermengen in Anwendung. Man kann aber auch die lebendige Kraft des von Turbinen ohne Leitschaufeln abströmenden Wassers zur Bewegung einer zweiten Turbine benutzen.

Versuche, welche Morin, Redtenbacher, Combes, Morris und Marozeau angestellt haben, bestätigen diese Verhältnisse.

21) Hydropneumatisation, Diffusor.

Von verschiedenen Mitteln, um die Leistungen der Turbinen zu vermehren, ist zunächst Girard's Hydropneumatisation zu merken. Sie besteht darin, dass man die Radstube von oben mit einem luftdichten Mantel umschliesst, und den abgesperrten Raum mit comprimirter Luft füllt, wodurch der Austritt des Wassers unter Wasser verhindert wird. Eine Turbine leistet nämlich weniger, wenn sie unter Wasser umläuft, als in freier Luft. Diese Differenz ist zwar gering bei vollständig geöffneter Schütze, ist dies aber nicht der Fall, so findet beim Eintritt des Wassers ins Rad eine plötzliche Geschwindigkeitsänderung, wie oben gezeigt wurde, statt. Der dadurch sich ergebende Verlust am Wasserdruck wächst, wenn das Verhältniss $\frac{e}{e_1}$ der Höhe der Schützenmündung gegen die Radhöhe abnimmt. Ist nämlich c die absolute Geschwindigkeit des eintretenden Wassers, so ist die Ausflussgeschwindigkeit aus der Schütze $\frac{e}{e_1}c$, und der Druckhöhenverlust:

$$\left(\frac{e}{e_1} - 1\right)^2 \frac{c^2}{2g}.$$

Dieser Verlust fällt weg, wenn man wie bei der Hydropneumatisation Luft bei tieferem Schützenstande zuleitet. Bei den von Girard angefertigten Turbinen wird eine Compressionspumpe mittels der Turbine selbst in Bewegung gesetzt, und drückt die Luft in die Radstube, während eine Röhre die etwa zu stark gepresste Luft wieder abführt.

Bei den Girard'schen und auch bei einigen anderen Turbinen wird überdies den Radkränzen eine conische Form gegeben, um den Querschnitt F_2 der Ausflussöffnung zu vergrössern. Sei e die äussere, e_1 die innere Radhöhe, so ist:

$$\frac{c_2}{c} = \frac{v}{c} = \frac{F}{F_2} = \frac{r_1 e_1 \sin\alpha}{r e \sin\delta},$$

also:

$$\sin\delta = \frac{r_1 e_1 c}{r e v}\sin\alpha = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{e_1}{e}\,\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Bei Turbinen mit ebenen Radkränzen aber war:

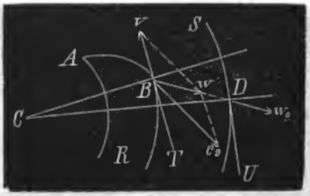
$$\sin\delta = \frac{1}{\nu^2}\,\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Es kann also durch die conische Form der Austrittswinkel δ und somit die Geschwindigkeit w des abfliessenden Wassers verringert werden.

Gleiches wird erreicht durch den Diffusor von Boyden. Er besteht in einem sich von innen nach aussen erweiternden ringförmigen Raume, der das Rad umschliesst, und durch welchen das Wasser in die Radstube und von da ins Unterwasser gelangt.

Ist ABR (Fig. 211) ein Theil des Rades, BDS ein Theil des Diffusors, c_2 wieder die relative Geschwindigkeit, mit

Fig. 211.



welcher das Wasser bei B aus dem Rade tritt, und welche sich mit der Umdrehungsgeschwindigkeit v zur absoluten Geschwindigkeit w vereinigt, mit der das Wasser in den Diffusor tritt. In denselben läuft es fast in Richtung BD gradlinig, und tritt bei D mit Geschwindigkeit w_0 aus. Seien die Halbmesser $CB=r$, $CD=r_0$, e und e_0 die innere und äussere Diffusorweite, der Austrittswinkel $TBc_2=\delta$, und der Winkel TBD, unter welchem das Wasser in den Diffusor tritt, gleich ϑ, UDw_0, unter welchem es austritt, gleich ϑ_0, dann ist:

$$\frac{CB}{CD}=\frac{\sin CDB}{\sin CBD},$$

also:

$$\frac{r}{r_0}=\frac{\cos\vartheta_0}{\cos\vartheta},\quad r\,e\,v\sin\delta=r\,e\,w\sin\vartheta=r_0\,e_0\,w_0\sin\vartheta_0,$$

also die Austrittsgeschwindigkeit:

$$w_0=\frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\,\frac{\sin\vartheta}{\sin\vartheta_0}=\frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\sqrt{\frac{w\sin\vartheta}{1-\frac{r^2}{r_0^2}\cos\vartheta^2}}.$$

Da $\frac{r}{r_0}$ und $\frac{e}{e_0}$ kleiner als Eins, so ist $w_0<w$, also das Arbeitsvermögen beim Austritte aus dem Diffusor kleiner als bei dem aus dem Rade. Aber es ist auch w grösser, als dies ohne Diffusor der Fall ist. Denn sei y die Druckhöhe beim Uebergange in den Diffusor, so ist:

$$c_2^2=2g(h_1-y)+v^2-2c\,v_1\cos\alpha,$$

und:

$$w_0^2=w^2+2g(y-h_2),$$

also wenn $v=c_2$ genommen wird:

$$w_0^2=w^2+2g\,h-2c\,v_1\cos\alpha,$$

d. h.:

$$w=2v\sin\frac{\delta}{2},\quad c=\frac{v_1\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)},$$

$$w_0=\frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\,\frac{v\sin\delta}{\sin\vartheta_0}=\frac{r}{r_0}\,\frac{e}{e_0}\,\frac{v\sin\delta}{\sqrt{1-\frac{r^2}{r_0^2}\sin\frac{\delta^2}{2}}},$$

woraus sich ergibt:

$$\left\{2\left(\frac{r_1}{r}\right)^2\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}-4\sin\frac{\delta^2}{2}+\left(\frac{r\,e}{r_0\,e_0}\right)^2\frac{\sin\delta^2}{1-\left(\frac{r}{r_0}\sin\frac{\delta}{2}\right)^2}\right\}v^2=2g\,h,$$

woraus sich v ergibt.

Setzt man diesen Werth in die Formel für w_0, so hat man w_0 selbst, d. h. die Geschwindigkeit des ausfliessenden Wassers.

22) Einige andere Arten von Turbinen.

Bei den Turbinen von Fontaine, Henschel und Jonval befindet sich der Leitschaufelapparat über dem Rade, so dass das Wasser von oben nach unten ins Rad tritt, und von der Grundfläche aus abgeführt wird. Bei Fontaine befindet sich die Oberfläche des Unterwassers unmittelbar unter oder über dem Rade, bei Henschel bildet das ausströmende Wasser noch eine Säule über dem Unterwasser. Die Jonval'sche Turbine ist der Fontaine'schen ähnlich. Die Schaufeln bilden bei allen diesen Turbinen windschiefe Flächen. — Einen wesentlichen Vorzug vor den Fourneyron'schen Turbinen scheinen dieselben nicht zu haben, weshalb wir ihre genauere Theorie hier übergehen; ebenso die der Schraubenturbinen, die den Fourneyronschen ähnlich sind, nur weniger Schaufeln haben.

Die Turbinen im Allgemeinen haben den Vorzug vor verticalen Wasserrädern, dass sie bei Gefällen bis 500 Fuss, die letzteren nur bis 50 Fuss anwendbar sind, während im Allgemeinen die verticalen Wasserräder den grösseren Wirkungsgrad haben. Ferner wird durch veränderliches Gefälle der Wirkungsgrad der Turbinen nicht sehr gestört, dagegen verhält es sich umgekehrt bei Veränderung des Aufschlagquantums, und dies gibt in vielen Fällen den verticalen Rädern ein entscheidendes Uebergewicht.

Bei Turbinen lassen sich aber auch weit schnellere Umdrehungszahlen erzielen, was jedoch nicht in vielen Fällen gefordert wird.

Das Prinzip der Reactionsturbinen ist übrigens in neuester Zeit auch auf verticale Wasserräder angewandt worden.

Weiteres über Turbinen findet man namentlich in Weissbach's Ingenieur- und Maschinenmechanik, Bd. 2. Das angeführte Werk haben wir diesem Artikel zu Grunde gelegt.

Wassersäulenmaschine (Hydraulik).

1) Allgemeines.

Die Wassersäulenmaschinen werden wie die Wasserräder durch eine vorhandene Wasserkraft in Bewegung gesetzt, jedoch ist diese Bewegung hier keine rotirende, sondern eine auf- und abgehende. Das Wasser tritt in einen Sammelkasten *A* (Fig. 212), von da in die Einfallsröhre *AB* und in den Stiefel oder Treibcylinder *C*, wo es den belasteten Treibkolben *K* hebt. In dem Communicationsrohre *BC* befindet sich die Steuerung, hier ein *T* förmig durchbohrter Hahn, welcher abwechselnd die Einfallsröhre verbindet und trennt. Im ersteren Falle wird der Kolben bewegt, im letzteren fliesst das unter dem Treibkolben befindliche Wasser in das Ausgussrohr *HD*, während der Kolben niedergeht. Wird dies Niedergehen blos durch das Gewicht des Wassers bewirkt, so ist die Maschine eine einfach wir-

Fig. 212.

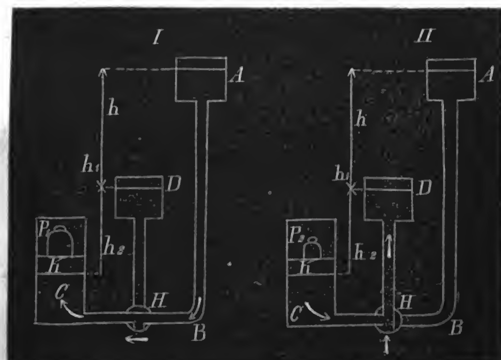
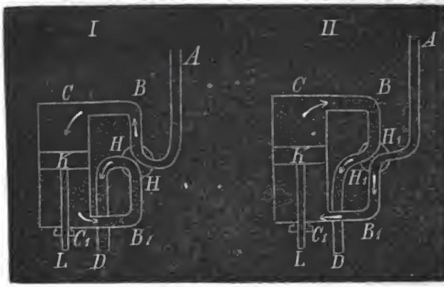


Fig. 213.



kende, treibt aber der Wasserdruck den Kolben herunter, so heisst sie doppelt wirkend. Bei der letzteren Art geht das Wasser erst den Weg *ABC* (Fig. 213) und treibt den Kolben nieder, während das abgeschlossene Wasser unterhalb des Kolbens auf dem Wege C_1B_1D abfliesst; dann geht das Wasser auf dem Wege $A\,B_1\,C_1$ unterhalb des Kolbens, und das über demselben befindliche fliesst auf dem Wege *CBD* ab, zur Regelung dient hierbei eine dem Vierweghahn einer Dampfmaschine gleiche Steuerung.

Ferner gibt es ein- und zweicylindrige Maschinen. Während bei den letzteren (Fig. 214) das Druckwasser den Kolben *K* aufwärts schiebt, geht Kolben K_1 nieder, und das Wasser unter ihm fliesst auf dem Wege C_1B_1D ab, und während K_1 aufgeht, wird das Wasser unter dem niedergehenden Kolben *K* auf dem Wege ***CBD*** entfernt.

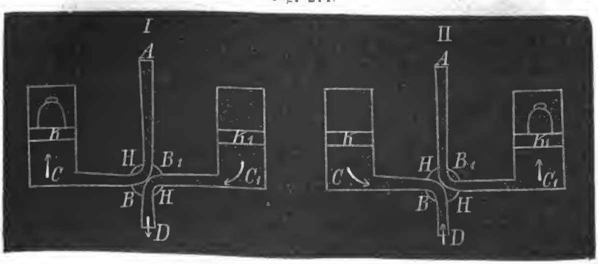
2) Construction der Theile einer Wassersäulenmaschine.

Der Sammel- oder Einfallkasten muss möglichst gross angefertigt werden, damit sich das Wasser abklären und beruhigen kann; Rechen oder Gitter halten fremdartige Körper ab. Sollte das Wasser unrein sein, so bringt man mehrere Scheidewände an, um dem Wasser vermittelst seiner schlangenförmigen Bewegung Gelegenheit zum Absetzen der fremden Körper zu geben.

Die Einfallsröhre mündet mindestens 1½ Fuss über dem Boden des Einfallkastens und 3 bis 5 Fuss unter dem Wasserspiegel, um das Eindringen fremder Körper und das Entstehen eines Lufttrichters zu vermeiden, auch lässt man zuweilen die Mündung nach unten gekrümmt sein. Eine Klappe oder ein conischer Zapfen gestattet, sie mittels eines Hebels zu verschliessen.

Die Länge der Einfallröhren beträgt 5

Fig. 214.



bis 8 Fuss; sie haben $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ der Weite des Treibcylinders. Die Stärke der Wände ist $\frac{3}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ Zoll, wobei die kleinere Stärke den oberen, die grössere den unteren Einfallröhren gegeben wird.

Ist e die Stärke, d_1 die innere Weite in Zollen, p der Wasserdruck in Atmosphären, so kann man setzen:

$$e = 0{,}0025\, p\, d_1 + 0{,}75 \text{ Zoll.}$$

Die einzelnen Theile, aus denen die Röhre besteht, sind entweder durch Muffen, oder durch Kränze und Schrauben verbunden.

Der Stiefel oder Treibcylinder wird aus Gusseisen oder der Politur wegen aus Kanonenmetall gefertigt. Man macht ihn mehr lang als weit, so dass der Kolbenhub s $2\frac{1}{2}$ bis 6 mal so gross ist als der Kolbendurchmesser d. Es ist nämlich eine langsame Bewegung (3 bis 6 Spiele in der Minute) zu erzielen. Die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens v ist etwa gleich 1 Fuss zu nehmen, damit die Einfallsgeschwindigkeit des Wassers in die Einfallröhren nicht zu gross ist (etwa 6 bis höchstens 10 Fuss). Das Verhältniss der Einfallsröhrenweite d_1 zur Cylinderweite ergibt sich:

$$\pi d^2 v = \pi d_1^2 v_1,$$

also:

$$\frac{d_1}{d} = \sqrt{\frac{v}{v_1}},$$

und wenn man $v = 1$, $v_1 = 6$ nimmt:

$$d_1 = 0{,}408\, d.$$

Das Aufschlagsquantum in der Secunde sei gleich Q, so kann man für eine doppelt wirkende oder zweicylindrige einfach wirkende Maschine setzen:

$$Q = \frac{\pi d^2 v}{4},$$

also die Weite des Treibcylinders:

$$d = 1{,}13 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

dagegen für eine einfach wirkende:

$$Q = \frac{\pi d^2 v}{8},$$

also:

$$d = 1{,}60 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

und die Zeit eines Ganges:

$$t = \frac{s}{v},$$

die Anzahl der Gänge in der Minute:

$$n_1 = \frac{60 v}{s}.$$

Die Anzahl der Spiele n ist natürlich gleich $2 n_1$. Die Wandstärke der Cylinder muss gross sein, 2 bis 3 Zoll, und wird bestimmt durch die Formel:

$$e = 0{,}0025\, p\, d + 1{,}25 \text{ Zoll.}$$

Der Treibkolben muss genau in den Cylinder passen. Zum vollkommenen Abschluss dient eine Liderung, die an dem Kolben oder dem Cylinder sitzt. Im letztern Falle besteht der Kolben aus einem Cylinder, der gleich lang mit dem Stiefel ist, und wird Mönchs- oder Bramahkolben genannt.

Die Kolbenstange ist vom Treibkolben aus entweder nach der Mündung oder nach dem Deckel des Cylinders gerichtet. Im ersteren Falle können sie von Holz sein, im letzteren muss sie rund abgedreht werden, aus Eisen oder Kanonenmetall bestehen, und durch eine Stopfbüchse gehen. Sei d der Treibkolbendurchmesser, p der Wasserdruck für einen Zoll, so ist der Druck auf den Kolben:

$$P = \frac{\pi p d^2}{4}.$$

Ist aber d_2 die Dicke der Kolbenstange, T der Tragmodul ihres Materials, so ist ihre Tragekraft:

$$P = \frac{\pi d_2^2 T}{4},$$

also:

$$d_2 = d \sqrt{\frac{p}{T}}.$$

Man hat:

$$p = \frac{h\gamma}{144}, \text{ und } T = 10000 \text{ Pfund}$$

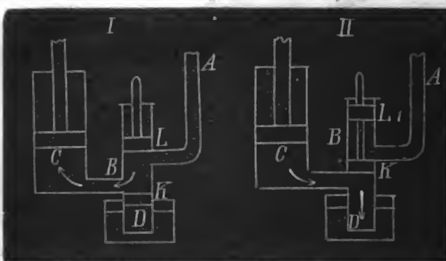
für Schmiedeeisen,

also auch:

$$d_2 = 0{,}01\, d \sqrt{p} = 0{,}00677 \sqrt{h} \text{ Zoll.}$$

Die Steuerung ist der wichtigste Theil der Maschine. Sie besteht aus der eigentlichen Steuerung (Hahn oder Ventil oder Kolben), welche den Wechsel der Wasserrichtung veranlasst, und derjenigen, welche durch die Maschine selbst die Stellungen dieses Apparates regelt, so dass keine fremde Hülfe einzugreifen braucht. Die eigentliche Steuerung ist entweder der oben beschriebene Vierweghahn, oder eine Kolbensteuerung, ferner eine Ventil- oder Schiebersteuerung.

Fig. 215.



Der Hahn kommt nur selten noch und nur an kleinen Maschinen vor. — Die Kolbensteuerung für eincylindrige und einfach wirkende Maschinen besteht aus dem Steuercylinder B, welcher den Steuerkolben K und den Gegenkolben L (Fig. 215) einschliesst. Letzterer dient nur dazu, um durch einen Gegendruck die Bewegung des Steuerkolbens zu erleichtern. Bei der tieferen Stellung I des Steuerkolbens sind Treibcylinder C und Einfallröhre A, bei der höheren II sind Treibcylinder C und Ausflussrohr D in Verbindung. Bei der doppelt wirkenden zweicylindrigen Maschine ist die Einrichtung ganz ähnlich (Fig. 216). C, C_1 sind die Communicationsröhren mit beiden Cylindern, A die Einfallsröhre, D, D_1 die Ausgussröhren. In Stellung I steht das einfliessende Wasser mit C in Verbindung, das ausfliessende nimmt den Weg C_1D_1E. In Stellung II tritt das Wasser in C_1 ein, und das ausfliessende nimmt den Weg CDE. Die Steuerkolben sind ebenfalls mit einer Liderung versehen. Derjenige Theil, welcher zunächst die Absperrung bewirkt, ist conisch zu formen, damit dieselbe allmälig stattfinde, und keine Erschütterung vor sich gehe.

Die Ventilsteuerung besteht aus dem Einlassventil V und dem Auslassventil V_1 (Fig. 217), jedes in einem besonderen Steuercylinder S und S_1. Bei der Stellung I gelangt das Wasser aus der Einfallsröhre A durch die Ventilöffnung nach dem Treibcylinder C, bei der Stellung II aus C nach dem Austragsrohr EF. Die Gegenkolben G und G_1 dienen zur leichteren Bewegung, auch setzt man den Raum über G durch Rohr H mit dem Communicationsrohre B, und den Raum über G_1 durch Rohr H_1 mit dem Austragsrohre EF in Verbindung. Ist der Querschnitt dieser Kolben nahe gleich dem der Ventile, so

Fig. 216.

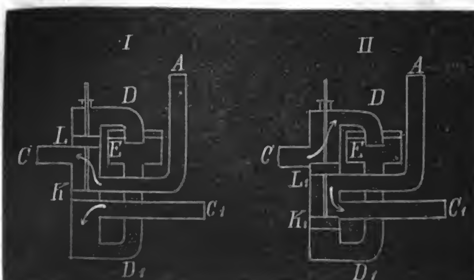
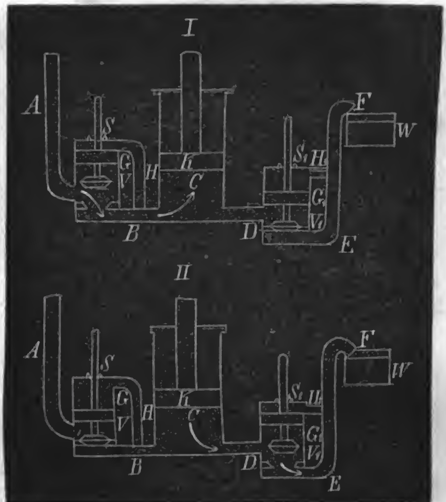


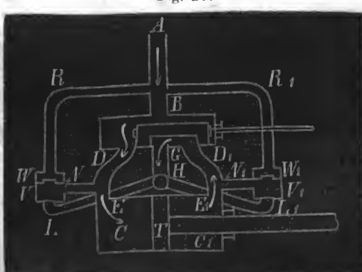
Fig. 217.



drückt das Wasser beinahe gleich nach beiden Richtungen, und eine sehr kleine Kraft reicht zur Bewegung der Ventile aus.

Die Schiebersteuerung (Fig. 218) ist an einer liegenden Maschine dargestellt. Beim Hingange des Treibkolbens T fliesst das Wasser aus der Einfallröhre AB in die Steuerkammer BDD_1 und von da bei D durch das Communicationsrohr DE in den Treibcylinder. Dann wird Schieber S zurückgeschoben, so dass der Kanal in demselben über der Mündung D des Communicationsrohres DE und über der Mündung G des Austragerohres GH zu

Fig. 218.



stehen kommt, so dass das einströmende Wasser auf dem Wege ABD_1E_1 zum Treibcylinder C_1 gelangt und den Treibkolben zurückführt. Das aus dem Treibcylinder C herausgedrückte Wasser gelangt dann durch den Schiebekanal in das Rohr GH und zum Abflusse.

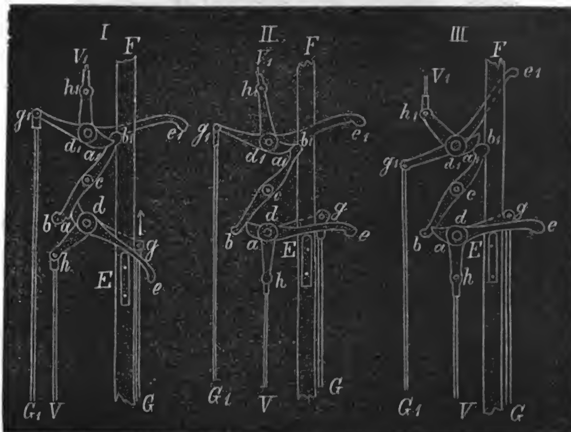
Der Apparat zur Stellung der Steuerung ist aus dem Grunde complicirter als bei Dampfmaschinen, weil das Wasser keine elastische Flüssigkeit ist, welche wie der Dampf sogleich der Steuerung folgt. — Bei doppelt wirkenden Maschinen wird oft die auf- und absteigende Bewegung in eine rotirende verwandelt, und dann ist die Steuerkolbenstange derart mit den rotirenden Theilen der Maschine zu verbinden, dass sie auf- und niedergeht, während eine Rotation vollendet wird. Damit hierbei die Bewegung des Treibkolbens nicht gehemmt wird, ist folgendermaassen zu verfahren. Entweder wird dem Steuerkolben eine so geringe Höhe gegeben, dass er beim Durchgange durch die Mündnng des Communicationsrohres in den Steuercylinder dieselbe nicht völlig verschliesst, also über und unter demselben Steuercylinder und Treibcylinder communniciren. Dann fliesst während des mittleren Standes des Steuerkolbens eine kleine Wassermenge von der Einflussröhre unmittelbar ins Ausgussrohr, und es wird der Maschine Kraftwasser entzogen, oder man führt eine Seitenröhre vom Ausgussrohr ins Unterwasser, deren Einmündung durch ein nach innen zu öffnendes Ventil verschlossen ist (Saugventil). Ferner geht eine Seitenröhre ins Einfallrohr, und versperrt deren Mündung ins Communicationsrohr durch ein nach aussen, d. h. nach dem Seitenrohre zu sich öffnendes Ventil (Steigventil). Kommt nun der Steuerkolben beim Aufgang an die Mündung des Communicationsrohres in dem Steuercylinder, so öffnet sich das erste Ventil, und es wird hinreichend Wasser aufgesaugt, um den während der Absperrung der Mündung vom Treibkolben durchlaufenen Raum auszufüllen, beim Niedergange dagegen öffnet sich das zweite Ventil, nnd das während des Verschlusses vom Treibkolben verdrängte Wasser gelangt durch dies Ventil in die Einfallröhre.

Bei den Maschinen, welche nur auf- und abgehen, wird die Steuerung bewegt entweder a) durch ein Gewicht, welches von der Kolbenstange bei ihrem Aufgange emporgehoben wird, und das in dem Augenblicke herabfällt, wenn sie den höchsten Punkt erreicht hat (Gewichtssteuerung), oder b) durch eine Feder, welche während der Treibkolbenbewegung gespannt, und am Ende derselben losgelassen wird (Federsteuerung), oder c) durch eine zweite Wassersäulenmaschine, welche wieder von der Kraftmaschine gesteuert wird, derart, dass die Treibkolbenbewegung der einen Maschine immer der Treibkolbenbewegung der anderen entspricht, und durch dieselbe bewirkt wird.

Bei den neueren Maschinen besteht die Gewichtssteuerung in einer Hebelvorrichtung verbunden mit Ventilen. Die Kraftmaschine bewirkt das Verschliessen des einen, das sinkende Gewicht das Oeffnen des andern Ventils. Die Sperrklinke bcb_1 (Fig. 219), welche um die horizontale Axe c drehbar ist, endet sich in den Henkeln b und b_1, darunter befindet sich die horizontale Welle d mit Zahn a und den Armen e, g, h, darüber Welle d_1 mit Zahn a_1 und den Armen e_1, g_1, h_1. In Stellung I. greift a_1 in den Haken b_1, a ist über b, in II ist kein Eingriff, in III greift a in b, a_1 ist über b_1. Geht nun in I a nieder, so wird die Sperrklinke eine Drehung erleiden, also a_1 sich aushaken; geht in III a_1 nieder, so erfolgt die umgekehrte Bewegung, und a hakt sich aus. An den Armen d, g und d_1, g_1 befinden sich nun Gewichte G und G_1, und diese drehen ihre Wellen, je nachdem a und a_1 ausgehakt sind. An die Arme d, h und d_1, h_1 aber sind mittelst der Stangen hV und h_1V_1 die Steuerventile angeschlossen, und diese werden durch das Niederfallen der Gewichte geöffnet. Um aber die Wellen d und d_1 nach den entgegengesetzten Richtungen zu drehen, dienen die Arme de und d_1e_1. Wird in I de von unten nach oben geführt, so geht hV nieder, und das Ventil V schliesst sich; dann wird aber auch a_1 frei, g_1G_1 fällt nieder und öffnet V_1. Wird gegegen in III d_1e_1 nach unten geführt, so steigt h_1V_1, V_1 schliesst sich, a hakt sich aus, G fällt und hebt hV, öffnet also das Ventil V. Das Heben und Niederdrücken der Arme de und d_1e_1 aber bewirkt die Stange EF (Steuerstange), welche mit dem Treibkolben zugleich auf- und abgeht. Diese Mittheilung vermitteln zwei auf entgegengesetzten Seiten an den Enden des Kolbenganges angebrachte Daumen oder Knaggen E und F.

Was Hülfswassersäulenmaschinen anbetrifft, so ist eine solche nicht nöthig, wenn man die Wasserkraft auf zwei

Fig. 219.



gleiche Kraftmaschinen vertheilt, von welchen jede die andere steuert.

Der Balancier dient, die Bewegung des Treibkolbens nach einer Seite hin zu unterstützen, nach der andern aber zu hemmen, um eine gleichmässige Bewegung hervorzubringen. Bei gleich belasteten zweicylindrigen Maschinen besteht der Balancier in einem gleicharmigen Hebel, der beide Treibkolbenstangen verbindet, ist aber nur ein Cylinder vorhanden, so dient als Balancier entweder das Gewicht eines festen Körpers, oder der Druck einer Wassersäule (mechanischer oder hydraulischer Balancier). Der erstere besteht in einem doppelarmigen Hebel, auf der einen Seite mit Gewichten beschwert, auf der anderen mit der Kolbenstange so verbunden, dass jene dem Gewichte derselben entgegenwirken. Der hydraulische Balancier besteht in einer Anzahl Röhren, welche statt des Ausgussrohres vom Steuercylinder aus aufwärts steigen, so dass das todte Wasser eine Säule bildet, welche beinahe das Gewicht des Gestänges compensirt, so dass dasselbe mit gemässigter Geschwindigkeit niedergeht.

Zu diesen Vorrichtungen kommen noch einige Stellhähne oder Ventile, welche die Wasserkraft reguliren, also wie die Schütze eines Wasserrades wirken.

3) Leistung der Wassersäulenmaschine.

Sei F der Inhalt der Treibkolbenfläche, F_1 der des Querschnitts der Einfallröhren, d der Durchmesser des Treibkolbens, d_1 der der Einfallröhren, d_2 der der Austragsröhre, h das Gefälle vom Wasserspiegel im Einfallkasten bis zu dem im Ausgusskasten, h_1 die mittlere Druckhöhe beim Aufgange des Treibkolbens, also die Tiefe der unter den erstern Wasserspiegel gedrückten Kolbenfläche beim mittleren Kolbenstande, h_2 die mittlere Druckhöhe beim Niedergange, d. h. die senkrechte Tiefe der Kolbenfläche unter der Ausgussmündung, s der Kolbenhub, l_1 die Länge der Einfall-, l_2 der Austragröhrenaxe, v die mittlere Kolbengeschwindigkeit, v_1 die mittlere Wassergeschwindigkeit in der Einfall-, v_2 in der Austragröhre.

Möge eine einfach wirkende Maschine n Spiele in der Minute machen, und dabei Q Cubikfuss Aufschlagewasser in der Secunde verbrauchen; γ sei die Dichtigkeit des Wassers. Dann ist der mittlere Druck des Wassers gegen die Treibkolbenfläche beim Aufgange:

$$P_1 = F h_1 \gamma,$$

und die Arbeit ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse in der Minute:

$$nP_1 s = nFsh_1\gamma;$$

aber da $\frac{nFs}{60} = Q$ ist, so ist die Arbeit in der Secunde:

$$L_1 = Qh_1\gamma.$$

Beim Rückgang des Kolbens wirkt der Druck:

$$P_2 = Fh_2\gamma$$

der Bewegung entgegen, consumirt also eine entsprechende Arbeit. Daraus folgt die überschiessende Arbeit für die Secunde:

$$L = L_1 - L_2 = Q(h_1 - h_2)\gamma = Qh\gamma.$$

Diese Arbeit wird durch die Hindernisse verringert. Betrachten wir zunächst die Kolbenreibung. Ist die Liderung eine hydrostatische, und e ein Element der Liderungsfläche, so sind die entsprechenden Reibungen beim Auf- und Niedergange bezüglich $\varphi e h_1\gamma$ und $\varphi e h_2\gamma$, wo φ der Reibungscoefficient ist. Es ist nun die Summe aller Elemente e zu nehmen. Sei die Breite der Liderungsfläche oder der beiden, wenn zwei Liderungskränze vorhanden sind, gleich b, also πdb die Fläche selbst, so ist die Gesammtreibung:

$$R = \varphi\pi db(h_1 + h_2)\gamma.$$

Führt man Wassersäulen, welche den Treibkolbenquerschnitt F als Grundfläche und die Höhen h_3 und h_4 haben, als Maass der Reibung ein, und berücksichtigt, dass:

$$F = \frac{\pi d^2}{4}, \quad R_1 = Fh_3\gamma, \quad R_2 = Fh_4\gamma$$

ist, so kommt:

$$h_3 = 4\varphi\frac{b}{d}h_1, \quad h_4 = 4\varphi\frac{b}{d}h_2.$$

Es ist dann die mittlere Kraft beim Aufgang:

$$P_1 = F(h_1 - h_3)\gamma = \left(1 - 4\varphi\frac{b}{d}\right)Fh_1\gamma,$$

und der Widerstand beim Niedergange:

$$P_2 = F(h_2 + h_4)\gamma = \left(1 + 4\varphi\frac{b}{d}\right)Fh_2\gamma,$$

also die mittlere Leistung:

$$L = \frac{n}{60}(P_1 - P_2)s$$
$$= \left[1 - 4\varphi\frac{b}{d}\left(1 + 2\frac{h_2}{h}\right)Qh\gamma\right.$$
$$= \left(h - 4\varphi\frac{b}{d}(h_1 + h_2)\right]Q\gamma.$$

Je grösser $\frac{h_2}{h}$, d. h. je tiefer die Maschine unter dem Ausgusspunkt steht, desto grösser ist die Kolbenreibung. Die Grösse $\frac{b}{d}$ ist zwischen 0,1 und 0,2, φ ist gleich 0,25 zu setzen. Ist h_2 sehr klein, so hat man:

$$L = \left(1 - 4\varphi\frac{b}{d}\right)Qh\gamma,$$

und:

$$4\varphi\frac{b}{d} = 0{,}1 \text{ bis } 0{,}2,$$

so dass die Kolbenreibung 10 bis 20 Procent der Arbeit verzehrt.

Es findet nun noch eine Reibung des Wassers in den Einfall- und Austragsröhren statt. Sei ζ der Reibungscoefficient, so erhält man die entsprechenden Druckhöhenverluste:

$$h_5 = \zeta\frac{l_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g}, \quad h_6 = \zeta\frac{l_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g}$$

bezogen auf die Einfall- und Austragsröhre. Die entsprechenden Wasserquanten aber sind:

$$\frac{\pi d_1^2}{4}v_1 = \frac{\pi d_2^2}{4}v_2 = \frac{\pi d^2}{4}v,$$

also:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v, \quad v_2 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^2 v,$$

also:

$$h_5 = \zeta\frac{l_1 d^4}{d_1^5}\frac{v^2}{2g}, \quad h_6 = \zeta\frac{l_2 d^4}{d_2^5}\frac{v^2}{2g}.$$

Sind v_1 und v_2 von 5 bis 10 Fuss, so ist $\zeta = 0{,}022$ bis $0{,}020$ zu nehmen.

Diese Widerstände zu verringern, sind die Röhren weit zu nehmen. — Da die Wassersäule durch den Steuerkolben vor vollbrachtem Spiele abgesperrt wird, wodurch Treibkolben und Wassersäule gleichzeitig in Ruhe übergehen, wird letzteren die Bewegung nicht vollständig mitgetheilt, und es geht ein Theil der Arbeit $\frac{F_1 l_1\gamma v_1^2}{2g}$ verloren. Wegen:

$$v_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^2 v, \quad F_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$$

ist diese Arbeit gleich:

$$\frac{\pi d^4 l_1}{4d_1^2}\gamma\frac{v^2}{2g},$$

also die mittlere Kraft während des Weges s:

$$P_1 = \frac{\pi d^4 l_1}{4 d_1{}^2 s} \gamma \frac{v^2}{2g},$$

und der Druckhöhenverlust beim Aufgange und bezüglich beim Niedergange:

$$h_7 = \frac{P_1}{F\gamma} = \frac{d_2 l_1 v^2}{d_1{}^2 s 2g}, \quad h_8 = \frac{P_2}{F\gamma} = \frac{d^2 l_2 v_2{}^2}{d_2{}^2 s 2g}.$$

Ein anderer Arbeitsverlust entsteht aus den Richtungs- und Querschnittsänderungen. An den Einfall- und Austragsröhren sind Kniestücke angebracht, gewöhnlich rechtwinklig. Ist r die halbe Röhrenweite, a der Krümmungshalbmesser der Axe ihres Kropfes, so kann man den Widerstandscoefficienten setzen:

$$\zeta_1 = 0{,}131 + 1{,}847 \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{7}{2}},$$

und es ist der Druckhöhenverlust in der Einfall-, bezüglich Austragröhre:

$$h_9 = \zeta_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}, \quad h_{10} = \zeta_1 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Beim Eintritt in den Steuercylinder ist ebenfalls ein Knie, dem ein Druckhöhenverlust $\zeta_2 \frac{v_1{}^2}{2g}$ entspricht, wo $\zeta_2 = 0{,}984$ zu setzen ist.

Man hat also beim Eintritt und Austritt des Cylinders:

$$h_{11} = \zeta_2 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}, \quad h_{12} = \zeta_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Für den Uebertritt aus dem Steuercylinder ins Communicationsrohr kann man setzen $\zeta_3 = 5$, und für den aus diesem Rohre in den Cylinder $\zeta_4 = 34{,}5$. Sei d_3 der Durchmesser des Steuercylinders, so hat man:

$$h_{13} = \zeta_3 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \frac{v^2}{2g}, \quad h_{14} = \zeta_4 \left(\frac{d}{d_3}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Beim Eintritt in den Treibcylinder ist $\zeta_5 = 31$, beim Austritt $\zeta_6 = 26$, also:

$$h_{15} = \zeta_5 \frac{v^2}{2g}, \quad h_{16} = \zeta_6 \frac{v^2}{2g}.$$

Endlich entstehen noch Verluste durch die Regulirungshähne. Die Coefficienten ζ_7, ζ_8 hängen von den Stellwinkeln derselben ab und können jeden Werth annehmen. (Vergleiche den Artikel: Ausfluss.) Man hat dann für den Hingang und Rückgang:

$$h_{17} = \zeta_7 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4 \frac{v^2}{2g}, \quad h_{18} = \zeta_8 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4 \frac{v^2}{2g}.$$

Wird nun die Steuerung nicht berücksichtigt, so hat man beim Aufgange die mittlere Kraft:

$$P = [h_1 - (h_3 + h_5 + \; . \; . \; . \; + h_{17})] F\gamma,$$

und die Last beim Rückgange:

$$P_1 = (h_2 + h_4 + \; . \; . \; . \; + h_{18}) F\gamma,$$

und die Leistung während des Spiels:

$$(P - P_1)s = [h_1 - (h_2 + h_3 + h_4 + \; . \; . \; . \; + h_{18})] F s \gamma,$$

und in der Secunde:

$$L = (h_1 - h_2 - h_3 - \; . \; . \; . \; - h_{18}) \frac{n F s \gamma}{60}.$$

Setzt man noch:

$$k_1 = \zeta \frac{l_1}{d_1} + \frac{d_1{}^2 l_1}{d^2 s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 \left(\frac{d_1}{d_3}\right)^4 + \zeta_5 \left(\frac{d_1}{d}\right)^4 + \zeta_7,$$

$$k_2 = \zeta \frac{l_2}{d_2} + \frac{d_2{}^2 l_2}{d^2 s} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_4 \left(\frac{d_2}{d_3}\right)^4 + \zeta_6 \left(\frac{d_2}{d}\right)^4 + \zeta_8,$$

so ergibt sich noch:

$$L=\left\{h-\left(4\varphi\frac{b}{d}(h_1+h_2)+\left[k_1\left(\frac{d}{d_1}\right)^4+k_2\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g}\right)\right\}\frac{n}{60}Fs\gamma.$$

Sei die Aufgangszeit $t_1=\nu_1 t$, die Niedergangszeit $t_2=\nu_2 t$, und $t=t_1+t_2=\frac{60}{n}$.

Sei $v=\frac{2s}{t}=\frac{2ns}{60}$ die mittlere Geschwindigkeit des ganzen Spieles, so sind die mittleren Geschwindigkeiten beim Auf- und Niedergange:

$$v_1=\frac{v}{2\nu_1},\quad v_2=\frac{v}{2\nu_2},$$

und:

$$L=\left\{h-\left(4\varphi\frac{b}{d}(h_1+h_2)+\left[k_1\left(\frac{1}{2\nu_1}\right)^2\left(\frac{d}{d_1}\right)^4+k_2\left(\frac{1}{2\nu_2}\right)^2\left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]\frac{v^2}{2g}\right)\right\}\frac{n}{60}Fs\gamma.$$

Auch kann man $\frac{n}{60}Fs=Q$ setzen, und da:

$$v=\frac{2Q}{F}=\frac{8Q}{\pi d^2}$$

ist:

$$L=\left\{h-\left[4\varphi\frac{b}{d}(h_1+h_2)+\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{\nu_1^2d_1^4}+\frac{k_2}{\nu_2^2d_2^4}\right)+\frac{1}{2g}\left(\frac{8Q}{\pi}\right)^2\right]\right\}Q\gamma.$$

Diese Arbeit ist selbstverständlich zu verdoppeln, wenn die Maschine eine doppelt wirkende ist.

Die Leistung ist im Maximum, wenn:

$$\frac{k_1}{\nu_1^3d_1^4}=\frac{k_2}{\nu_2^3d_2^4}.$$

Es ergibt sich dies durch Differenziiren. Man hat dann:

$$\nu_1=\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{k_2d_1^4}{k_1d_2^4}}},\quad \nu_2=\frac{1}{1+\sqrt[3]{\frac{k_1d_1^4}{k_2d_2^4}}}.$$

Fig. 220.



Diese Zahlen geben also das vortheilhafteste Verhältniss zwischen Aufgangs- und Niedergangszeit an.

Es ist jedoch bis jetzt die Steuerung nicht berücksichtigt. Nehmen wir an, dass dieselbe aus zwei Kolben bestehe (Fig. 220). Der eine S werde von unten mit der mittleren Druckhöhe h_1, von oben mit h_2 gedrückt, sei e die Höhe des Gegenkolbens G über S, also der Wasserdruck unter G gleich h_2-e, die über G h_1-e oder h_2-e, je nachdem das Druckwasser zugelassen oder abgesperrt wird; noch sollen d_1 und d_2 die Durchmesser von S und G sein. Steht die Kolbenverbindung oben, so wird die Zulassung des Wassers über G ein Niedergehen bewirken, also die Differenz der Wasserdrucke über S und G und das Gewicht R der Kolbenverbindung grösser sein, als die Reibungen von S und G. Die Drucke über und unter G sind nun:

$$\frac{\pi d_2^2}{4}(h_1-e)\gamma,\quad \frac{\pi d_2^2}{4}(h_2-e)\gamma,$$

über und unter S:

$$\frac{\pi\, d_1^2}{4} h_2 \gamma, \quad \frac{\pi\, d_1^2}{4} h_1 \gamma,$$

also die niedertreibende Kraft:

$$P = \frac{\pi}{4}(d_2^2 - d_1^2)\, h\gamma + R,$$

wo das Gefälle $h_1 - h_2 = h$ ist. Die Kolbenreibung ist nun proportional dem Kolbenumfange und der Differenz der Druckhöhen zu beiden Seiten des Kolbens, also:

$$P = \varphi\pi\,(d_1 + d_2)\, h\gamma,$$

und durch Gleichsetzen beider Werthe von P ergibt sich:

$$d_2^2 - d_1^2 + \frac{4R}{\pi\, h\gamma} = 4\varphi\,(d_1 + d_2).$$

Soll aber der Kolben nach Absperren des Wassers über G emporsteigen, so muss der Ueberschuss der Kolbendrucke auf S das Kolbengewicht und die Reibung übertreffen, da die Drucke anf G sich aufheben. Hieraus ergibt sich:

$$d_1^2 - \frac{4R}{\pi\, h\gamma} = 4\varphi\,(d_1 + d_2).$$

Aus den beiden letzten Formeln ist d_1 und d_2 zu berechnen. Man erhält mit Vernachlässigung von R:

$$d_1 = 4\varphi\,(1 + \sqrt{2}) = 4\varphi \cdot 2{,}414,$$
$$d_2 = d_1 + 4\varphi = 4\varphi \cdot 3{,}414.$$

Die Beobachtnng gibt $4\varphi = 0{,}1$.

Aehnlich ist bei 3 Kolben (worunter ein Wende- oder Hülfskolben) die Rechnung durchzuführen.

Das zum Steuern nöthige Wasser bedingt aber einen Arbeitsverlust. Um diesen zu verringern, ist der Durchmesser des Gegenkolbens und der Weg der Steuerung so klein als möglich zu nehmen. Dieser Weg hängt von der Höhe des Steuerkolbens und der Communicationsröhre ab, welche Steuercylinder und Treibcylinder verbindet; letztere ist also niedrig und breit zu nehmen. Man macht ihren Querschnitt also rechtwinklig und gibt ihr die Weite d des Treibcylinders. Soll ihr Querschnitt dem der Einfallröhre gleich sein, so muss man setzen:

$$a = \frac{\pi d_1^2}{4d},$$

wo a die Höhe der Communicationsröhre ist.

Damit der Steuerkolben richtig abschliesse, nimmt man ihn dreimal so hoch, als diese Röhre, also $a_1 = 3a$, und der Steuerkolbenweg ist:

$$s_1 = a_1 + a = 4a,$$

und das in einem Spiele verbrauchte Steuerwasser:

$$\frac{\pi d_3^2}{4} s_1 = \pi\, a\, d_3^2,$$

und bei n Spielen in der Minute das in der Secunde verbrauchte Steuerwasser:

$$Q = \frac{na}{60} \pi d_3^2,$$

der Arbeitsverlust in der Secunde endlich:

$$L_1 = \frac{ns_1}{60} \frac{\pi\, d_3^2}{4} h\gamma = \frac{s_1}{s}\left(\frac{d_3}{d}\right)^2 L,$$

desto kleiner also, je grösser s ist.

Durch Versuche findet Jordan bei den Clausthaler Maschinen den Wirkungsgrad:

$$\eta = 0{,}8284 \text{ bis } 0{,}8527.$$

Jedoch sind diese Versuche unsicher.

Wassersäulenmaschinen sind bei sehr hohen Gefällen (über 100 Fuss) zweckmässiger als verticale Wasserräder, wegen der Abnutzung der letzteren. Die horizontalen übertreffen sie in diesem Falle in Bezug auf den Wirkungsgrad, indess macht es oft Schwierigkeiten, aus der auf- und abgehenden Bewegung der Wassersäulenmaschinen eine rotirende herzustellen, weshalb sie fast nur zum Wasserheben verwendet werden.

Erfinder der Wassersäulenmaschine sind wahrscheinlich Winterschmidt und Höll in der Mitte des vorigen Jahrhunderts. Ausführlicheres über dieselbe enthält Weissbach: Ingenieur- und Maschinenmechanik.

Wasserschnecke (Hydraulik).

Eine schraubenförmig gewundene Röhre, deren Axe gegen den Horizont geneigt ist, und durch eine Kurbel um dieselbe gedreht werden kann. Taucht dieselbe ins Wasser, so hebt sie bei jeder Drehung eine gewisse Wassermenge empor, welche bei wiederholter Drehung in die höheren Windungen steigt, und zum Abflusse gelangt.

Wasserschraube (Hydraulik).

Eine Wasserschnecke mit rechtwinkligen Schraubenflächen; sie ist die zweckmässigste und gebräuchlichste.

Wasserwelle (Hydraulik).

Die Wellen im Wasser sind nach den Untersuchungen der Gebrüder Weber elliptisch und stehen auf der Fortpflan-

zungsrichtung senkrecht. Es steht nicht ganz fest, welche Form diese Ellipsen haben, nach Hagen gehen sie, wenn der Grund sehr tief ist, in Kreise über. Beide Axen der Ellipse nehmen ab mit der Tiefe, weshalb die Wellenbewegung in grösseren Tiefen unmerklich ist. Wie bei den Wellen der festen Körper, der Luft und des Aethers findet sich auch bei den Wasserwellen Reflexion, Refraction, Beugung und Interferenz. Weiteres enthält Weber's Wellenlehre, Hagen: Seeufer- und Hafenbau.

Wasserzoll (Hydraulik).

Diejenige Wassermenge, welche durch eine kreisrunde Oeffnung von 1 Zoll Weite fliesst, wenn der Wasserspiegel 1 Linie über der obersten Stelle der Mündung steht. Nach französischen Angaben entsprechen einem Wasserzoll (alt französisches Maass) in 24 Stunden 19,1953 Cubikmeter Wasser, also in der Minute deren 0,01333. Nach Hagen gibt ein Wasserzoll (preussisch Maass) in 24 Stunden 520 Cubikfuss, also in der Minute 0,3611.

Watt'sches Gesetz (Wärmelehre).

Das bekannte Gesetz, wonach die Summen der latenten und freien Wärmemengen eines Dampfes bei jeder Temperatur constant sind. Dies Gesetz widerspricht insofern der neueren Wärmelehre, da es hierbei auch auf den Druck ankommt, welchen der Dampf bei seiner Bildung zu überwinden hat (vergleiche den Artikel: Wärmelehre).

Watt'sches Parallelogramm (Maschinenlehre).

Siehe die Artikel: Balancier und Gradeführung, auch Dampfmaschine.

Weber'sches Gesetz (Mathematische Physik).

Dasjenige Gesetz, durch welches Weber gewisse Erscheinungen der electrischen Einwirkung erklärt, welche das Newton'sche Attractionsgesetz nicht vollständig beweist. Nach dem Weber'schen Gesetze ist nämlich die Anziehung zweier Stromelemente auf einander nicht allein von ihrer Entfernung, sondern auch von der relativen Geschwindigkeit, mit der sie sich einander nähern (oder von einander entfernen), ja sogar vom Differenzialquotienten derselben abhängig und durch die Formel gegeben:

$$A = \frac{Mm}{\nu^2}\left[a - b\cdot\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + c\,\frac{d^2\nu}{dt^2}\right],$$

wo M, m die Massen der Elemente, ν ihre Entfernung, t die Zeit, a, b, c positive Constanten sind. Das Newton'sche Gesetz entspricht also dem Falle, wo $b = c = 0$ ist.

Dies Gesetz setzt also voraus, dass bewegte Massen sich anders als ruhende in Bezug auf ihre Anziehung gegen einander verhalten, und widerspricht also den bis jetzt in Bezug auf die Naturkräfte angenommenen Voraussetzungen (vergleiche den Artikel: Electricität).

Wechsel (Kaufmännische Rechenkunst).

Eine in bestimmten gesetzlich vorgeschriebenen Formen abgefasste Schuldverschreibung, welche dem Besitzer gewisse Rechte, namentlich schleunigeres und gewisseres Rechtsverfahren sichert.

Die Wechsel sind entweder trockene, d. h. solche, wodurch der Aussteller selbst Schuldner wird, oder gezogene (trassirte), worin eine dritte Person veranlasst wird, den Wechsel zu bezahlen. Diese Letztere wird erst Schuldner, indem sie den Wechsel durch Namensunterschrift anerkennt (acceptirt). Ferner sind die Wechsel entweder in einem Exemplar ausgestellt und heissen dann Solawechsel oder auch Primawechsel, der erstere Name wird jedoch gewöhnlich nur für trockene Wechsel gebraucht, oder sie werden in zwei, selten drei Exemplaren, die dann Prima-, Secunda-, Tertia-Wechsel heissen, ausgestellt. Die Secunda wird nur dann bezahlt, wenn die Prima nicht bezahlt ist, ebenso die Tertia, wenn weder Prima noch Secunda bezahlt sind. Zweck ist, den Nachtheilen zuvorzukommen, welche durch Vernichtung oder Verlust des einen Exemplars entstehen.

Wird ein Wechsel nicht zur Verfallzeit bezahlt, so muss er durch eine Gerichtsperson oder einen Notar protestirt werden, d. h. die Nichtzahlung muss in gesetzlich vorgeschriebener Weise festgestellt werden, damit der Wechsel seine Wechseleigenschaft nicht verliere.

Die Wechsel vermitteln Zahlungen nach fremden Städten und Ländern und dienen überhaupt statt des baaren Geldes zum Verkehrsaustausch. Wenn z. B. A aus Berlin von B aus London Eisen bezieht, so wird er für diese Summe statt des Geldes einen Wechsel, etwa nach 3 Monaten zahlbar, einschicken. Diesen Wechsel gibt B an C, ebenfalls

in London ansässig, gegen baare Zahlung weiter, und dieser schickt ihn an *D* in Berlin für empfangene Wolle, worauf *D* denselben an *A* zur Zahlung präsentirt. Es ist auf diese Weise das Hin- und Hergehen einer Summe und die damit verbundenen Kosten vermieden. Es ist klar, dass auf diese Weise Wechsel oft durch verschiedene Hände und nach verschiedenen Orten kommen, ehe sie zur Zahlung gelangen. Je nach Angebot und Nachfrage der Wechsel, auch nach der Lebhaftigkeit des Productengeschäfts zwischen verschiedenen Orten, sind also die ersteren einem Course unterworfen. Wenn also z. B. viele Pariser Kaufleute in London Zahlung zu leisten, also Waaren von London empfangen haben, so haben Londoner Wechsel in Paris einen hohen Cours.

Aus dem Wechselverkehr gehen verschiedene Rechnungen hervor, die man als Wechselrechnung zusammenfasst. Die Wechselrechnung zerfällt in:

1) Wechselreduction, d. h. Bestimmung des Werthes von Wechselsummen je nach Cours und auch mit Berechnung der Spesen.

Beispiel.

Hamburg sendet einen Wechsel über 590 Ducaten nach Leipzig, wo er mit 12½ Proc. Agio (1 Ducaten = 3 Thaler) verkauft wird. Der Betrag wird in einem Wechsel zu 145½ Thlr. (145½ Thlr. = 300 Mark Hamburgisch) nach Hamburg remittirt. Hamburg berechnet 1 Proc. Spesen, Leipzig 1⅙ Proc. Wie viel Mark Banko hat Hamburg wieder erhalten?

Auflösung.

Der Ansatz geschicht nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} x \text{ Mark} &= 590 \text{ Ducaten},\\ 1 \text{ Ducaten} &= 3 \text{ Thlr. Gold},\\ 100 \text{ Thlr. Gold} &= 112\tfrac{1}{2} \text{ Thlr. Silber},\\ 100 \text{ Thlr. ohne Spesen} &= 101 \text{ Thlr. mit Spesen},\\ 145\tfrac{1}{2} \text{ Thlr.} &= 300 \text{ Mark},\\ 100 \text{ Mark ohne Spesen} &= 97\tfrac{5}{6} \text{ Mark mit Spesen}, \end{aligned}$$

$$x = \frac{590 \cdot 3 \cdot 225 \cdot 101 \cdot 300 \cdot 587 \cdot 2}{100 \cdot 100 \cdot 291 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 6},$$

d. h.:

$$x = \frac{31481937}{7760} = 4056\tfrac{7377}{7760} \text{ Mark}.$$

2) Berechnung des Gewinnes und Verlustes beim Wechselhandel.

Beispiel.

Genua kauft einen Wechsel von 6000 Mark Banko auf Hamburg zu 188¼, wobei 1 Proc. Courtage gezahlt wird, und sendet solchen zum Verkauf nach Paris, um für den Betrag nach Abzug der Spesen Papiere auf Madrid zu kaufen. Paris berechnet das Hamburger Papier zu 186½, kauft das Madrider zu 15,30, rechnet 1 Promille Spesen. Das Madrider Papier wird zu 378 verkauft und 1 Promille Courtage bezahlt. Wieviel hat Genua gewonnen oder verloren?

Auflösung.

Die Valuta der verschiedenen Course sind aus dem Ansatze zu ersehen:

1) Ausgabe:

$$\begin{aligned} x \text{ Lire} &= 6000 \text{ Mark Banko},\\ 1 \text{ Mark Banko} &= 188\tfrac{1}{4} \text{ Centesimi},\\ 100 \text{ Centesimi} &= 1 \text{ Lire},\\ 1000 \text{ Lire} &= 1001 \text{ mit Courtage}, \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \cdot 753 \cdot 1001}{100 \cdot 2},$$

$$x = \frac{2261259}{200} = 11306 \text{ Lire } 3 \text{ Cent.}$$

2) Einnahme:

$$\begin{aligned} x \text{ Lire} &= 6000 \text{ Mark,} \\ 100 \text{ Mark} &= 186\tfrac{1}{2} \text{ Francs,} \\ 100 \text{ Francs} &= 99 \text{ Francs (mit Spesenabzug),} \\ 15{,}3 \text{ Francs} &= 1 \text{ Doblon,} \\ 1 \text{ Doblon} &= 4 \text{ Pesos,} \\ 1 \text{ Peso} &= 378 \text{ Cent.,} \\ 100 \text{ Cent.} &= 1 \text{ Lire,} \\ 1000 \text{ Lire} &= 999 \text{ Lire (mit Courtage-Berechnung).} \end{aligned}$$

$$x = \frac{6000 \cdot 373 \cdot 99 \cdot 4 \cdot 378 \cdot 999 \cdot 10}{100 \cdot 100 \cdot 153 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 2},$$

also nachdem gehoben ist:

$$x = \frac{373 \cdot 11 \cdot 189 \cdot 999}{17 \cdot 25 \cdot 1000},$$

$$x = 10936 \text{ Lire } 82 \text{ Cent.}$$

Der Verlust beträgt also 369 Lire 48 Cent.

3) Wechselarbitragerechnung lehrt, wenn mehrere Wege zur Zahlung gegeben sind, den vortheilhaftesten zu finden.

Beispiel.

Zu einer Zahlung, die Paris in Amsterdam zu leisten hat, sind die Wege über London oder Wien offen. Die Course stehen:

	in Paris	in Amsterdam
London	24¾ Fr.	37¾ βl vls,
Wien	255 Fr.	136½ Proc.

Wie hoch kommt auf jedem Wege die feste Valuta von 3 Francs zu stehen?

a) über London:

$$\begin{aligned} x \text{ Fl.} &= 3 \text{ Fr.,} \\ 24\tfrac{3}{4} \text{ Fr.} &= 1 \text{ L. St.} \\ 1 \text{ L. St.} &= 37\tfrac{3}{4} \ \beta\text{l vls.} \\ 10 \ \beta\text{l vls.} &= 3 \text{ Fl.} \end{aligned}$$

$$x = \tfrac{151}{110},$$

$$x = 1 \text{ Fl. } 7\tfrac{5}{11} \text{ Stüv.}$$

b) über Wien:

$$\begin{aligned} x \text{ Fl.} &= 3 \text{ Fr.} \\ 255 \text{ Fr.} &= 100 \text{ Fl.} \\ 100 \text{ Fl. österr.} &= 136\tfrac{1}{2} \text{ Fl. niederl.} \end{aligned}$$

$$x = \frac{3 \cdot 273}{2 \cdot 255} = \frac{819}{765},$$

$$x = 1 \text{ Fl. } 1\tfrac{7}{17} \text{ Stüv.}$$

4) Wechselcommissionsrechnung.

Sie tritt dann ein, wenn Jemand beauftragt wird, zu einem vorgeschriebenen Course zu verkaufen und einzukaufen, d. h. für den Ertrag des verkauften Papieres eines gewissen Platzes Rimessen in vorgeschriebener Wechselart zu machen. Haben sich nun bei Ankunft des Auftrags einer oder beide Course geändert, so tritt die hier zu lösende Frage ein, ob die Ordre ohne Schaden des Auftraggebers auszuführen sei, d. h. ob eine Coursveränderung die andere wieder ausgleiche.

Beispiel.

Amsterdam erhält von Hamburg den Auftrag, Pariser Papier zu $56\frac{1}{4}$ zu kaufen, und den Betrag im Cours von 35,10 auf ihn ohne Spesen zu trassiren. Die Pariser Wechsel sind jedoch nur zu $56\frac{1}{2}$ zu haben. Zu welchem Course muss er die Tratte auf Hamburg verkaufen können, wenn er ohne Ueberschreitung des limitirten Courses noch $\frac{1}{4}$ Proc. Spesen machen will?

Auflösung.

Sei x der gesuchte Cours der Tratte, so ist:

$$56\tfrac{1}{4} : 56\tfrac{1}{2} = 35{,}1 : x,$$

und wegen der Spesen:

$$100 : 100\tfrac{1}{4} = x : y,$$

also:

$$y = \frac{100\frac{1}{4} \cdot 35{,}1 \cdot 56\frac{1}{2}}{56\frac{1}{4}},$$

$$y = 35{,}432.$$

Wechselducaten (Münzrechnung).

Eine spanische Rechnungsmünze von 375 Maravedis.

1 Mark Cöln. = 9,320 Wechselducaten.

Wechselwinkel (Geometrie).

Je zwei Winkel von denen, welche entstehen, wenn zwei Grade von einer dritten geschnitten werden, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen, beides äussere oder beides innere aber keine Nebenwinkel sind.

Weissgroschen (Münzrechnung).

Böhmische Rechnungsmünze. 1 Schock böhmische Groschen = 2 Reichsthaler (im 20-Guldenfuss), = 3 Reichsgulden, = 60 Böhmen, = $77\frac{1}{7}$ Weissgroschen, = 180 Kreuzer, = 540 Weisspfennig.

Welle (Maschinenlehre).

Gleichbedeutend mit Walze und Cylinder. Vergleiche den Artikel: Rad an der Welle.

Wellenlehre (Mathematische Physik).

Die Wellenlehre findet ihre vollständige Auseinandersetzung in der mathematischen Optik, mit der sie abgesehen von den physiologischen Eigenschaften des Lichtes als identisch zu betrachten ist. Vergleiche daher den Artikel: Licht. Was die Wellen der Luft und die Wellenbewegung in festen elastischen Körpern anbetrifft, so sind die Artikel: Schwingungen und Akustik zu vergleichen.

Wendepunkt (Geometrie).

Derjenige Punkt, wo eine Curve vom Concaven zum Convexen übergeht, also ihre Krümmung das Zeichen ändert. Der Winkel l, welchen ihre Tangente mit der Axe der x macht, muss dann offenbar ein Maximum oder Minimum sein, und da $\operatorname{tg} l = \frac{dy}{dx}$ ist, so ist die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ die Bedingung eines Wendepunktes (vergleiche den Artikel: Analytische Geometrie).

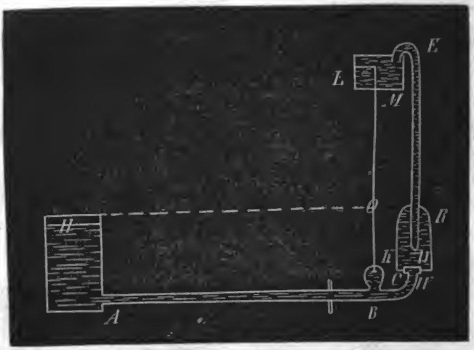
Werst (Metrologie).

Gleichbedeutend mit russischer Meile. Ein Werst enthält 1500 Arschinen, und gehen 104,30 Werste auf einen Grad des Aequator.

Widder — hydraulischer, auch Stossheber (Hydraulik).

Instrument zum Heben des Wassers auf mässige Höhen. Dies Instrument ist 1796 von Montgolfier erfunden. Der Kasten HA (Fig. 221) nimmt das Aufschlagewasser auf, er steht durch Röhre ABC mit Windkessel R in Verbindung, in welchen wieder die Steigröhre DE mündet, deren Mündung E in den Kasten LM taucht, welcher das gehobene Wasser aufnimmt. Bei der Mündung C der Leitungsröhre befindet sich ein zu öffnendes Ventil W (Steigventil), bei B ist eine kurze Röhre BK mit einem nach unten zu öffnenden Ventil V (Sperrventil) angebracht. — Seien V und W anfänglich verschlossen, die Röhren ABC und DE mit Wasser gefüllt, im Windkessel R möge sich Wasser und Luft befinden. Wird nun V niedergedrückt, also Mündung K geöffnet, so fliesst hier Wasser aus, und aus AH Wasser nach. Der Druck auf V ist dann von unten grösser als von oben, das Ventil schliesst sich also bald, was eine Störung in der Bewegung des Wassers zur Folge hat. Dasselbe steigt aus AB empor, öffnet das Ventil W und steigt in den Windkessel R, drückt daselbst die Luft zusammen, wodurch in E ein Ausguss erfolgt. Dadurch kommt das Wasser in AB zur Ruhe und in Folge des grösseren Drucks vom Windkessel her in die umgekehrte Bewegung, so dass sich W schliesst. Das Nachfliessen aus D hört nun auf, und der Ueberdruck der Atmosphäre über den Wasserdruck in B

Fig. 221.



wird wieder hergestellt, so dass V sich wieder öffnet, und das Spiel von Neuem beginnt. — Der Widder hebt also durch Stoss unmittelbar einen Theil des Aufschlagewassers. Gewöhnlich nimmt man zwei Windkessel, einen innerhalb des anderen, um mittels der darin eingeschlossenen Luft die nachtheiligen Wirkungen des Stosses abzuschwächen.

Ueber die Leistung des Stosshebers hat Eitelwein Versuche angestellt.

Sei Q die durch das Sperrventil abgeschlossene Wassermenge, Q_1 die emporgeförderte, h das Gefälle OK bis zur Ausmündung K des Sperrventils, h_1 die Förderhöhe OL, so ist der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{Q_1 h_1}{Qh},$$

und Eitelwein findet durch Versuche:

$$\eta = 1{,}12 - 0{,}2 \sqrt{\frac{h_1}{h}}.$$

Wenn das Verhältniss $\frac{h_1}{h}$ von 1 bis 20 wächst, so nimmt danach der Wirkungsgrad von 0,9 bis 0,2 ab. Die verbrauchten Wassermengen $Q+Q_1$ verhalten sich ungefähr wie die Quadrate der Durchmesser d der Leitungsröhren, also die Weite:

$$d = \frac{\sqrt{60\,(Q+Q_1)}}{21} \text{ Zoll},$$

wenn Q und Q_1 für die Minute in Kubikzoll gegeben sind.

Die Länge der Leitungsröhre soll sein:

$$l = h_1 + \frac{h_1}{h} \text{ Fuss.}$$

Die Weite der Steigröhre wird gleich $\frac{1}{2} d$ genommen, der Sperrmündung der Querschnitt der Leitungsröhre gegeben. Beide Ventile sind möglichst nahe zu rücken, dem Windkessel der Fassungsraum zu geben, das Sperrventil kann auch unter Wasser stehen.

Widerstand (Mechanik).

So wird bei Maschinen jede der beabsichtigten Bewegung entgegengesetzte Kraft genannt. Soll also z. B. eine Last gehoben werden, so wirkt das Gewicht derselben, d. h. die Schwere, als Widerstand, beim Verkleinern ist die Festigkeit u. s. w. als Widerstand zu betrachten.

Im engeren Sinne kann als Widerstand jede Kraft bezeichnet werden, welche, ohne selbst jemals Bewegung hervorzubringen, der beabsichtigten immer entgegenwirkt. In diesem Sinne sind die wichtigsten Widerstände: Reibung und Widerstand der Flüssigkeiten, namentlich der Luft. Mit Bezug auf beide ist auf die betreffenden Artikel zu verweisen. Dergleichen Widerstände sind oft schwer der Rechnung zu unterwerfen, da die Gesetze derselben, oftmals auch ihre Ursachen nicht völlig bekannt sind. Man betrachtet sie in der angewandten Mechanik oft als Hindernisse, welche die theoretische, d. h. ohne Rücksicht auf

die berechnete Arbeit verkleinern. Dann wird gewöhnlich in Bezug auf die Rechnung in folgender Weise verfahren. Zunächst wird das Arbeitsquantum Q ohne Rücksicht auf die Widerstände festgestellt (theoretisches Arbeitsquantum); da das sich wirklich ergebende nun geringer ist, so wird dasselbe gleich αQ gesetzt, wo α ein echter Bruch ist, und α durch Versuche gefunden. Die zur Ueberwindung der Widerstände verbrauchte Arbeit ist dann gleich $(1-\alpha)Q$, und $1-\alpha$ kann als Widerstandscoefficient bezeichnet werden.

Widerstand der Flüssigkeiten (Mechanik).

Der von der Undurchdringlichkeit und Elasticität der Flüssigkeiten herrührende Widerstand gegen eine in der Flüssigkeit bewegte Masse. Tropfbare und elastische Flüssigkeiten scheinen hierbei denselben Gesetzen zu gehorchen.

Newton hat versucht, dies Gesetz durch Anknüpfen an die Theorie des Stosses zu ermitteln. Die Methode dieser Untersuchung ist in dem Artikel: Stoss (Abschnitt 7) mitgetheilt, und wir geben hier nur die Resultate derselben sowie anderer Beobachtungen.

I) Der Widerstand erstreckt sich über den ganzen Theil der Oberfläche, welcher die Flüssigkeit verdrängt, also z. B. wenn eine Kugel sich ohne Rotation bewegt, auf diejenige Halbkugel, welche sich der Flüssigkeit entgegenbewegt. Allgemein ist dieser Theil der Oberfläche so zu charakterisiren, dass die nach aussen gerichtete Normale mit der Bewegungsrichtung einen spitzen Winkel bildet. Die Richtung des Widerstandes ist dann die der nach unten gerichteten Normale. Sonach zerfällt der Widerstand, wenn, wie hier allgemein angenommen werden soll, der bewegte Körper ein fester ist, in einen Theil, der die fortschreitende Bewegung hemmt, und in einen, der die rotirende hemmt oder hervorbringt, letzteres selbst dann, wenn ursprünglich keine solche vorhanden war. Eine solche Umdrehungsgeschwindigkeit findet nach dem eben Gesagten in dem Falle nicht statt, wenn der Körper ein homogener oder homogen geschichteter Umdrehungskörper ist, welcher sich parallel seiner Rotationsaxe im homogenen Mittel bewegt. Denn es wird sich dann um die Rotationsaxe herum der Widerstand gleichmässig verhalten, also die auf der ersteren senkrechte Componente verschwinden und nur eine solche entstehen, die der Axe gleich gerichtet ist, also durch den Schwerpunkt geht. Bei einer nicht rotirenden, aus homogenen Schichten bestehenden Kugel findet dies also immer statt, da jeder Durchmesser eine Rotationsaxe ist.

Es möchte nach dem Obigen sogar scheinen, dass, wenn eine Rotation um die Umdrehungsaxe anfänglich stattfindet, diese durch den Widerstand nicht modificirt werden kann. Die Erfahrung bestätigt dies jedoch nicht vollständig. In der That nämlich findet bei dieser Bewegung eine Einwirkung ausser der hier hingestellten statt, welche als Reibung des Projectils gegen die Flüssigkeit betrachtet werden kann, also der Rotation parallel, und deshalb um die Axe herum ungleichmässig ist, weil die Theile der Flüssigkeit, welchen die Bewegung entgegen gerichtet ist, dichter sind als die übrigen. Im Allgemeinen ist allerdings diese Rotation nicht sehr gross. Es muss auch bemerkt werden, dass selbst bei einer fortschreitenden Bewegung der Theil der Flüssigkeit, welchen die Bewegung nicht verdichtet, eine Einwirkung ausübt, und zwar aus dem Grunde, weil die nachdrängende Flüssigkeit gegen das Projectil drückt, jedoch ist diese Einwirkung gering gegen die oben hingestellte.

II) Die auf Verminderung der fortschreitenden Bewegung wirkende Kraft, welche durch den Widerstand hervorgebracht wird, ist gegeben durch die Formel:

$$W = \varrho \frac{\varphi(v)}{m} (1+\varepsilon) \int \cos \lambda^3 \, df,$$

wo ϱ die Dichtigkeit ist, ε eine Constante, die von der Elasticität des Mittels herrührt, (gewöhnlich wird $\varepsilon = 0$ gesetzt), m die fortbewegte Masse, df das Oberflächenelement, λ der Winkel der nach aussen gerichteten Normale mit der Bewegungsrichtung, v die Geschwindigkeit, φ eine zu bestimmende Function derselben, welche Newton gleich v^2 nimmt. Das Integral ist auf den Theil der Oberfläche zu erstrecken, welche der Flüssigkeit sich entgegen bewegt.

Die Bewegungsgrösse mW, welche hieraus sich ergibt, erhält man durch Multiplication mit m, also:

$$mW = \varrho v^2 (1+\varepsilon) \int \cos \lambda^3 \, df.$$

Für einen homogenen Rotationskörper, der sich der Umdrehungsaxe parallel bewegt, erhält man, wenn letztere Axe der z ist:

$$mW = 2\pi\varrho v^2 (1+\varepsilon) \int_0^a y \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 dy,$$

wo der Anfangspunkt der Coordinaten durch den Schwerpunkt geht, und wenn ds das Bogenelement, y die Ordinate der Curve, deren Rotation die Oberfläche hervorbringt, a der grösste Werth von y ist. Für die Kugel mit Radius r ergibt sich:

$$mW = \tfrac{1}{2}\pi\varrho v^2 (1+\varepsilon) r^2.$$

Ist σ die Dichtigkeit der Kugel, so ist:

$$m = \tfrac{4}{3}\pi r^3 \sigma,$$

also:

$$W = \tfrac{3}{8}\frac{\varrho v^2 (1+\varepsilon)}{r\sigma}.$$

Borda findet durch Versuche:

$$W = \tfrac{9}{16}\frac{\varrho v^2}{r\sigma}.$$

Man thut daher wohl, den Ausdruck $1+\varepsilon = \alpha$ als Erfahrungszahl zu behandeln, und deren Bestimmung der Beobachtung zu überlassen.

Für einen Cylinder mit rechtwinkliger ebener Basis ist $\lambda = 0$, und es erstreckt sich $\int \cos\lambda^2\, df$ auf die ganze kreisförmige Basis. Man hat also, wenn r deren Radius ist:

$$mW = \varrho v^2 (1+\varepsilon)\pi r^2,$$

so dass die Kugel nur den halben Widerstand des Cylinders erleiden würde.

Untersucht man Körper, die einander ähnlich sind, so werden in denselben die Ausdrücke $\int \cos\lambda^2\, df$ proportional den homologen Querschnitten oder auch den Quadraten homologer Strecken sein, man kann also für solche Projectile setzen:

$$W = \lambda\varrho v^2 \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \frac{m_1}{m},$$

oder richtiger:

$$W = \lambda\varrho\varphi(v) \left(\frac{a}{a_1}\right)^2 \frac{m_1}{m},$$

wo λ einen Erfahrungscoefficienten, der von der Form des Projectils und den gewählten Einheiten abhängig ist, a eine beliebige Strecke des Projectils, a_1 die homologe für ein ähnliches von bekannten Dimensionen, welches als Einheit zu betrachten ist, m, m_1 die Massen beider Projectile, $\varphi(v)$ die Function der Geschwindigkeit, welcher der Luftwiderstand proportional ist, bedeutet. Was den Widerstand der Luft anbetrifft, so seien noch p und p_1 Barometerstände, ϱ, ϱ_1 die zugehörigen Dichtigkeiten der Luft, und t, t_1 die Temperaturen, dann ist:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{\varrho(1+\alpha t)}{\varrho_1(1+\alpha t_1)},$$

wo $\alpha = 0{,}00366$ ist, wenn man Centesimalgrade voraussetzt, also wenn:

$$\lambda\varrho_1(1+\alpha t_1) = \mu$$

gesetzt wird:

$$W = \frac{\mu p \varphi(v)}{p_1(1+\alpha t)} \frac{a^2}{a_1^2} \frac{m_1}{m}.$$

Ist das Projectil ein Rotationskörper, so kann man für a den Radius oder Durchmesser des grössten Querschnittes nehmen. Dieser Fall findet bei gezogenen Geschossen statt.

Wir entnehmen einige auf diese sich beziehenden Zahlenwerthe der Schrift: „Die Ballistik der gezogenen Geschütze von M. Prehn."

Hiernach sind die Durchmesser der grössten Querschnitte:

für den gezogenen preussischen 24-Pfünder:

$$a = 5{,}82'',$$

für den 12-Pfünder:

$$a = 4{,}70'',$$

für den 6-Pfünder:

$$a = 3{,}60'',$$

Die Massen m können in Gewichts-Einheiten gegeben werden, und zwar ist das Gewicht des Projectils für den 24-Pfünder:

$$m = 54.3 \text{ Pfund},$$

für den 12-Pfünder:

$$a = 29 \text{ Pfund},$$

für den 6-Pfünder:

$$a = 13{,}8 \text{ Pfund}.$$

Setzt man den mittleren Barometerstand $p = p_1 = 28$ Pariser Zoll, und eine Temperatur von 15° Réaumur = 18,75 Centesimalgrad voraus, so ergibt sich für Versuche mit dem 24-Pfünder, wenn man nach Newton $\varphi(v) = v^2$ setzt, nach Erfahrungsresultaten:

$$W = 0{,}0000248\, v^2.$$

Nimmt man dessen Gewicht, also 54.3 Pfund als Einheit, und beginnt die Temperaturen von 18,75° zu zählen, so ist in dem Werthe von W:

$$p_1 = p, \quad t = 0, \quad m_1 = m, \quad a = a_1$$

zu setzen, also:

$$\mu = 0{,}0000248.$$

Für beliebige Projectile von ähnlicher Form gibt dann der Werth von w das Nöthige, wenn für t der Ueberschuss über 18,75° genommen wird. Man erhält übrigens, wenn:

$$\mu_1 = \mu \frac{a_1{}^2 m}{a^2 m_1}$$

gesetzt wird, nach den hier gegebenen Zahlen:

für den 12-Pfünder:

$$\mu_1 = 0{,}0000309,$$

für den 6-Pfünder:

$$\mu_1 = 0{,}0000505,$$

und kann allgemein setzen:

$$W = \frac{\mu_1 p v^2}{p_1 (1+\alpha t)}.$$

Uebrigens gibt die Newton'sche Annahme, dass $\varphi(v) = v^2$ ist, nicht immer mit den Versuchen übereinstimmende Resultate. Für sehr geringe Geschwindigkeiten, wie dieselbe z. B. bei Pendelschwingungen stattfinden, ist namentlich die Annahme, dass der Widerstand der Geschwindigkeit proportional sei, genauer. Hutton, dem wir sehr genaue Experimente hierüber verdanken, setzt für die Kugel:

$$mW = \frac{\pi P r^2}{8g}(m v^2 + n v + q),$$

wo P das specifische Gewicht der Flüssigkeit, r der Radius der Kugel, g die Beschleunigung der Schwere ist. Durch Experimente findet er:

$$m = 0{,}00003028,$$
$$n = -0{,}0071666,$$
$$q = 0{,}3.$$

Durch diese Formel wurden für Geschwindigkeiten von 600 bis 1800 Fuss gute Resultate erhalten. Dagegen nimmt Hutton für Geschwindigkeiten von 1 bis 100 Fuss an, dass der Widerstand der Grösse $v^{2,11}$ proportional sei.

Widerstandshöhe (Hydraulik).

In der Hydraulik drückt man oft die Arbeitsverminderung, welche durch Widerstände erfolgt, durch die Höhe einer der Bewegung entgegen drückenden Wassersäule aus, welche Widerstandshöhe heisst.

Wiege.

Im mechanischen Sinne ein von einer Cylinderfläche begrenzter unregelmässiger Körper, welcher sich rollend auf einer horizontalen Ebene bewegt, und nur durch einen Anfangsstoss und die Schwere angegriffen ist.

Wigtje (Metrologie).

Niederländisches Handelsgewicht, gleich 1 Gramm.

Winde (Maschinenlehre).

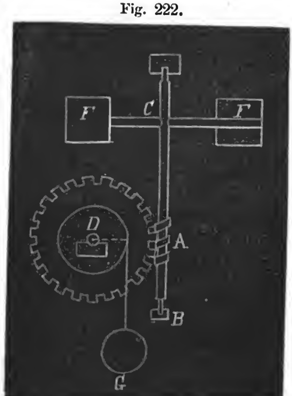
Eine stehende, meist transportirbare Welle, welche von Menschen- oder Thierkräften bewegt wird.

Hydraulische Winde ist eine Art hydraulischer Presse, welche zur Hebung und zum Fortschieben von Lasten verwendet wird.

Windfang, auch Flügelrad (Maschinenlehre).

Apparat zur Erzeugung einer gleichförmigen Bewegung, welcher jedoch wegen der grossen Arbeitskraft, die er in Anspruch nimmt, nur bei Bewegungen, die kurze Zeit dauern, in Anwendung kommt, z. B. bei den Schlagwerken der Uhren. — Auf einer Welle BC (Fig. 222) mit zwei ebenen Flügeln F, F in

Fig. 222.



der Ebene der Umdrehungsaxe befindet sich ein kleines Getriebe oder stark an-

steigendes Schraubengewinde A, in welches ein Zahnrad ADE greift, das durch eine Feder oder ein Gewicht in Umdrehnng versetzt wird. Der Luftwiderstand gegen die Flügel wächst dann sehr schnell mit der zunehmenden Geschwindigkeit, und wenn dieselbe eine gewisse Grösse erreicht hat, compensirt er die Umdrehungskraft, so dass die Bewegung gleichmässig wird.

Sei F der Inhalt beider Flügelflächen, γ die Dichtigkeit der Luft, ζ ihr Widerstandscoefficient, v die Geschwindigkeit, l die Entfernung der Flügelmitte von der Axe, und der Luftwiderstand proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit, so ist das Drehnngsmoment des Widerstandes:

$$Ql = \zeta F \gamma \frac{l v^2}{2g}.$$

Sei P die Umdrehnngskraft nach Abzug der Reibung, r der Hebelarm dieser Kraft, so ist:

$$Pr = Ql,$$

also:

$$v = \sqrt{\frac{2g\,Pr}{\zeta F l \gamma}}.$$

Wächst P um eine kleine Grösse p etwa in Folge einer Aenderung in den Reibnngsverhältnissen, und möge v nm s zunehmen, so erhält man durch Differenziiren:

$$\frac{2s}{v} = \frac{p}{P},$$

also wenn die Kraft innerhalb der Grenzen $P-p$ und $P+p$ schwankt, wird die Geschwindigkeit in den Grenzen:

$$v\left(1-\tfrac{1}{2}\frac{p}{P}\right),\quad v\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{p}{P}\right)$$

sich befinden. Uebrigens ist ζ nicht völlig constant, sondern wenn die Flächen rechtwinklig sind:

$$\zeta = 1{,}254\left(1+\frac{1{,}295\,\sqrt{F}}{l}\right).$$

Windmühle (Maschinenlehre).

Siehe Windrad.

Windrad (Pneumatik).

1) Einrichtung der Windräder.

Ein durch die bewegte Luft in Umdrehung versetztes Rad zur Vermittelnng von Arbeitsleistungen wird Windrad genannt, das Gebäude, welches dasselbe unterstützt und ausserdem die damit verbundene Zwischen- und Arbeitsmaschine aufnimmt, heisst Windmühle. — Das Windrad muss so construirt sein, dass der Wind nicht von beiden Seiten gleich stark stösst, weil sonst das Rad still stände, und dies unterscheidet hauptsächlich Wind- und Wasserräder. Erstere befinden sich nämlich ganz in der Luft, während Wasserräder nur theilweise oder wenigstens nicht gleichmässig dem Wasser ausgesetzt sind. — Das Windrad kann in einem Schaufelrade bestehen, dessen eine Seite durch einen festen Mantel vor dem Winde geschützt ist, oder die Schaufeln sind an Angeln so aufgehängt, dass sie sich auf einer Seite mit der breiten Fläche dem Winde entgegenstellen, auf der anderen aber demselben die schmale Seite darbieten. Solche Räder laufen in Horizontalebenen, um sie nicht stellen zu müssen. Häufiger aber werden Flügelräder angewandt, deren Axen dem Winde entgegen, also mehr horizontal gerichtet sind, und deren wenige Arme (gewöhnlich vier) breite Flächen (Flügel) tragen, welche unter einem schiefen Winkel dem Winde entgegenstehen. Diese Windräder heissen auch Verticalräder. Dieselben verrichten mehr Arbeit als die ersteren, da alle Flügel gleichzeitig arbeiten, sie leisten ungefähr das Vierfache der Arbeit als die Schaufelräder, und sind daher hier ausschliesslich zu betrachten.

Ein Flügelrad besteht aus einer starken Welle von Holz oder Gusseisen, 5 bis 15° gegen den Horizont geneigt. Kopf heisst die Stelle der Welle, wo die Flügel aufsitzen, Hals der dahinter liegende abgerundete Theil. Ein Transmissionsrad an der Welle dient zur weiteren Mittheilung der Bewegnng, der Zapfen hinten an der Welle ist nöthig, um das Rad völlig zu unterstützen. Die Stärke des Halses ist $1\frac{1}{2}$ bis 2 Fuss bei hölzernen, $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ Fuss bei eisernen Wellen.

An den Windflügeln sind zu unterscheiden: Die Windruthen, vom Wellenkopfe auslaufende Arme von etwa 30 Fuss Länge, deren jeder einen Flügel trägt. Die Anzahl ist 4, selten 5 oder 6, sie sind an der Welle 1 Fuss dick, 9 Zoll breit, am äusseren Ende 6 Zoll dick, $4\frac{1}{2}$ Zoll breit. Ihre Befestigung ist verschieden. Bei Holzwellen steckt man 2 Ruthen rechtwinklig durch den Kopf, bei gusseisernen Wellen wendet man Schrauben an. Sprossen oder Scheiden sind hölzerne Querarme, welche durch die Ruthe gesteckt sind, die letztere ist daher in Abständen von $1\frac{1}{4}$ bis $1\frac{1}{2}$ Fuss durchlocht. Die

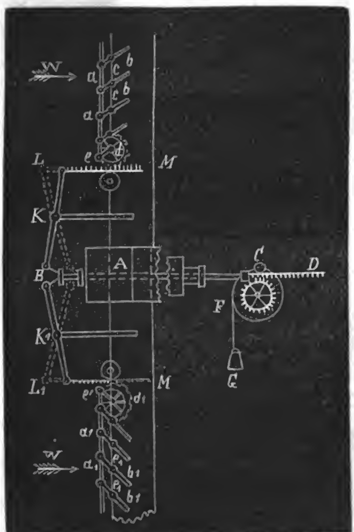
innerste Sprosse ist $\frac{1}{7}$ bis $\frac{1}{6}$ der Armlänge vom Wellenmittel entfernt, und ihre Länge ist etwa gleich diesem Abstande; die äusserste hat $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{4}$ der Armlänge. Gewöhnlich ist die Ruthe nicht in der Mitte der Flügel, so dass die grössere Fläche dem Winde zu gerichtet ist, dieselbe ist mit Segeltuch oder Holz (Windthüren) bedeckt. Den schmaleren Theil umgibt das sogenannte Windbrett. Die Flügel können eben, windschief oder hohl sein. Bei den ersteren sind sämmtliche Sprossen gleich 12 bis 18° gegen die Umdrehungsebene geneigt, bei windschiefen Flügeln weichen die inneren Sprossen etwa 24, die äusseren 6° von dieser Ebene ab. Bei hohlen Windflügeln sind krumme Windruthen und Sprossen anzuwenden. — Die äusseren Enden der Scheiden sind durch Saumlatten verbunden, ausserdem oft Zwischenlatten eingesetzt. Eine Holzbedeckung besteht aus 4 Thüren, die aus dünnen Holzbrettchen zusammengesetzt und durch Riegel am Flügelgerippe befestigt sind. — Die Segeltuchdecke wird durch Schlingen und Haken befestigt.

Die Axe des Rades muss immer in die Richtung des Windes gestellt werden, ihre Unterstützung muss also um eine verticale Axe drehbar sein. Je nach der Art dieser Drehung unterscheidet man zwei Klassen von Windmühlen, die deutsche oder **Bockmühle** und die **holländische** oder Thurmmühle.

Die **Bockmühle** ist ganz und gar um eine feste Säule (Ständer oder Hausbaum) drehbar, die **Thurmmühle** steht fest und nur das Haupt (Haube) mit der Welle wird gedreht.

Da der Wind ungleiche Geschwindigkeit hat, so sind besondere Regulirungsmittel nöthig. — **Die Bremse oder der Pressring** umgibt die obere Hälfte des Transmissionsrades, und wird aufgedrückt, wenn der Gang desselben zu mässig ist, auch kann die Flügelbedeckung vermindert und vermehrt werden, durch Auf- und Abwickeln des Segeltuchs, oder Wegnehmen und Auflegung

Fig. 223.



der Holzthüren. Auch gibt es Windräder, die sich durch Vergrösserung und Verkleinerung der Stossfläche selbst reguliren. Bei dem Cubit'schen Flügelrade ist A die hohle Flügelwelle (Fig. 223), BC ein durchgehender Metallstab, CD eine Zahnstange, welche in C so mit BC verbunden ist, dass sie nur an der Bewegung der Axe an der Drehung um die Axe theilnimmt. Dieselbe greift in das Zahnrad E, und dies sitzt mit Rolle F auf einer Axe, die mittels des Gewichtes G gespannt wird. Die Flügelbedeckung besteht aus dünnen Holz- oder Blechkappen bc, b_1c_1 . . ., welche durch die Arme ac, a_1c_1 um die Axen c, c_1 . . . drehbar sind. Diese Arme sind durch Stangen ae, a_1e_1 . . . mit einander, und durch Arme de, d_1e_1 mit Zahnrädchen d, d_1 . . . verbunden, so dass die Drehung der letzteren die Klappenstellung regulirt. Endlich sind Hebel BL, BL_1 angebracht, welche sich um die Axen K, K_1 drehen, auf der einen Seite mit BC, auf der anderen mit Zahnstangen LM, L_1M_1 zusammenhängen, deren Zähne in die Rädchen d, d_1 eingreifen. Der Wind strebt nun, die Flügeldeckung zu öffnen, das Gewicht G, sie zu schliessen. Aendert sich die Windgeschwindigkeit, so wird die Klappenstellung verändert, und somit auch die Stossfläche verringert oder vergrössert.

Zur Ermittelung der Windgeschwindigkeit hat man eigene Apparate, Anemometer (vergleiche den entsprechenden Artikel).

2) Leistung der Windräder.

Wir theilen die Flügelfläche in schmale Längenelemente. Man kann wegen des grossen Inhalts der Flügelflächen annehmen, dass der darauf stossende Wind parallel der Flügelfläche abgelenkt wird. Sei c die Windgeschwindigkeit, v die Flügelgeschwindigkeit, Q die Windmenge, welche in der Secunde auf ein Element trifft, γ die Luftdichtigkeit, α der Winkel der Windrichtung mit dem Element, so ist der Normalstoss des Windes:

$$N = \frac{c-v}{g} \sin\alpha \, Q\gamma,$$

vorausgesetzt, dass der Flügel parallel dem Windstosse sich bewegt.

Sei G der Querschnitt des Stroms, F der Inhalt des Elements, also $G = F \sin\alpha$. G aber nimmt die ganze Stossfläche ein, und es ist daher:

$$Q = G(c-v),$$

da die Fläche mit Geschwindigkeit v ausweicht. Man hat also:

$$N = \frac{(c-v)^2}{g} \sin\alpha \, G\gamma$$

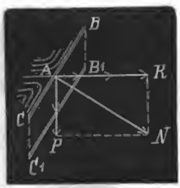
$$= \frac{(c-v)^2}{g} \sin\alpha^2 \, F\gamma.$$

Ausser diesem Stosse gegen die Vorderfläche aber findet noch eine Wirkung gegen die Hinterfläche des Elementes statt, da ein Theil des am Umfange der Fläche vorbeigehenden Windes in Wirbel geräth, und dabei den der relativen Geschwindigkeit $(c-v)\sin\alpha$ entsprechenden Druck $\frac{(c-v)^2}{2g} \sin\alpha^2 \, F\gamma$ verliert. Durch Vereinigung beider Wirkungen erhält man:

$$N = 3\frac{(c-v)^2}{2g} \sin\alpha^2 \, F\gamma.$$

Indess bewegt sich der Flügel BC (Fig. 224) nicht in Richtung AR des Windes,

Fig. 224.



sondern in Richtung AP senkrecht darauf. In N ist also v durch Geschwindigkeit $Av_1 = v_1$ zu ersetzen, mit welcher der Flügel in Rücksicht auf die Windrichtung ausweicht. Ist v die Umdrehungsgeschwindigkeit, so hat man:

$$v_1 = v \cot\alpha,$$

also:

$$N = \frac{3}{2g}(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 F\gamma.$$

Man zerlegt N aber in zwei Seitenkräfte, P in der Umdrehungsrichtung, R in der Axenrichtung, also:

$$P = \frac{3}{2g}(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 \cos\alpha \, F\gamma,$$

$$R = \frac{3}{2g}(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 \sin\alpha \, F\gamma,$$

und man erhält die Leistung:

$$L = Pv = \frac{3}{2g}(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2\, v\cos\alpha\, F\gamma.$$

Damit L nicht verschwinde, muss:

$$c\sin\alpha > v\cos\alpha \quad \text{und} \quad \cos\alpha > 0,$$

also:

$$\operatorname{tg}\alpha > \frac{v}{c} \quad \text{und} \quad \alpha < 90$$

sein.

Um die grösste Leistung zu finden, ist $\frac{dL}{d\alpha} = 0$ zu setzen; es kommt:

$$(c\sin\alpha - v\cos\alpha)\sin\alpha = 2\cos\alpha(c\cos\alpha + v\sin\alpha),$$

$$\operatorname{tg}\alpha^2 - 3\frac{v}{c}\operatorname{tg}\alpha = 2,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3v}{2c} + \sqrt{\left(\frac{3v}{2c}\right)^2 + c},$$

da die negative Wurzel der obigen Bedingung widerspricht.

Da für die entfernteren Elemente v grösser ist, so muss für diese auch der Stosswinkel α grösser sein, also sind die Flügel windschief zu machen.

Berechnet man aus der letzten Formel v, und setzt in die Leistungsformel ein, so kommt die Maximalleistung:

$$L = \frac{4}{q}\frac{c^2}{2g}F\gamma\,\frac{3\sin\alpha^2 - 2}{\sin\alpha^3}.$$

Sei jetzt die Umdrehungszahl u für die Minute gegeben, so ist die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{\pi u}{30} = 0{,}104711.$$

Theilt man etwa die Windruthenlänge in 7 Theile, und lässt den Flügel im ersten Theile anfangen, so dass seine reducirte Länge $\frac{6}{7}l$ ist, berechnet dann die 7 Werthe von α mittels der Gleichung für $\operatorname{tg}\alpha$, indem man setzt:

$$v_0 = \frac{\omega l}{7},\quad v_1 = \frac{\omega 2l}{7},\quad v_2 = \frac{\omega 3l}{7}\ldots,$$

sind dann b_0, b_1, b_2 die durch diese Theilpunkte zu legenden Flügelbreiten, so gibt die Simpson'sche Regel aus den Werthen:

$$\frac{3\sin\alpha_s{}^2 - 2}{\sin\alpha_s{}^2}\,b_s,$$

einen Mittelwerth k und die Leistung ist:

$$k = \frac{4}{g}k\gamma\frac{c^3}{2g}\cdot\frac{6}{7}l.$$

Bei ebenen Flügeln ist α constant, und der Mittelwerth k_1 zu nehmen aus den Werthen:

$$\left(\sin\alpha - \frac{v_s}{c}\cos\alpha\right)^2\frac{v_s}{c}\cos\alpha\, b_s,$$

$$L = 3\gamma k_1 l_1 \frac{c^3}{2g}.$$

Die beiden Werthe von L sind dann noch mit der Anzahl der Flügel zu multipliciren.

Die Reibung am Halse verzehrt aber einen bedeutenden Arbeitstheil.

Nehmen wir an, dass das ganze Gewicht des Flügelrads am Halse unterstützt sei, und lassen wir den Druck am Zapfen unberücksichtigt, in der Voraussetzung,

dass die beiden hier gemachten kleinen Fehler sich compensiren. Es erfolgt dann die Reibung φG, und wenn r der Halshalbmesser ist, der Arbeitsaufwand:

$$\varphi G \omega r = 0{,}1047\, u \varphi\, G r = \varphi\, \frac{G r v}{l},$$

wo v die Umfangsgeschwindigkeit des Rades ist. Die effective Leistung ergibt sich, wenn man diesen Werth von L abzieht.

Versuche über die Leistungen von Windmühlen haben Smeaton und Coulomb angestellt. Ihre Resultate stimmen ziemlich mit den hier angeführten theoretischen. — Näheres über diesen Gegenstand enthält:

Weissbach: Handbuch der Bergmaschinen-Mechanik,

Coriolis: *Traité du calcul de l'effet des machines.*

Winkel (Geometrie).

Das Ebenenstück zwischen zwei sich schneidenden, vom Schnittpunkt nach einer Seite ins Unendliche gehenden Linien. Ueber das Messen der Winkel vergleiche den Artikel: Raumlehre.

Winkelgeschwindigkeit (Dynamik).

Bei rotirender Bewegung der in der Zeiteinheit zurückgelegte Rotationswinkel, wenn die Bewegung gleichmässig, und das Verhältniss des in unendlich kleiner Zeit zurückgelegten Winkels zu dieser Zeit, wenn sie ungleichmässig ist.

Sei v die Geschwindigkeit eines Punktes, r seine Entfernung von der Drehaxe, w die Winkelgeschwindigkeit in Bogentheilen, so ist offenbar:

$$v = r\,w.$$

Vergleiche noch den Artikel: Rotation.

Winkelhebel (Maschinenlehre).

Ein Hebel, dessen beide Arme in einem Winkel zusammenstossen.

Winkelrad (Maschinenlehre).

Gleichbedeutend mit: conisches Rad. Vergleiche den Artikel: Rad.

Winter (Chronologie und mathematische Geographie).

Die Zeit vom Eintritt der Sonne in den Wendekreis des Steinbocks (Solstitium) bis zu dem in den Widderpunkt oder ins Frühlingsäquinoctium.

Wirkung (Dynamik).

So wird oft das Wort Action übersetzt (siehe diese).

Wirkungsgrad (Maschinenlehre).

Das Verhältniss der factischen Leistung einer Maschine zur theoretischen.

Wittwenkasse (Rentenrechnung).

Ueber die ihnen zu Grunde liegenden Prinzipien vergleiche den Artikel: Rente.

Woche (Zeitrechnung).

Ueber die Zeit der Einführung dieses siebentägigen Zirkels und das Prinzip, welches ihm zu Grunde liegt, ist nichts Bestimmtes bekannt. Wahrscheinlich spielen dabei die vier Mondviertel, welche etwas über sieben Tage dauern, eine Rolle.

Wölbung (Statik).

Siehe Gewölbe.

Würfel, Cubus (Stereometrie).

Ein von sechs gleichen Quadraten begrenzter Körper.

Würfelspiel (Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Ueber die Wechselfälle dieses Spiels vergleiche den Artikel: Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wurfbewegung (Dynamik und Ballistik).

A) Ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Die Theorie der frei geworfenen Körper ist sehr einfach, wenn man, wie dies allerdings nur bei sehr langsamen Bewegungen statthaft ist, den Luftwiderstand vernachlässigt.

Denken wir uns die Axe der x horizontal durch die Anfangslage des Schwerpunktes des geworfenen Körpers, den wir als Anfangspunkt nehmen, gelegt, und mit der Anfangsgeschwindigkeit in einer Verticalebene. Die Axe der y sei vertical nach oben gerichtet. Die Anfangsgeschwindigkeit c mache mit beiden Axen spitze Winkel, und zwar Winkel φ mit der Axe der x. Der Winkel φ heisst Elevationswinkel. Sei g die Beschleunigung der Schwere, so hat man:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + g = 0,$$

wo x und y die Coordinaten des Schwerpunktes sind. Die erste Gleichung gibt:

$$\frac{dx}{dt}=c\cos\varphi,\quad x=ct\cos\varphi,$$

wo die Grenzbedingungen $t=0$, $x=0$, $\frac{dx}{dt}=c\cos\varphi$ berücksichtigt sind. Aus der zweiten erhält man, da für $t=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dt}=c\sin\varphi$ ist:

$$\frac{dy}{dt}+gt=c\sin\varphi,$$

$$y=-\tfrac{1}{2}gt^2+ct\sin\varphi.$$

Durch Elimination von t aus den Werthen von x und y kommt dann:

$$y+\frac{gx^2}{2c^2\cos\varphi^2}=x\operatorname{tg}\varphi.$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel.

Will man noch die Rotation des geworfenen Körpers berücksichtigen, so ist dieselbe auf die drei durch den Schwerpunkt gelegten Hauptaxen zu beziehen, und da durch den Schwerpunkt auch die einzig wirkende Kraft der Schwere geht, so ist diese Rotation ganz unabhängig von der letzteren, also wie die eines im Schwerpunkt festen, durch einen Anfangsstoss und keine continuirlichen Kräfte in Bewegung gesetzten Körpers zu behandeln, eine Aufgabe, die sich mit Hülfe der elliptischen Functionen vollständig lösen lässt. Vergleiche den Artikel: Rotation.

B) Mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

Die Theorie der wirklichen Bewegung geworfener Körper findet ihre Hauptanwendung in der Ballistik oder der Theorie des Schiessens. Indess ist diese Aufgabe von der grössten Schwierigkeit, zunächst weil das Gesetz des Luftwiderstandes nicht für alle Fälle genauer bestimmt werden kann, jedenfalls aber ein sehr complicirtes ist, und diese Complicirtheit wird noch gesteigert dadurch, dass die Rotation des Projectils, welche sogar eine Aenderung der Verticalebene mit sich bringt, in Betracht kommt. Auch Thermometer- und Barometerstand, die Richtung und Stärke des Windes, selbst die Abweichung wegen der Rotation der Erde würden bei genauen Bestimmungen in Betracht kommen (vergleiche den Artikel: Widerstand der Flüssigkeiten). Es scheinen jedoch diese Nebenumstände nur einen geringeren Einfluss auszuüben, wenn die Anfangsgeschwindigkeit eine grosse ist und einen kleinen Winkel mit dem Horizont macht. Auch die Rotation bringt nur eine geringe Abweichung hervor, wenn angenommen werden kann, dass das Projectil ein Rotationskörper ist, und die Drehung um die Rotationsaxe erfolgt. Diese Annahmen sollen bei gezogenen Schussröhren der Wahrheit nahe kommen (vergleiche Prehn, die Ballistik der gezogenen Geschütze).

Newton leitet aus der Theorie des Stosses (vergleiche die Artikel: Stoss und Widerstand) ab, dass der Luftwiderstand proportional der der Luft entgegenbewegten Fläche, dem Quadrate der Geschwindigkeit, selbstverständlich der letzteren entgegengesetzt gerichtet sei. Der eben angeführten Schrift zufolge soll bei den Anfangsgeschwindigkeiten, welche bei gezogenen Geschützen in Betracht kommen (etwa 500 bis 1200 Fuss in der Secunde), dies Gesetz ausreichende Resultate geben, dagegen nimmt Hutton selbst bei Anfangsgeschwindigkeiten von 100 Fuss die Potenz 2,04 der Geschwindigkeit als dem Luftwiderstand proportional an. Für sehr kleine Geschwindigkeiten ergeben sich gute Resultate, wenn man den Widerstand der Geschwindigkeit selbst proportional setzt. Alle diese Annahmen können nur als Erfahrungszahlen und Annäherungen dienen. Wir wollen jetzt das Newton'sche Gesetz zu Grunde legen.

Demgemäss ist der Luftwiderstand seiner Grösse nach zu setzen gleich αv^2, wo die Zahl α durch Erfahrung zu bestimmen ist. In der angeführten Schrift von Prehn ist gesetzt:

für den 6-Pfünder:

$$\alpha=0{,}0000505,$$

für den 12-Pfünder:

$$\alpha=0{,}0000309,$$

für den 24-Pfünder:

$$\alpha=0{,}0000248.$$

Möge wieder x horizontal, y vertical sich in der Wurfebene befinden, der Anfangspunkt durch die anfängliche Lage des Schwerpunktes des Projectils gehen, c die Anfangsgeschwindigkeit und φ ihr Winkel mit dem Horizont sein, s ferner die Bogenlänge, so ist für:

$$t=0,\qquad x=y=s=0,$$

$$\frac{dx}{dt}=c\cos\varphi,\quad \frac{dy}{dt}=c\sin\varphi.$$

In Richtung der Axe der y wirken die Kräfte:

$$-g \text{ und } -\alpha v^2\frac{dy}{ds}=-\alpha\frac{ds\,dy}{dt^2},$$

und in der Richtung der Axe der x:

$$-\alpha v^2 \frac{dx}{ds} = -\alpha \frac{ds\,dx}{dt^2}.$$

Man hat also die Bewegungsgleichungen:

1) $$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{ds\,dx}{dt^2} = 0,$$

2) $$\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha \frac{ds\,dy}{dt^2} + g = 0.$$

Die erste Gleichung lässt sich integriren:

$$\lg \frac{dx}{dt} + \alpha s = \lg (c \cos \varphi),$$

also:

3) $$\frac{dx}{dt} = c \cos \varphi\, e^{-\alpha s}.$$

Um die Bahngleichung zu finden, können wir aus 2) und 3) dt eliminiren:

4) $$c^2 \cos \varphi^2\, d\left(\frac{dy}{dx}\right) + g\, e^{2\alpha s}\, dx = 0,$$

oder, wenn man den Winkel l der Tangente mit der Axe der x einführt, also:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} l, \quad dx = \cos l\, ds$$

setzt:

5) $$c^2 \cos \varphi^2 \frac{dl}{\cos l^3} + gl\, e^{2\alpha s} ds = 0.$$

Durch Integration ergibt sich die Gleichung der Curve, wenn man Bogenlänge und Tangentenwinkel als Coordinaten nimmt (vergleiche den Artikel: Transformationscoordinaten):

6) $$\frac{c^2 \cos \varphi^2}{2} \left[\frac{\sin l}{\cos l^2} + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{l}{2}\right)\right] + \frac{g}{2\alpha} e^{2\alpha s} = h,$$

und da man $l = \varphi$ für $s = 0$ hat:

7) $$h = \frac{c^2 \cos \varphi^2}{2} \left[\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi^2} + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right] + \frac{g}{2\alpha}.$$

In verschiedenen Artikeln dieses Wörterbuchs (siehe z. B. den Artikel: Transformationscoordinaten) ist auf die Wichtigkeit der zwischen Bogenlänge und Tangentenwinkel stattfindenden Gleichungen aufmerksam gemacht worden. Die Gleichung 6) gibt die Wurflinie in dieser Weise, und kann daher zur Ermittelung der Eigenschaften derselben angewandt werden. Zur graphischen Construction derselben kann schon die Gleichung 5) dienen.

Da nämlich für $l = \varphi$ auch $s = 0$ ist, so kann man mittels des Ausdruckes:

$$ds = -\frac{c_0^2 \cos \varphi^2\, dl}{g \cos l^3} e^{-2\alpha s},$$

für jeden kleinen Zuwachs $-dl$, der beliebig constant, etwa gleich $\frac{1}{10}{}^\circ$ zu nehmen ist, die zugehörige kleine Bogenlänge ds ermittelt werden, und in der Exponentialgrösse rechts ist dann für s die Summe aller bis dahin gefundenen Elemente ds zu setzen. Uebrigens hat $\frac{ds}{dl}$ gleiches Zeichen mit $-\cos l$, der Bogen wird also bei abnehmendem Tangentenwinkel l so lange zunehmen, bis dieser Winkel -90° erreicht hat, wenn φ ein spitzer Winkel ist, wie dies ja immer angenommen werden kann. Nach Gleichung 6) würde aber $s = \infty$ diesem Werthe von l entsprechen, woraus sich dann ergibt, dass die Curve sich asymptotisch der Richtung der Schwere nähert, wenn die Flugbahn unbeschränkt ist, d. h. der Boden nicht berührt wird. In der That findet dies annähernd bei Geschossen, die von hohen

Bergen ausgesendet werden, offenbar statt. Für den höchsten Punkt der Bahn ist $l=0$ zu setzen, Gleichung 6) gibt dann:

$$e^{2\alpha s}=\frac{2\alpha h}{g}=1+\frac{c^2\cos\varphi^2\alpha}{g}\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2}+\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Was die Geschwindigkeiten anbetrifft, so haben wir:

8) $$\frac{dx}{dt}=c\cos\varphi\, e^{-\alpha s},$$

9) $$\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}\operatorname{tg}l=c\cos\varphi\operatorname{tg}l\, e^{-\alpha s},$$

10) $$\frac{ds}{dt}=\frac{dx}{dt}\,\frac{1}{\cos l}=\frac{c\cos\varphi}{\cos l}e^{-\alpha s}.$$

Setzt man noch den Werth von $e^{2\alpha s}$ aus 6) in 5) ein, so kommt:

$$\frac{ds}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2}{2\alpha\cos l^3\left[h-\frac{c^2\cos\varphi^2}{2}\left(\frac{\sin l}{\cos l^2}+\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right)\right]},$$

oder wenn man lieber:

$$h=\frac{g}{2\alpha}+\frac{kc^2\cos\varphi^2}{2},$$

also:

$$k=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2}+\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)$$

setzt:

11) $$\frac{ds}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2}{\cos l^3\left\{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]\right\}},$$

12) $$\frac{dx}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2}{\cos l^2\left\{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]\right\}},$$

13) $$\frac{dy}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2\sin l}{\cos l^3\left\{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]\right\}}.$$

Die Ausdrücke:

$$x=-\int_\varphi^l\frac{c^2\cos\varphi^2\,dl}{\cos l^2\left\{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]\right\}},$$

$$y=-\int_\varphi^l\frac{c^2\cos\varphi^2\sin l\,dl}{\cos l^3\left\{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]\right\}}$$

lassen sich zwar nicht in geschlossener Form entwickeln. Kommt es jedoch darauf an, x und y genau in Tafelform zu entwickeln, so gibt die mechanische Quadratur hierzu vollständigen Anhalt. Hauptsächlich kommt es hierbei auf denjenigen Punkt an, in welchem das Projectil die durch den Anfangspunkt gehende Horizontale wieder schneidet, wo also $y=0$ ist. Ist $\alpha=0$ also im luftleeren Raume, für den sich übrigens:

$$x=-\frac{c^2}{g}\cos\varphi^2(\operatorname{tg}l-\operatorname{tg}\varphi),$$

$$y=-\frac{c^2\cos\varphi^2}{2g}\left(\frac{1}{\cos l^2}-\frac{1}{\cos\varphi^2}\right)$$

ergibt, so wird für diesen Punkt:

$$l=-\varphi, \quad x=\frac{c^2}{g}\sin 2\varphi.$$

Im lufterfüllten Raum ist $-l$ dagegen grösser als φ. Indess würden die auf die angeführte Weise berechneten Tafeln übereinstimmend mit der Erfahrung ergeben, dass wenn die Anfangsgeschwindigkeit die oben angeführten Grenzen nicht überschreitet und α nicht gross, also das Gewicht des Projectils nicht allzuklein ist, $-l$ noch immer klein bleibt. — Uebrigens lassen sich auch x und y in Reihen nach ganzen positiven Potenzen von l entwickeln, oder noch besser, wenn man $l=\varphi-\lambda$ setzt, nach Potenzen von λ. Die Nenner in den Integralen werden nämlich erst dann mehrdentig und discontinuirlich, wenn $l=\frac{\pi}{2}$ ist, was ja erst für $s=t=\infty$ stattfindet. Setzen wir demnach $l=\varphi-\lambda$, so ist:

$$k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)=k-\frac{\sin(\varphi-\lambda)}{\cos(\varphi-\lambda)^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi-\lambda}{2}\right)$$
$$=\frac{2\lambda}{\cos\varphi^3}-\frac{3\sin\varphi.\lambda^2}{\cos\varphi^4}+\frac{(4-3\cos\varphi^2)\lambda^3}{\cos\varphi^5}\ldots,$$

wie man durch successives Differenziiren erhält, ferner:

$$\frac{c^2\cos\varphi^2}{g+\alpha c^2\cos\varphi^2\left[k-\frac{\sin l}{\cos l^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{l}{2}\right)\right]}$$
$$=\frac{c^2\cos\varphi^2}{g\left[1+\frac{\alpha c^2}{g}\left(\frac{2\lambda}{\cos\varphi}-\frac{3\sin\varphi.\lambda^2}{\cos\varphi^2}+\frac{(4-3\cos\varphi^2)\lambda^3}{\cos\varphi^3}-\ldots\right.\right]}$$
$$=\frac{c^2\cos\varphi^2}{g}\left[1-\frac{\alpha c^2}{g}\left(\frac{2\lambda}{\cos\varphi}-\frac{3\sin\varphi.\lambda^2}{\cos\varphi^2}+\frac{4-3\cos\varphi^2}{\cos\varphi^3}\lambda^3\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha^2c^4}{g^2}\left(\frac{2\lambda}{\cos\varphi}-\frac{3\sin\varphi\,\lambda^2}{\cos\varphi^2}\right)^2-\frac{\alpha^3c^6}{g^3}\left(\frac{2\lambda}{\cos\varphi}\right)^3\right],$$

wenn man sich auf die Potenzen von λ bis einschliesslich zur dritten beschränkt. Man erhält durch Vereinfachung:

$$\frac{c^2\cos\varphi^2}{g}\left[1-\frac{2\alpha c^2\lambda}{g\cos\varphi}+\left(\frac{3\alpha c^2\sin\varphi}{g\cos\varphi^2}+\frac{4\alpha^2c^4}{g^2\cos\varphi^2}\right)\lambda^2\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\alpha c^2(4-3\cos\varphi^2)}{g\cos\varphi^3}+\frac{12\alpha^2c^4\sin\varphi}{g^2\cos\varphi^3}+\frac{8\alpha^3c^6}{g^3\cos\varphi^3}\right)\lambda^3\right].$$

Um $\frac{dx}{dl}$ zu bilden, ist dieser Ausdruck mit $-\frac{1}{\cos l^2}$ zu multipliciren. Das von λ freie Glied wird dann $-\frac{c^2\cos\varphi^2}{g\cos l^2}$. Die übrigen Glieder multipliciren wir mit:

$$-(\cos l)^{-2}=-[\cos(\varphi-\lambda)]^{-2}=-\cos\varphi^{-2}+2\cos\varphi^{-3}\sin\varphi\lambda-\frac{2+\sin\varphi^2}{2\cos\varphi^4}\lambda^2$$
$$+\ldots=-\cos\varphi^{-2}\left(1-2\operatorname{tg}\varphi.\lambda+\frac{2+\sin\varphi^2}{2\cos\varphi^2}{}^2\lambda\right),$$

und hieraus folgt dann:

$$\text{14)}\qquad \frac{dx}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2}{g\cos l^2}+\frac{2c^4\alpha\lambda}{g^2\cos\varphi}+\frac{c^4\alpha}{g^2\cos\varphi^2}\left(\sin\varphi-\frac{4\alpha c^2}{g}\right)\lambda^2$$
$$+\frac{c^4\alpha}{g^2\cos\varphi^3}\left(13-10\cos\varphi^2+\frac{20c^2\alpha\sin\varphi}{g}+\frac{8c^4\alpha^2}{g^2}\right)\lambda^3.$$

Da man hat:

$$\frac{dy}{dl}=\operatorname{tg}l\frac{dx}{dl},$$

so ist das erste Glied rechts in der obigen Entwickelung 14):

$$-\frac{c^2 \cos\varphi^2 \sin l}{\cos l^3}.$$

Die übrigen sind zu multipliciren mit:

$$\operatorname{tg}(\varphi-\lambda)=\operatorname{tg}\varphi-\frac{\lambda}{\cos\varphi^2}+\frac{\lambda^2\sin\varphi}{\cos\varphi^3}-\ldots;$$

es ergibt sich:

$$15)\quad \frac{dy}{dl}=-\frac{c^2\cos\varphi^2\sin l}{g\cos l^3}+\frac{2c^4\alpha\sin\varphi\lambda}{g^2\cos\varphi^2}-\frac{c^4\alpha}{g^2\cos\varphi^3}\left(2-\sin\varphi^2+\frac{4\alpha c^2\sin\varphi}{g}\right)\lambda^2$$
$$+\frac{c^4\alpha}{g^2\cos\varphi^4}\left(4\sin\varphi+10\sin\varphi^3+\frac{4\alpha c^2}{g}+\frac{20\alpha c^2}{g}\sin\varphi^2+\frac{8\alpha^2c^4}{g^2}\sin\varphi\right)\lambda^3.$$

Durch Integration der Gleichungen 14) und 15) folgt dann, da $x=y=\lambda=0$ für $l=\varphi$ ist:

$$16)\quad x=\frac{c^2\cos\varphi\sin\lambda}{g\cos(\varphi-\lambda)}-\frac{c^4\alpha\lambda^2}{g^2\cos\varphi}-\frac{c^4\alpha}{3g^2\cos\varphi^2}\left(\sin\varphi-\frac{4\alpha c^2}{g}\right)\lambda^3$$
$$-\frac{c^4\alpha}{4g^2\cos\varphi^3}\left(13-10\cos\varphi^2+\frac{20c^2\alpha\sin\varphi}{g}+\frac{8c^4\alpha^2}{g^2}\right)\lambda^4,$$

$$17)\quad y=\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{\cos\varphi^2}{\cos(\varphi-\lambda)^2}\right)-\frac{c^4\alpha\sin\varphi\lambda^2}{g^2\cos\varphi^2}+\frac{c^4\alpha}{3g^2\cos\varphi^3}\left(2-\sin\varphi^2\right.$$
$$\left.+\frac{4\alpha c^2\sin\varphi}{g}\right)\lambda^3-\frac{c^4\alpha}{4g^2\cos\varphi^4}\left(4\sin\varphi+10\sin\varphi^3+\frac{4\alpha c^2}{g}\right.$$
$$\left.+\frac{20\alpha c^2}{g}\sin\varphi^2+\frac{8\alpha^2c^4\sin\varphi}{g^2}\right)\lambda^4.$$

In dieser Form schliessen sich die Gleichungen für x und y am genauesten an die Werthe im luftleeren Raume an, mit denen sie für $\alpha=0$ übereinstimmen, doch gilt dann nicht die Convergenz für jedes λ. Dies findet immer statt, wenn man — und dies ist im Allgemeinen genauer — auch die ersten Glieder nach Potenzen von λ entwickelt. Es ist:

$$\frac{c^2\cos\varphi\sin\lambda}{g\cos(\varphi-\lambda)}=\frac{c^2\cos\varphi\left(\lambda-\frac{\lambda^3}{6}\right)}{g\cos\varphi\left(1+\frac{\lambda\sin\varphi}{g\cos\varphi}-\frac{\lambda^2\cos\varphi}{2\cos\varphi}-\frac{\lambda^3\sin\varphi}{6\cos\varphi}\right)}$$
$$=\frac{c^2}{g}\lambda\left(1-\frac{\lambda^2}{6}\left[1-\lambda\operatorname{tg}\varphi+\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^3}{6}\operatorname{tg}\varphi+\left(\lambda\operatorname{tg}\varphi-\frac{\lambda^2}{2}\right)^2-\lambda^3\operatorname{tg}\varphi^3\right]\right.$$
$$=\frac{c^2}{g}\left(\lambda-\lambda^2\operatorname{tg}\varphi+\frac{\lambda^3}{3}+\lambda^3\operatorname{tg}\varphi^2+\frac{2\lambda^4\operatorname{tg}\varphi}{3}-\lambda^4\operatorname{tg}\varphi^3\right),$$

$$\frac{c^2}{2g}\left(1-\frac{\cos\varphi^2}{\cos(\varphi-\lambda)^2}\right)=\frac{c^2}{2g}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\lambda\operatorname{tg}\varphi-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^3}{6}\operatorname{tg}\varphi+\frac{\lambda^4}{24}\right)^2}\right\}$$
$$=\frac{c^2}{2g}\left[2\lambda\operatorname{tg}\varphi-\lambda^2-\frac{\lambda^3}{3}\operatorname{tg}\varphi+\frac{\lambda^4}{12}-3\left(\lambda\operatorname{tg}\varphi-\frac{\lambda^2}{2}-\frac{\lambda^3}{6}\operatorname{tg}\varphi\right)^2\right.$$
$$\left.+4\left(\lambda\operatorname{tg}\varphi-\frac{\lambda^2}{2}\right)^3-5\lambda^4\operatorname{tg}\varphi^4\right]=\frac{c^2}{2g}\left(2\lambda\operatorname{tg}\varphi-\lambda^2-3\lambda^2\operatorname{tg}\varphi^2+\tfrac{8}{3}\lambda^3\operatorname{tg}\varphi+4\lambda^3\operatorname{tg}\varphi^3\right.$$
$$\left.-\frac{2\lambda^4}{3}-\frac{5\lambda^4\operatorname{tg}\varphi^2}{\cos\varphi^2}\right).$$

Hieraus ergibt sich:

16a) $$x=\frac{c^2}{g}\lambda-\frac{c^2}{g}\left(\operatorname{tg}\varphi+\frac{c^2\alpha}{g\cos\varphi}\right)\lambda^2+\frac{c^2}{g}\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{tg}\varphi^2-\frac{c^2\alpha\sin\varphi}{3g\cos\varphi^2}\right.$$
$$\left.+\frac{4c^4\alpha^2}{g^2\cos\varphi^2}\right)\lambda^3+\frac{c^2}{g}\left(\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{3}\operatorname{tg}\varphi^3-\frac{13c^2\alpha}{4g\cos\varphi^3}+\frac{10c^2\alpha}{4g\cos\varphi}-\frac{20c^4\alpha^2\sin\varphi}{4g^2\cos\varphi^3}\right.$$
$$\left.-\frac{8c^6\alpha^3}{4g^3\cos\varphi^3}\right)\lambda^4+\dots$$

17a) $$y=\frac{c^2\operatorname{tg}\varphi}{g}\lambda-\frac{c^2}{g}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2+\frac{c^2\alpha}{g}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\right)\lambda^2+\frac{c^2}{g}\left(\tfrac{4}{3}\mathrm{lg}\,\varphi+2\operatorname{tg}\varphi^3\right.$$
$$\left.+\frac{2c^2\alpha}{3g\cos\varphi^3}-\frac{c^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{3g\cos\varphi}+\frac{4c^4\alpha^2\operatorname{tg}\varphi}{3g^2\cos\varphi^2}\right)\lambda^3-\frac{c^2}{g}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}\varphi^2}{\cos\varphi^2}+\frac{c^2\alpha\operatorname{tg}\varphi}{g\cos\varphi^3}\right.$$
$$\left.+\frac{5c^2\alpha\operatorname{tg}\varphi^3}{2g\cos\varphi}+\frac{c^4\alpha^2}{g^2\cos\varphi^4}+\frac{5c^4\alpha^2\operatorname{tg}\varphi^2}{g^2\cos\varphi^2}+\frac{2c^6\alpha^3\operatorname{tg}\varphi}{g^3\cos\varphi^3}\right)\lambda^4+\dots$$

Hiernach ist z. B. für den höchsten Punkt der Bahn (Culmination), wo $\lambda=\varphi$ zu nehmen ist:

$$x=\frac{c^2\varphi}{g}-\frac{c^2}{y}\left(\operatorname{tg}\varphi+\frac{c^2\alpha}{g\cos\varphi}\right)\varphi^2+\dots,$$
$$y=\frac{c^2\operatorname{tg}\varphi}{g}\varphi-\frac{c^2}{g}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2+\frac{c^2\alpha}{g}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\right)\varphi^2+\dots,$$

also wenn man φ^3 vernachlässigt und demzufolge $\operatorname{tg}\varphi$ mit φ, $\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2}$ identificirt:

$$x=\frac{c^2\varphi}{g}\left(1-\frac{c^2\alpha\varphi}{g}\right),\qquad y=\frac{c^2\varphi^2}{2g}.$$

Für den luftleeren Raum ergeben sich aus 16) und 17), wenn man $\alpha=0$ setzt:

$$x=\frac{c^2\cos\varphi\sin\varphi}{g}=\frac{c^2\varphi}{g}+\dots,$$
$$y=\frac{c^2}{2g}\sin\varphi^2=\frac{c^2\varphi^2}{2g}+\dots,$$

woraus folgt, dass die durch den Luftwiderstand herbeigeführte Abnahme der Elevation erst mit φ^3 proportional ist, und die zugehörige Abscisse sich im Verhältniss $1-\frac{c^2\alpha\varphi}{g}$ verringert.

Soll auch für die Culmination das Verminderungsverhältniss bestimmt werden, so ist noch φ^3 zu berücksichtigen. Setzt man $\operatorname{tg}\varphi=\varphi+\frac{\varphi^3}{3}$, so kommt:

$$y=\frac{c^2\varphi^2}{g}-\frac{c^2\varphi^2}{2g}-\frac{c^4\alpha}{g^2}\varphi^3+\frac{2c^4\alpha}{3g^2}\varphi^3,$$

d. h.:

$$y=\frac{c^2\varphi^2}{2g}-\tfrac{1}{3}\frac{c^4\alpha}{g^2}\varphi^3.$$

Die Verminderung von y findet also im Verhältnisse:

$$1-\tfrac{2}{3}\frac{c^2\alpha\varphi}{g}$$

statt.

Für den Punkt, wo das Projectil die Horizontale wieder schneidet (Schussweite) ist $y=0$, also wegen 17a):

$$\operatorname{tg}\varphi-\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2+\frac{c^2\alpha}{g}\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\cos\varphi}\right)\lambda+\dots=0,$$

also in erster Näherung, indem man λ^2 und φ^2 vernachlässigt:

$$\lambda = 2\varphi.$$

Dieser Ausdruck gilt auch für den luftleeren Raum. Berücksichtigen wir aber noch λ^2, so kann natürlich in 17 a) überall für λ^2 noch $4\varphi^2$ geschrieben werden. Wir erhalten:

$$\varphi - \lambda\left(\tfrac{1}{2} + \frac{c^2\alpha}{g}\varphi\right) + \frac{8c^2\alpha}{3g}\varphi^2 = 0,$$

$$\lambda = \frac{2\varphi + \dfrac{16\,c^2\,\alpha}{3g}\varphi^2}{1 + \dfrac{2\,c^2\,\alpha}{g}\varphi} = 2\varphi + \tfrac{10}{3}\frac{c^2\alpha}{g}\varphi^2,$$

also:

$$l = \varphi - \lambda = -\varphi - \tfrac{10}{3}\frac{c^2\alpha}{g}\varphi^2.$$

Die Vergrösserung des Winkels l gegen den im leeren Raum erfolgt also im Verhältnisse:

$$1 + \tfrac{10}{3}\frac{c^2\,\alpha\,\varphi}{g}.$$

Der gefundene Werth von λ ist in 16 a) einzusetzen, wo wir φ^3 und λ^3 vernachlässigen. Wir erhalten:

$$x = \frac{2\,c^2\,\varphi}{g} - \frac{2\alpha\,c^4\,\varphi^2}{3g^2},$$

so dass die Verminderung stattfindet im Verhältnisse:

$$1 - \tfrac{1}{3}\frac{c^2\,\alpha\,\varphi}{g}$$

Man kann aber auch unmittelbar eine Gleichung zwischen y und x suchen. Die Gleichung 4) gibt nämlich durch Differenziiren:

$$c^2 \cos\varphi^2 \frac{d^3y}{dx^3} + 2\alpha g\, e^{2\alpha s}\frac{ds}{dx} = 0,$$

und wenn man $e^{2\alpha s}$ aus 4) hierin einsetzt:

18) $$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\,\alpha\,\frac{d^2y}{dx^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Diese Gleichung lässt sich nochmals integriren. Sei:

$$\frac{dy}{dx} = u,\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{du}{dx} = w,$$

so kommt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dw}{dx} = \frac{w\,dw}{dy},\qquad dw = 2\alpha\sqrt{(1+u^2)}\,du,$$

durch Integration:

18 a) $$w = \alpha\left(u\sqrt{(1+u^2)} + \lg\left[u + \sqrt{(1+u^2)}\right]\right) + k.$$

Aus Gleichung 4) folgt für $t=0$:

$$w = -\frac{g}{c^2\cos\varphi^2},\quad u = \operatorname{tg}\varphi,$$

also:

$$k = -\frac{g}{c^2\cos\varphi^2} - \alpha\left[\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} + \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\right].$$

Um aber weiter zu integriren, muss bereits zu Näherungswerthen gegriffen werden. Da bei flachen Bahnen y nur klein ist, läge es am nächsten, x nach Potenzen von y zu entwickeln. Dies wäre indess insofern nicht angemessen, als zu jedem y zwei Werthe von x gehören, übrigens auch die Formel für den Wurf

im luftleeren Raume y als ganze Function von x ergibt, und der Vergleich dieser Bahn mit der im lufterfüllten Raume also die Entwickelung von y nach Potenzen von x erfordert. Wenngleich x eine sehr bedeutende Grösse annehmen kann, so ist doch von vornherein einzusehen, dass die Entwickelung in ziemlich grossen Grenzen convergiren wird. Denn setzen wir:

$$p = \alpha y, \qquad q = \alpha x,$$

so wird Gleichung 18):

$$19) \qquad \frac{d^3p}{dq^3} = 2\frac{d^2p}{dq^2}\sqrt{1+\left(\frac{dp}{dq}\right)^2}.$$

Es ist aber wegen des kleinen α: $p = \alpha x$ nur klein, und wird daher eine Entwickelung von q nach Potenzen von p, d. h. von y nach Potenzen von x in ziemlich ansehnlichen Grenzen gerechtfertigt sein. Es lässt sich sogar unter gewissen Bedingungen eine untere Grenze, worin diese Entwickelung convergirt, ohne Schwierigkeit finden.

Zu dem Ende wollen wir die Gleichung 19) in ein System von 3 Differenzialgleichungen verwandeln. Sei:

$$\frac{dp}{dq} = p_1, \quad \frac{dp_1}{dq} = p_2,$$

so hat man das System:

$$20) \qquad \frac{dp}{dq} = p_1, \quad \frac{dp_1}{dq} = p_2, \quad \frac{dp_2}{dq} = 2\sqrt{(1+p_1^2)}\, p_2.$$

Diese Gleichungen sollen noch so umgestaltet werden, dass für $q=0$ die abhängigen Variablen verschwinden. Es ist für:

$$q=0, \quad p=0, \quad p_1 = \operatorname{tg}\varphi, \quad p_2 = \frac{1}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{\alpha c^2 \cos\varphi^2}.$$

Setzen wir also:

$$p' = p_1 - \operatorname{tg}\varphi, \quad p'' = p_2 + \frac{g}{\alpha c^2\cos\varphi^2},$$

so wird für $q=0$:

$$p = p' = p'' = 0,$$

und die Gleichungen 20) verwandeln sich in:

$$21) \qquad \frac{dp}{dq} = p' + \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{dp'}{dq} = p'' - \frac{g}{\alpha c^2\cos\varphi^2},$$

$$\frac{dp''}{dq} = 2\left(p'' - \frac{g}{\alpha c^2\cos\varphi^2}\right)\sqrt{1+(p'+\operatorname{tg}\varphi)^2}.$$

In dem Artikel: Quadraturen — Zurückführung der totalen Differenzialgleichungen auf — ist nun folgender Satz bewiesen (Abschnitt 27):

„Ist gegeben ein System von m Differenzialgleichungen:

$$\frac{du}{dz} = f(z, u, u' \ldots),$$

$$\frac{du'}{dz} = f_1(z, u, u' \ldots)$$

$$\vdots$$

bleiben $f, f_1 \ldots$ eindeutig und continuirlich, so lange die Module von $z, u, u' \ldots$ nicht grösser als $\varrho, r, r' \ldots$ sind, sind ferner $M, M' \ldots$ die grössten Module, welche $f, f' \ldots$ auf dem Integrationswege annehmen, so bleibt die Entwickelung von $u, u' \ldots$ nach ganzen positiven Potenzen von z gültig, so lange der Modul von z nicht die Grenze:

$$R=\varrho\left(1-e^{-\frac{r_0}{(m+1)M_0\varrho}}\right),$$

überschreitet, wo für r_0, M_0 . . . die kleinsten Werthe von r, r_1 . . . bezüglich M, M_1 . . . zu nehmen sind. Vorausgesetzt ist, dass, wie hier, für $z=0$: $u=u'$ . . . $=0$ wird."

In unserem Falle sind z, u, u' . . . mit q, p, p' . . . zu vertauschen. Da die rechten Seiten der Gleichungen 21) $z=q$ gar nicht enthalten, so ist $\varrho=\infty$ zu nehmen, und es wird:

$$R=\varrho\left(1-1+\frac{r_0}{(m+1)M_0\varrho}\right),$$

d. h.:

$$R=\frac{r_0}{(m+1)M_0}.$$

Da die beiden ersten Gleichungen 21) rechts lineare Grössen enthalten, so kann sich r_0, M_0 nur auf die dritte Gleichung und r_0 auf p' beziehen, da der erste Factor in derselben auch immer continuirlich und eindeutig ist.

$$\sqrt{1+(p+\operatorname{tg}\varphi)^2}$$

ist aber eindeutig, so lange:

$$\operatorname{mod}(p'+\operatorname{tg}\varphi)<1.$$

In unserem Falle, wo p' und $\operatorname{tg}\varphi$ reell sind, kann man den Modul durch die Grösse selbst ersetzen. Es ist also:

$$p'+\operatorname{tg}\varphi<1, \qquad p'=r_0=1-\operatorname{tg}\varphi$$

die bezeichnete Grenze.

Es ergibt sich dann, da $m=3$ ist:

$$R=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{8p_2\sqrt{(1+p_1^2)}}.$$

Nimmt man nun an, dass die Bahn nur flach, also $p_1=\frac{dy}{dx}$ nur klein sei, so kann man p_1 gegen 1 vernachlässigen. Es ist aber:

$$p_2=\frac{1}{\alpha}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\alpha}w,$$

und wegen Gleichung 18a):

$$p_2=u\sqrt{(1+u^2)}+\lg[u+\sqrt{(1+u^2)}]-\frac{g}{c^2\alpha\cos\varphi^2}-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2}-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right).$$

ein Ausdruck, der für kleines $\varphi=\frac{dy}{dx}$ sich $-\frac{g}{c^2\alpha\cos\varphi^2}$ nähert. Die bezeichnete Grenze ist also:

$$R=q=\alpha x=\frac{\alpha(1-\operatorname{tg}\varphi)c^2\cos\varphi^2}{8g}.$$

(Das Zeichen von R ist natürlich stets positiv.) Die Convergenz von y, nach Potenzen von x entwickelt, findet also unter der gemachten Voraussetzung noch bis (oder wenigstens nahe bis) zur Grenze:

$$x=(1-\operatorname{tg}\varphi)\frac{c^2\cos\varphi^2}{8g}$$

statt. Hier kann man noch im Allgemeinen:

$$\operatorname{tg}\varphi=0, \qquad \cos\varphi=1$$

setzen, und es wird diese Grenze:

$$x=\frac{c^2}{8g}.$$

Sie würde also gelten bis zu einer Abscisse, die etwa den 250ten Theil des Quadrates der Anfangsgeschwindigkeit beträgt (Fusse und Secunden als Einheit der letzteren vorausgesetzt), jedoch ist vorausgesetzt, dass φ in diesen Grenzen nur klein sei. Vergleicht man diesen Werth mit dem oben gefundenen:

$$x = \frac{2c^2\varphi}{g} - \frac{2\alpha c^4 \varphi^2}{3g^2},$$

so sieht man, dass Convergenz der Reihe für die ganze Wurfbahn bei kleinem φ stattfindet. In der That ergibt sich, mit Vernachlässigung von φ^2:

$$\frac{2c^2\varphi}{g} = \frac{c^2}{8g}, \quad \varphi = \tfrac{1}{16}.$$

Da der Winkel hier in Theilen von π gegeben ist, so wird er in Graden:

$$\frac{180}{16\pi} \quad \text{d. h} \quad 3\tfrac{1}{2}{}^\circ$$

betragen, und bis zu dieser Grenze kann man unbedenklich die Reihe für y, welche nach ganzen Potenzen von x fortschreitet, für den ganzen hier zu betrachtenden Theil der Bahn anwenden. Setzen wir daher:

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3,$$

und da für $x=0$: $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ ist:

$$a_1 = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2,$$

und da für $x=0$: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{c^2 \cos\varphi^2}$ ist:

$$a_2 = -\frac{g}{2c^2\cos\varphi^2},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+(a_1+2a_2x)^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2 + 2a_2 x \operatorname{tg}\varphi},$$

indem wir uns auf die erste Potenz von x beschränken, also:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{(1+2a_2 \sin\varphi\cos\varphi x} = \frac{1}{\cos\varphi} + a_2 \sin\varphi x.$$

Gleichung 18) gibt nun:

$$6a_3 + 24 a_4 x = 2\alpha(2a_2 + 6a_3 x) + \left(\frac{1}{\cos\varphi} + a_2\sin\varphi x\right)$$
$$= \frac{4a_2\alpha}{\cos\varphi} + \left(\frac{12 a_3\alpha}{\cos\varphi} + 4a_2{}^2\alpha\sin\varphi\right)x,$$

d. h.:

$$a_3 = \tfrac{2}{3}\frac{a_2\alpha}{\cos\varphi}, \qquad a_4 = \frac{a_3\alpha}{2\cos\varphi} + \frac{a_2{}^2\alpha\sin\varphi}{6},$$

oder mit Berücksichtigung des Werthes von a_2:

$$a_3 = -\frac{g\alpha}{3c^2\cos\varphi^3}, \quad a_4 = -\frac{g\alpha^2}{6c^2\cos\varphi^4} + \frac{g^2\alpha\sin\varphi}{24c^4\cos\varphi^4},$$

also schliesslich:

$$y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{gx^2}{2c^2\cos\varphi^2} - \frac{g\alpha x^3}{3c^2\cos\varphi^3} - \frac{g\alpha x^4}{6c^2\cos\varphi^4}\left(\alpha - \frac{g\sin\varphi}{4c^2}\right) + \dots$$

Die Anfangsgeschwindigkeit c kann durch Versuche ermittelt werden. In dem Artikel: Stoss ist gezeigt worden, wie dies z. B. mittels des ballistischen Pendels geschehen kann. Für kurze Ladungen führten wir daselbst das Erfahrungsgesetz an, dass sich unter übrigens gleichen Umständen die Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten wie die Ladungsgewichte verhielten, also die Geschwindigkeiten selbst wie die Potenzen $\frac{1}{2}$ der Gewichte. Für preussisches Pulver wird indess diese Potenz $=0{,}56$ angenommen, was allerdings nur wenig von obigem Gesetze abweicht. Die theoretische Berechnung wird hier folgen.

Wir wollen jetzt noch eine andere Entwickelung von y als Function von x geben.

Da α sehr klein ist, ebenso wie φ, so kann in erster Näherung der in Gleichung 18) mit α multiplicirte Ausdruck:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{ds}{dx}$$

als constant betrachtet, und somit mit $\frac{1}{\cos\varphi}$ identificirt werden. Dies gibt:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2\alpha}{\cos\varphi}\,\frac{d^2y}{dx^2},$$

also durch successives Integriren:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g\,e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}}}{c^2\cos\varphi^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2\alpha c^2\cos\varphi}\left(e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}}-1\right)+\operatorname{tg}\varphi,$$

$$y = -\frac{g}{4\alpha^2 c}\left(e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}}-\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}-1\right)+x\operatorname{tg}\varphi.$$

Um eine zweite Näherung zu finden, entwickeln wir $\frac{dy}{dx}$ nach Potenzen von x. Es kommt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2\alpha c^2\cos\varphi}\left(\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}+\ \ldots\right)+\operatorname{tg}\varphi.$$

Wir betrachten jedoch nur das von α freie erste Glied:

$$-\frac{gx}{c^2\cos\varphi^2}+\operatorname{tg}\varphi$$

und setzen dasselbe in Gleichung 18), indem wir die höheren Potenzen von α ausser Acht lassen, also:

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2-\frac{2g\,x\operatorname{tg}\varphi}{c^2\cos\varphi^2}} = \frac{1}{\cos\varphi}-\frac{gx\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2},$$

indem wir die höheren Potenzen von $\frac{1}{c^2}$ weglassen. Die Differenzialgleichung wird dann:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2\alpha\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{1}{\cos\varphi}-\frac{g\,x\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2}\right),$$

also durch Integration:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g\,e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}-\frac{g\,\alpha\,x^2\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2}}}{c^2\cos\varphi^2},$$

oder mit Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\frac{\alpha}{c^2}$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{c^2\cos\varphi^2}\left(1-\frac{g\alpha x^2\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2}\right)e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}},$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g}{2\alpha c^2\cos\varphi}\left(1-\frac{g\sin\varphi}{2\alpha c^2}+\frac{gx}{c^2}\operatorname{tg}\varphi-\frac{g\alpha x^2\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2}\right)e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}}$$
$$+\frac{g}{2\alpha c^2\cos\varphi}\left(1-\frac{g\sin\varphi}{2\alpha c^2}\right)+\operatorname{tg}\varphi,$$

schliesslich:

$$y=\frac{gx}{2\alpha c^2\cos\varphi}\left(1-\frac{g\sin\varphi}{2\alpha c^2}\right)+x\operatorname{tg}\varphi-\frac{g}{4\alpha^2c^2}\left(1-\frac{3g\sin\varphi}{2\alpha c^2}+\frac{2g\,x\sin\varphi}{c^2\cos\varphi}\right.$$
$$\left.-\frac{g\alpha x^2\sin\varphi}{c^2\cos\varphi^2}\right)e^{\frac{2\alpha x}{\cos\varphi}}+\frac{g}{4\alpha^2c^2}\left(1-\frac{3g\sin\varphi}{2\alpha c^2}\right).$$

Man könnte die Näherung noch weiter fortsetzen. Bei der Complicirtheit der Formel lohnt dies aber kaum der Mühe.

Schliesslich wollen wir annehmen, die Anfangsgeschwindigkeit wäre sehr gering, und deshalb der Widerstand derselben proportional, eine Annahme, die übrigens Geschwindigkeit von höchstens einigen Zoll in der Secunde voraussetzt, also nie bei Geschossen Anwendung findet. Die Bewegungsgleichungen sind dann:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\alpha\frac{dx}{dt}=0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha\frac{dy}{dt}+g=0,$$

die erste integrirt gibt, wenn man den Anfangszustand berücksichtigt:

$$\frac{dx}{dt}=c\cos\varphi-\alpha x,\qquad x=\frac{c\cos\varphi}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}),$$

aus der zweiten Gleichung aber folgt:

$$\frac{dy}{dt}+\alpha y+g\,t=c\sin\varphi.$$

Um diese zu integriren, setzt man bekanntlich:

$$y=uv,$$

und erhält:

$$\frac{udv}{dt}+\frac{vdu}{dt}+\alpha uv+g\,t=c\sin\varphi,$$

also wenn man u durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{du}{dt}+\alpha u=0,\qquad u=e^{-\alpha t},$$

so kommt:

$$e^{-\alpha t}\frac{dv}{dt}+g\,t=c\sin\varphi,$$

$$v=\left(\frac{g}{\alpha}+c\sin\varphi-g\,t\right)\frac{e^{\alpha t}}{\alpha}+\text{const.}$$

$$y=-\frac{g\,t}{\alpha}+\left(\frac{c\sin\varphi}{\alpha}+\frac{g}{\alpha^2}\right)(1-e^{-\alpha t}).$$

Hier ist aus den Werthen von x und y noch t zu eliminiren, um die Bahngleichung zu erhalten. Man bekommt:

$$y=\frac{x}{c\cos\varphi}\left(c\sin\varphi+\frac{g}{\alpha}\right)+\frac{g}{\alpha^2}\lg\left(1-\frac{\alpha x}{c\cos\varphi}\right).$$

Es sind hieran noch einige Worte über die theoretische Berechnung der Anfangsgeschwindigkeit und über den Rücklauf zu knüpfen. Da die Kraft des explodirenden Pulvers nach allen Seiten gleichmässig wirkt, so wird sie nicht allein das Projectil vorwärts, sondern auch das Rohr rückwärts treiben. Man kann diese Bewegung als ausgehend von einer abstossenden Kraft betrachten, die zwischen Rohr und Projectil wirkt.

Sei m die Masse der Kugel, M die der Kanone, die Laffete mit eingeschlossen. Nehmen wir an, dass sich das Pulver sehr schnell und vollständig in Gas verwandle, sei α die Länge der Ladung, R der Druck des Gases; setzen wir constante Temperatur voraus, so kann man das Mariotte'sche Gesetz anwenden, und es wird sein:

$$R=\frac{k\omega\alpha}{r},$$

wo k eine Constante, ω der Durchschnitt der Ladung oder die Oeffnung des Rohres, r der Abstand der Kugel vom Zündende des Geschützes, also die Längenausdehnung des Gases ist. Sind noch v und V die Geschwindigkeiten von Rohr und Kugel, so ist:

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{k\omega\alpha}{r}, \quad M\frac{dV}{dt}=-\frac{k\omega\alpha}{r},$$

also:

$$mv=-MV, \qquad V=-\frac{m}{M}v.$$

Offenbar ist auch, wenn die Bewegung beider Körper in einer Graden erfolgt:

$$v-V=\frac{dr}{dt},$$

also wenn man die erste Gleichung mit $2v$, die zweite mit $2V$ multiplicirt und addirt:

$$m\,d\,v^2+M\,d\,V^2=2k\omega\alpha\,d\lg r,$$

und mit Berücksichtigung, dass für $v=V=0$ auch $r=\alpha$ ist:

$$m v^2+M V^2=2k\alpha\omega\lg\frac{r}{\alpha},$$

also mit Benutzung des ersten Integrals:

$$v^2=\frac{2k\alpha\omega M\lg\frac{r}{\alpha}}{m(M+m)}, \qquad V^2=\frac{2k\alpha\omega m\lg\frac{r}{\alpha}}{M(M+m)}.$$

Ist l die Länge des Rohres, v_1, V_1 die an der Mündung stattfindenden Werthe von v und V, so ist also auch:

$$v_1^2=\frac{2k\alpha\omega M\lg\frac{l}{\alpha}}{m(M+m)}.$$

V_1 ist die Wurfgeschwindigkeit, welche im Obigen mit c bezeichnet worden ist, sie kann also auf diese Weise berechnet werden. Sucht man diejenige Ladungslänge, welche unter sonst gleichen Umständen die grösste Geschwindigkeit gibt, so muss man:

$$\frac{dv_1^2}{d\alpha}=0$$

setzen. Dies gibt:

$$\lg\frac{l}{\alpha}=1, \qquad l=e\cdot\alpha.$$

Uebrigens kann im Nenner des Werthes von v^2 natürlich $M+m$ mit M vertauscht werden.

Um noch die Constante k zu bestimmen, sei D die Dichtigkeit des Pulvers vor der Explosion, also die Masse der Ladung gleich $D\omega\alpha$, das Verhältniss ihres Gewichtes zu dem der Kugel $\frac{1}{\varepsilon}$ (gewöhnlich nimmt man $\varepsilon=3$), also:

$$m = \varepsilon D \omega \alpha,$$

also:

$$k = \frac{\varepsilon D v_1^2}{2(\lg l - \lg \alpha)}.$$

Sei π der atmosphärische Druck auf die Flächeneinheit bezogen, h die Barometerhöhe, μ die Dichtigkeit des Quecksilbers, so ist:

$$\pi = g \mu h.$$

Ist A der Modul der Briggischen Logarithmen:

$$\lg \operatorname{art} \frac{l}{\alpha} = \lambda = A \lg \frac{l}{\alpha},$$

so ist:

$$\frac{k}{\pi} = \frac{\varepsilon A D v_1^2}{2 \lambda g \mu h}.$$

Man hat nun bei 18° Temperatur:

$D = 0{,}8335$, $\mu = 13{,}548$, $g = 9^m{,}80896$, $h = 0^m{,}76$, $A = 0{,}4342945$, $\varepsilon = 3$,
woraus sich ergibt:

$$\frac{k}{\pi} = 0{,}0053761 \frac{v_1^2}{\lambda}.$$

Man nimmt gewöhnlich für den glatten (französischen) 24-Pfünder:

$$V_1 = 463^m, \quad \frac{l}{\alpha} = \frac{1368}{134},$$

also:

$$k = 1142\,\pi.$$

Für den glatten 12-Pfünder ist:

$$v = 493^m, \qquad \frac{l}{\alpha} = \frac{1248}{99}, \qquad k = 1187\,\pi.$$

Im Mittel kann man also nehmen:

$$k = 1165\,\pi.$$

Die Gewichtseinheit von π und somit die von k ist beliebig. Durch die obige Formel:

$$v_1^2 = \frac{2 k \alpha \omega \lg \frac{l}{\alpha}}{m},$$

wo $M + m = M$ gesetzt ist, erhält das oben aufgestellte Gesetz, dass sich unter gleichen Umständen die Quadrate der Anfangsgeschwindigkeiten nahe wie die Gewichte der Ladungen verhalten, seine theoretische Begründung, denn diese Gewichte sind mit α proportional; es ist aber, wenn c, c_1 Anfangsgeschwindigkeiten, α, α_1 die zugehörigen Ladungslängen sind:

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\alpha \lg \frac{\alpha}{l}}{\alpha_1 \lg \frac{\alpha_1}{l}},$$

wenn man nun $\alpha_1 = n\alpha$ setzt, so ist:

$$\lg \frac{\alpha_1}{l} = \lg \frac{\alpha}{l} + \lg n.$$

Da nun $\lg \frac{\alpha}{l}$ für kleines $\frac{\alpha}{l}$ sehr gross ist, so kann $\lg n$ gegen $\lg \frac{\alpha}{l}$ vernachlässigt, und:

$$\frac{c^2}{c_1^2} = \frac{\alpha}{\alpha_1}$$

gesetzt werden.

Wir kommen schliesslich auf eine der wichtigsten Fragen, welche sich in Bezug auf die Geschütze stellen lassen. Dies ist die Ermittelung der grössten Wurfbahn, welche sich bei einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit erreichen lässt. Offenbar ist diese von der Elevation des Geschützes abhängig. Könnte der Widerstand vernachlässigt werden, so gäbe die Formel:

$$y + \frac{gx^2}{2\,c^2 \cos\varphi^2} = x \operatorname{tg} \varphi,$$

wenn man $y = 0$ setzt:

$$gx = 2\,c^2 \sin\varphi \cos\varphi = c^2 \sin 2\varphi,$$

also:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{2c^2}{g} \cos 2\varphi,$$

also für das Maximum von x:

$$\cos 2\varphi = 0, \qquad \varphi = 45^\circ,$$

als diejenige Elevation, welche der grössten Schussweite entspricht, wenn der zu treffende Gegenstand sich in gleicher Höhe mit dem Geschütze befindet.

Soll jedoch der Luftwiderstand berücksichtigt werden, so wird die Auflösung sehr schwierig, und möchte die Analysis wohl nicht die dazu nöthigen Mittel vollständig geben. Wir begnügen uns hier daher mit einigen Erfahrungsresultaten.

Borda findet für den 24-Pfünder von 5,444 Pariser Zoll Durchmesser:

Zum weitesten Wurfe gehörige:

Geschwindigkeit in Pariser Fuss	Elevation
300	42° 10′
600	36 30
1000	33 0
1200	31 40
1500	30 10
1800	28 50
3000	28 10

Hutton berechnet für Kugeln verschiedenen Kalibers folgende Tafel, wo p das Gewicht der eisernen Kugel in Pfunden, D der Durchmesser derselben in Zollen, $v = 178\sqrt{D}$ die Endgeschwindigkeit, h die zu letzterer gehörige Fallhöhe im luftleeren Raume, t die zu der letzteren gehörige Zeit des freien Falles ist:

p	D	v	h	t
1	1,923	247	948	7,72
3	2,773	297	1371	9,28
6	3,494	333	1724	10,41
9	4,000	356	1970	11,12
18	5,040	400	2488	12,50
24	5,546	419	2729	13,09
32	6,106	440	3010	13,75
48	6,988	470	3444	14,67

Ist dann c die Anfangsgeschwindigkeit, φ der Elevationswinkel für die grösste Wurfweite, w diese Wurfweite selbst, so ist:

$\frac{c}{v}$	φ	$\frac{w}{h}$	$\frac{c}{v}$	φ	$\frac{w}{h}$
0,691	44° 0′	0,4110	2,719	38° 0′	2,0379
1,198	42 30	0,8176	3,226	36 30	2,4447
1,705	41 0	1,2244	3,733	35 0	2,8515
2,211	39 30	1,6312	4,240	33 30	3,2853
			4,747	32 0	3,6650

wo v und h nöthigenfalls durch Interpolation der obigen Tafel zu entnehmen sind*).

*) Das wichtigste Werk über diesen Gegenstand ist: Otto, ballistische Tafeln, 1857.

30*

Wurzel (Algebra).

Im engern Sinne $n$te Wurzel aus a, ($\sqrt[n]{a}$), jeder Ausdruck x, welcher die Gleichung $x^n = a$ erfüllt, wo n eine gegebene ganze Zahl, a beliebig ist; im weiteren Sinne jeder Ausdruck x, welcher die Gleichung $f(x) = 0$ erfüllt, wo f eine beliebige Function von x ist. Ist $f(x)$ ein ganzes Polynom, so ist die Anzahl der Wurzeln dem Grade desselben gleich, (vergleiche den Artikel: Quadratischer Factor), also hat jede Zahl auch n Wurzeln vom $n$ten Grade. Ueber das Auffinden derselben siehe den Artikel: Quantität.

Die wirkliche Berechnung reeller Wurzeln geschieht entweder durch Logarithmen, oder wenn viele Stellen verlangt sind, durch die Verbindung der logarithmischen Rechnung mit der Newtonschen Näherungsmethode. Ueber die Anwendung des binomischen Lehrsatzes auf diese Aufgabe siehe den Artikel: Reihen.

Ueber die speciellen Methoden zur Berechnung der Quadrat- und Cubikwurzeln vergleiche die betreffenden Artikel.

X.

Xanthicus (Chronologie).

Der sechste, später dritte Monat im Macedonischen Kalender.

Y.

Yard (Metrologie).

Englische Elle = 3 Feet (Fuss) zu 12 Inches (Zoll), 1 Feet = 0,3047945 Meter.

Yeziegeridisches Jahr (Chronologie).

Das alte Persische Jahr zu 365 Tagen, also ohne Schaltjahr.

Z.

Zählapparat (Maschinenlehre).

Siehe Dynamometer.

Zähler (Arithmetik).

Beim Bruche diejenige Zahl, welche ausdrückt, wieviel gegebene Theile der Einheit zu nehmen sind. Da Bruch und Quotient identisch sind, so fällt der Zähler mit dem Dividendus zusammen.

Zahl (Arithmetik).

Ueber den Begriff der Zahl vergleiche den Artikel: Quantität.

Zahl (ideale).

Siehe: Ideale Zahl.

Zahlenlehre (Arithmetik).

Im engeren Sinne wird so die Lehre von den ganzen Zahlen genannt.

Verschiedene Theile dieser Theorie befinden sich in einzelnen Artikeln dieses Wörterbuchs, z. B. Quadratische Form, Quadratischer Rest (worin auch die Theorie der Congruenzen enthalten ist), Quadratische Gleichung, Kreistheilung, Kettenbruch, Unbestimmte Aufgabe u. s. w. Wir geben hier die einfachsten Sätze der Zahlentheorie als Einleitung in diese verschiedenen Artikel.

I) Definitionen.

Einfache Zahl oder Primzahl heisst eine solche ganze Zahl, welche sich nicht in zwei ganze Factoren zerlegen lässt, deren keine der Einheit gleich ist. Jede andere Zahl heisst zusammengesetzt. Durch Zerlegen der Factoren einer ganzen Zahl lässt sich dieselbe schliesslich in lauter einfache Factoren theilen.

Eine Zahl, die aus einer gegebenen durch Multiplication mit einer ganzen Zahl entsteht, heisst Vielfaches derselben.

Relativ einfache oder relative Primzahlen sind solche, welche nicht Vielfache derselben Zahl sind.

II) Sätze.

Satz A) Um alle Factoren der Zahl a zu bestimmen, braucht man nur die zu finden, welche kleiner als oder gleich $\sqrt{a}$ sind.

Denn sei:

$$a = b\,c,$$

und:

$$c > \sqrt{a},$$

so ist:

$$b = \frac{a}{c} < \sqrt{a},$$

also jedem Factor, der grösser als $\sqrt{a}$ ist, entspricht ein zweiter, der kleiner als $\sqrt{a}$ ist. Hieraus folgt noch:

Satz B) Hat eine Zahl keinen Factor, der kleiner als oder gleich $\sqrt{a}$ ist, so ist sie eine Primzahl.

Satz C) Sind zwei Zahlen a und b Vielfache einer dritten c, so ist auch ihre Summe und Differenz ein Vielfaches von c.

Denn es ist dann:

$$a = mc, \quad b = nc,$$

also:

$$a + b = (m+n)\,c, \quad a - b = (m-n)\,c,$$

also die Summe das $m+n$fache, die Differenz das $m-n$fache der gegebenen Zahl.

Zusatz.

Die Zahlen a und $a-1$ sind relativ

einfach. Denn hätten sie einen Factor b, so wäre $a-(a-1)=1$ durch denselben theilbar:

III) Aufgabe und Sätze.

Aufgabe.

Den grössten gemeinschaftlichen Factor zweier Zahlen zu finden.

Auflösung.

Seien a und b die Zahlen, $a>b$, so ist:

$$a=lb+c,$$

wo l und c durch Division so bestimmt werden können, dass c kleiner als b ist. Indem man so fortfährt, erhält man:

$$a=lb+c,\quad b=mc+d,\quad c=nd+e\ \ldots,$$
$$f=pg+h,\quad g=qh.$$

Kommt man schliesslich auf eine Zahl h, von der die vorletzte g ein Vielfaches ist, so ist h der gesuchte Factor.

Denn zunächst sind a und b Vielfache von h, denn g ist ein Vielfaches von h, wegen $f=pg+h$ ist auch f ein Vielfaches von h u. s. w., wegen $b=mc+d$ ist dann b, und wegen $a=lb+c$ auch a ein solches. — Es gibt aber auch keinen grösseren gemeinschaftlichen Factor von a und b als h. Denn sei k ein solcher, also $k>h$, so ist:

$$a-lb=c,\quad b-mc=d,\ \ldots\ f-pg=h,$$
$$g=qh,$$

also wegen der ersten Gleichung c ein Vielfaches von k, wegen der zweiten ist auch d ein solches, und wegen der vorletzten auch h. Dies ist unmöglich, da h kleiner als k ist.

Zusatz.

Ist $h=1$, so sind a und b relativ einfache Zahlen.

Satz D) Wenn ein Product zweier Zahlen $a\alpha$ ein Vielfaches von b, aber a zu b relativ einfach ist, so muss α ein Vielfaches von b sein.

Beweis.

Nach dem Obigen ist:

$$a=lb+c,\quad b=mc+d\ \ldots\ f=pg+1,$$

da $h=1$ ist. Multiplicirt man nun sämmtliche Gleichungen mit α, so ist:

$$c\alpha=a\alpha-lb\alpha,\quad d\alpha=b\alpha-mc\alpha\ \ldots,$$
$$\alpha=f\alpha-pg\alpha,$$

also da $a\alpha$ und $lb\alpha$ Vielfache von b sind, auch $c\alpha$ ein solches, folglich auch $d\alpha$ ein solches. Fährt man fort, so ist schliesslich α ein Vielfaches von b. — Hieraus folgt:

Satz E) Eine Zahl, die auf irgend eine Art in Primzahlen zerlegt ist, kann kein Vielfaches einer anderen darin nicht enthaltenen Primzahl sein.

Denn sei $A=abcd\ \ldots$ die Zahl, wo $a, b, c, d\ \ldots$ Primzahlen sind, worunter jedoch auch gleiche sein können. Wäre nun ae ein Vielfaches von m, also $bcd\ \ldots$ ein solches, aber b kein Vielfaches von m, also $cd\ \ldots$ ein solches u. s. w., so dass schliesslich der letzte einfache Factor von A ein Vielfaches von m sein müsste, was unmöglich ist.

Hieraus folgt endlich der wichtige Satz:

Satz F) Jede Zahl lässt sich nur auf eine Art in einfache Factoren zerlegen.

Denn ist:

$$A=abc\ \ldots\ =a_1 b_1 c_1,$$

a, b, c und a_1, b_1, c_1 einfache Factoren, so muss nach dem vorigen Satze a_1 einem der Factoren $a, b, c\ \ldots$ gleich sein, also z. B. gleich a, dann wäre:

$$bc\ \ldots\ =b_1 c_1\ \ldots,$$

also b_1 gleich einem der Factoren b, c, etwa gleich b u. s. w.

Scholion.

Es lässt sich somit jede Zahl auf eine und nur eine Art in der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ \ldots$, wo a, b, c Primzahlen, α, β, γ beliebige ganze Zahlen sind, darstellen. Indess ist die Zerlegung der Zahlen noch nicht geendet, wenn man den Begriff des Complexen in die Zahlenlehre einfügt. Der Ausdruck $a+b\sqrt{-1}$ wird complexe ganze Zahl genannt, wenn a und b ganze Zahlen sind. Eine complexe Zahl, die sich nicht in zwei complexe Factoren derselben Art theilen lässt, heisst complexe Primzahl. Eine reelle Primzahl braucht deshalb keine complexe zu sein. Hat eine reelle Primzahl jedoch einen Factor $a+b\sqrt{-1}$, so muss sie auch einen Factor $a-b\sqrt{-1}$ haben, denn wenn:

$$\frac{n}{a+b\sqrt{-1}}=c+d\sqrt{-1},$$

so ist offenbar auch:

$$\frac{n}{a-b\sqrt{-1}}=c-d\sqrt{-1},$$

also die Zahl n auch durch $a-b\sqrt{-1}$ theilbar. Ist also die reelle Primzahl n keine complexe, so hat sie die Form:

$$n=(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2+b^2.$$

Eine reelle Zahl, welche eine complexe Primzahl ist, kann nicht die Summe zweier Quadrate sein. Es lässt sich zeigen (vergleiche den Artikel: Quadratische Form), dass jede Primzahl von der Form $4n+1$ sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lässt, eine solche von der Form $2n+3$ aber nicht. Die letzteren sind also complexe Primzahlen, z. B. 3, 7, 11 u. s. w.

Man betrachtet auch complexe Zahlen von der Form:

$$a+b\alpha+c\alpha^2+\ldots,$$

wo α eine $n$te Wurzel der Einheit, auch wohl die $n$te Wurzel irgend einer anderen Zahl, oder selbst die Wurzel einer gegebenen irreductiblen Gleichung ist. Sei z. B. $\alpha=\sqrt[3]{1}$, so kann man eine gegebene Zahl A in der Form ausdrücken:

$$A=(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha^4)$$
$$=(a+b\alpha+c\alpha^2)(a+b\alpha^2+c\alpha).$$

Es muss dann A sein von der Form:

$$A=a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc,$$

wie sich durch Multiplication ergibt.

Bei diesen Zerlegungen findet der Satz, dass jede Zahl sich nur auf eine Art in Factoren zerlegen lässt, nicht mehr statt, und um eine solche Zerlegung dennoch zu bewerkstelligen, hat Kummer ein neues Element: Die idealen Factoren in die Zahlentheorie eingeführt (vergleiche den Artikel: Idealer Factor).

IV) Sätze und Aufgaben.

Satz G) Da alle einfachen und zusammengesetzten Factoren der Zahl $A=a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots$ von der Form sind: $a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1}$, wo α_1, β_1, γ_1 nicht grösser als bezüglich α, β, $\gamma\ldots$, so sind diese Zahlen alle 1 und A selbst enthalten in der Entwickelung von:

$$(1+a+a^2+\ldots+a^\alpha)(1+b+b^2+\ldots+b^\beta)((1+c+c^2+\ldots+c^\gamma)\ldots$$

Es ist somit die Anzahl der Factoren von A gleich:

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

Ferner ist ihre Summe dem obigen Producte gleich, also gleich:

$$\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\,\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\,\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\ldots$$

In gleicher Weise lässt sich die Summe der gleichnamigen Potenzen dieser Factoren bestimmen.

Aufgabe.

Die Anzahl der Zahlen zu bestimmen, welche kleiner als und zu A relativ einfach sind.

Auflösung.

Von den Zahlen, die kleiner als A sind, werden durch a theilbar sein: $a, 2a, 3a\ldots\frac{A}{a}a$, im Ganzen $\frac{A}{a}$, also durch a nicht theilbar $A-\frac{A}{a}=A\left(1-\frac{1}{a}\right)$. Durch b sind theilbar: $b, 2b, 3b\ldots\frac{A}{b}b$, von diesen sind auch durch a nicht theilbar, alle, bei denen dies der erste Factor $1, 2\ldots\frac{A}{b}$ nicht ist, also im Ganzen $\frac{A}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)$ Zahlen, also durch a und b sind nicht theilbar:

$$A\left(1-\frac{1}{a}\right)-\frac{A}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right)=A\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right).$$

Auch durch c nicht theilbar sind hiervon, wie sich in derselben Weise ergibt,

$A\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)$ Zahlen u. s. w., so dass die Anzahl der zu A relativ einfachen, welche wir mit $\varphi(A)$ bezeichnen wollen, ist:

$$\varphi(A)=A\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots=\frac{A\,(a-1)\,(b-1)\,(c-1)}{a\quad b\quad c}\ldots$$

$$=a^{\alpha-1}(a-1)\,b^{\beta-1}(b-1)\,c^{\gamma-1}(c-1)\ldots$$

Diesen Ausdruck kann man nach Dirichlet auch auf folgende Art finden. — 1) Alle Zahlen von 1 bis A sind:

$$1,\ 2,\ 3\ \ldots\ A,$$

2) alle darunter, welche einen Prim-Factor $a, b, c \ldots$ mit A gemein haben:

$$a,\ 2a\ \ldots\ \frac{m}{a}a,\quad b,\ 2b\ \ldots\ \frac{m}{b}b\ \ldots,$$

3) alle, welche 2 Factoren mit a gemein haben:

$$ab,\ 2ab\ \ldots\ \frac{m}{ab}ab,\quad ac,\ 2ac\ \ldots\ \frac{m}{ac}ac\ \ldots$$

u. s. w. Jede Zahl nun, die zu A relativ einfach ist, kommt nur einmal in 1) vor, jede Zahl r, die h Factoren a, b, c mit A gemein hat, kommt vor:

in 1) einmal, in 2) $h$mal, in 3) $h_2$mal, in 4) h_3 mal u. s. w.,

wo $h_2, h_3 \ldots$ die Anzahl der Combinationen zu 2, 3 ... aus h Elementen sind. Nun ist:

$$1-h+h_2-h_3+\ldots=(1-1)^h=0,\quad 1+h_2+h_4+\ldots=h_1+h_3+h_5+\ldots,$$

d. h. r kommt so oft in 1, 3, 5 ... zusammen, als in 2, 4, 6 ... vor.

Zieht man also von der Gesammtzahl der Glieder in 1, 3, 5 ... die in 2, 4, 6 ... ab, so hat man alle zu A relativ einfachen Zahlen, und diese ist:

$$\varphi(A)=A-\frac{A}{a}-\frac{A}{b}+\frac{A}{ab}+\frac{A}{ac}+\ldots=A\left(1-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\ \ldots\right)$$

$$=A\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$

Diese Entwickelung hat den wesentlichen Vorzug vor der vorigen, dass sich auch die Summen von Functionen der Zahlen, die zu A relativ einfach sind, finden lassen. Ihre Summe ergibt sich leicht aus der Betrachtung, dass je zwei dieser Zahlen sich zu ergänzen gleich:

$$\frac{A}{2}\varphi(A)=\frac{A^2}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots$$

Die Summe ihrer Quadrate ist offenbar:

$$Q=1^2+2^2+\ldots+A^2-a^2\left(1^2+2^2+\ldots+\frac{A^2}{a^2}\right)-b^2\left(1^2+2^2+\ldots+\frac{A^2}{b^2}\right)$$

$$-\ldots+a^2b^2\left(1^2+2^2+\ldots+\frac{A^2}{a^2b^2}\right)+\ldots$$

Nun ist:

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k^3}{3}+\frac{k^2}{2}+\frac{k}{6},$$

also:

$$Q=\frac{A^3}{3}+\frac{A^2}{2}+\frac{A}{6}-a^2\left(\frac{A^3}{3a^3}+\frac{A^2}{2a^2}+\frac{A}{6a}\right)-b^2\left(\frac{A^3}{3b^3}+\frac{A^2}{2b^2}+\frac{A}{6b}\right)-\ldots$$

$$+a^2b^2\left(\frac{A^3}{3a^3b^3}+\frac{A^2}{2a^2b^2}+\frac{A}{6ab}\right)+\ldots$$

Ist n die Anzahl der Factoren a, b, c, so ist der Coefficient der mit A^2 multiplicirten Glieder gleich:

$$\tfrac{1}{2}(1-n_1+n_2-n_3+\ldots)=0,$$

also:

$$Q=\frac{A^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots+\frac{A}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\ldots$$
$$=\frac{A}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots(A^2-\tfrac{1}{2}abc\ldots).$$

Zusätze.

Ist A eine Primzahl, so ist offenbar:

$$\varphi(A)=A-1,$$

jedoch für $A=1$ hat man:

$$\varphi(1)=1.$$

Ist A Potenz einer Primzahl gleich a^α, so ist:

$$\varphi(a^\alpha)=a^{\alpha-1}(a-1).$$

Sind p und q relativ einfach, so ist:

$$\varphi(p,\ q)=\varphi(p)\,\varphi(q),$$

alles dies ergibt sich sogleich aus der Form von $\varphi(A)$.

Satz H) Bestimmt man alle Divisoren D von A, eingeschlossen 1 und A und die zugehörigen Functionen φ, so ist:

$$\Sigma\,\varphi(D)=A.$$

Beweis 1).

Es ist jedenfalls D von der Form:

$$D=a^{\alpha_1}\,b^{\beta_1}\,c^{\gamma_1}\ldots,\quad \alpha_1\leqq\alpha,\quad \beta_1\leqq\beta\ldots,$$
$$\varphi(D)=\varphi(a^{\alpha_1}\,b^{\beta_1}\,c^{\gamma_1}\ldots)=\varphi(a^{\alpha_1})\,\varphi(b^{\beta_1})\,\varphi(c^{\gamma_1})\ldots$$

Alle Werthe von $\varphi(D)$ aber erhält man, wenn man alle Werthe von a^{α_1}, wo $\alpha_1\leqq\alpha$ ist, mit allen von β_1 u. s. w. verbindet. Es ist also wie in Satz G):

$$\Sigma\,\varphi(D)=[\varphi(1)+\varphi(a)+\varphi(a^2)+\ldots+\varphi(a^\alpha)]\,[(\varphi(1)+\varphi(b)+\varphi(b^2)+\ldots$$
$$+\varphi(b^\beta)]\,[\varphi(1)+\varphi(c)+\varphi(c^2)+\ldots+\varphi[(c^\gamma)]\ldots$$
$$=[1+(a-1)+(a-1)a+\ldots+(a-1)a^{\alpha-1}]\,[1+(b-1)+(b-1)b+\ldots$$
$$+(b-1)b^{\beta-1}]\ldots[1+(c-1)+(c-1)c+\ldots(c-1)c^{\gamma-1}]\ldots$$
$$=(1+a^\alpha-1)(1+b^\beta-1)(1+c^\gamma-1)\ldots=a^\alpha\,b^\beta\,c^\gamma\ldots=A,$$

was zu beweisen war.

Bei der Wichtigkeit dieses Satzes geben wir noch einen anderen Beweis.

Beweis 2).

Suchen wir die Zahlen der Reihe 1, 2 . . . A, welche mit A den grössten Theiler D gemein haben.

Den Theiler D überhaupt haben die Zahlen D, $2D \ldots \frac{A}{D}D$. Der grösste Theiler ist D bei denjenigen, wo deren erster Factor zu $\frac{A}{D}$ relativ einfach ist, und die Anzahl dieser Zahlen ist $\varphi\left(\frac{A}{D}\right)$. Setzt man nun für D alle Theiler von A, so erhält man auch alle Zahlen von 1 bis A, und also $\Sigma\,\varphi\left(\frac{A}{D}\right)=A$.

Für jeden Werth von $D'=\frac{A}{D}$ gibt es nun einen und nur einen Werth von D, so dass:

$$\Sigma\, q\left(\frac{A}{D}\right)=\Sigma\, q\,(D)=A$$

ist.

Satz und Scholion.

Satz J) Die Anzahl der Primzahlen ist unbegrenzt.

Beweis.

Angenommen, es wäre p die letzte Primzahl, so müsste jede Zahl, die grösser als p ist, sich in einfache Factoren zerlegen lassen, die nicht grösser als p sind. Betrachten wir nun die Zahl:

$$K=1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ p+1.$$

Es ist $K-1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ p=1$. Da nun das zweite Glied jeden Factor q hat, der kleiner als p ist, so muss derselbe auch, falls ihn K hat, in 1) enthalten sein, was unmöglich ist.

Scholion.

Diesem Satz lässt sich eine wichtige Erweiterung geben.

„Jede arithmetische Reihe, deren erstes Glied und Differenz relativ einfach sind, enthält unendlich viel Primzahlen."

Der von Dirichlet gegebene Beweis soll hier als Anhang folgen. Er geht von denjenigen Betrachtungen aus, welche Dirichlet mit so vielem Glücke in der Theorie der quadratischen Formen (vergleiche den entsprechenden Artikel) eingeführt hat.

Die Primzahlen lassen sich auf folgende Weise in Klassen theilen. Sei A irgend eine gegebene Zahl, und p eine nicht darin enthaltene Primzahl, so ist jedenfalls:

$$p=nA+r,$$

wo r kleiner als A gemacht werden kann, und mit A keinen Factor gemein hat. Sei z. B. $A=10$, so kann r nur $=1, 3, 7, 9$ sein; alle Primzahlen mit Ausnahme von 2 und 5, zerfallen in Klassen von der Form:

$$10n+1, \qquad 10n+3, \qquad 10n+7, \qquad 10n+9.$$

Ist $A=4$, so kann r nur gleich 1 und 3 sein, alle Primzahlen mit Ausnahme von 2 zerfallen also in die Klassen:

$$4n+1, \qquad 4n+3,$$

von denen die letzteren, wie oben gezeigt, auch complexe Primzahlen sind.

Den einzelnen Theilen der Zahlentheorie, von der wir hier die allerersten Elemente gegeben haben, sind specielle Artikel gewidmet. Die wichtigsten Lehrbücher über diesen Gegenstand sind:

Le Gendre, *Théorie des nombres.*

Gauss, *Disquisitiones arithmeticae.*

Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie (herausgegeben von Dedekind).

Anhang.

Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte arithmetische Progression, deren erstes Glied und Differenz relativ einfach sind, unendlich viel Primzahlen enthält.

A) Einleitende Betrachtungen.

Der hier zu gebende Beweis dieses schwierigen Satzes ist von Dirichlet (vergleiche Abhandlungen der Berliner Academie, Jahrgang 1837).

Sei p eine ungrade Primzahl, c eine primitive Wurzel derselben. Es werden somit die Reste der Potenzen $c^0, c^1, c^2\ \ldots\ c^{h-2}$ nach p in anderer Ordnung die Zahlen $1, 2, 3\ \ldots\ p-1$ ergeben (vergleiche den Artikel: Quadratischer Rest). Ist ferner:

$$\gamma < p-1, \qquad \text{und} \qquad c^\gamma \equiv m \bmod p,$$

so nennt man γ den Index von n (Ind n). Derselbe erfüllt die der Grundeigenschaft der Logarithmen analoge Congruenz:

$$\text{Ind}\, a b \equiv \text{Ind}\, a + \text{Ind}\, b \bmod p-1.$$

Es ist ferner:

$$\text{Ind}\, 1 = 0, \quad \text{Ind}\,(p-1) = \frac{p-1}{2},$$

ferner Ind n grade oder ungrade, je nachdem n quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist (siehe den erwähnten Artikel).

Sei nun ω irgend eine Wurzel der Gleichung:

1) $$\omega^{p-1} - 1 = 0,$$

q eine von p verschiedene Primzahl, s eine positive beliebige Zahl, die grösser als 1 ist, so ist offenbar:

2) $$\frac{1}{1-\omega^\gamma \dfrac{1}{q^s}} = 1 + \omega^\gamma \frac{1}{q^s} + \omega^{2\gamma} \frac{1}{q^{2s}} + \omega^{3\gamma} \frac{1}{q^{3s}} + \ldots$$

In dieser Gleichnng soll jetzt $\gamma = \text{Ind}\, q$ gesetzt, für q alle von p verschiedenen Primzahlen genommen, und die entsprechenden Gleichungen mit einander multiplicirt werden. Man erhält dann als allgemeines Glied:

$$\omega^{m_1 \text{Ind}\, q_1 + m_2 \text{Ind}\, q_2 + \ldots} \frac{1}{q_1^{s m_1} q_2^{s m_2}}.$$

Sei ferner:

$$q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots = n,$$

wo n also nicht durch p theilbar ist, so hat man:

$$m_1 \text{Ind}\, q_1 + m_2 \text{Ind}\, q_2 \equiv \text{Ind}\,(q_1^{m_1} q_2^{m_2} \ldots) \equiv \text{Ind}\, n \bmod p-1,$$

das allgemeine Glied ist also: $\omega^{\text{Ind}\, n} \dfrac{1}{n^s}$. Also wenn unter Π das Product der entsprechenden Factoren verstanden wird:

$$L = \Pi \left\{ \frac{1}{1-\omega^{\text{Ind}\, q} \dfrac{1}{q^s}} \right\} = \Sigma \left(\omega^{\text{Ind}\, n} \frac{1}{n^s} \right).$$

Das Zeichen π geht auf alle Primzahlen q, die von p verschieden sind, das Summenzeichen auf alle Zahlen n, die nicht durch p theilbar sind.

s kann hierin alle Werthe zwischen $+2$ und ∞ haben. Diese Bedingung ist der Convergenz der Entwickelung wegen nöthig. Denn sei $f_m + g_m \sqrt{-1}$ das Product der m ersten Factoren von L. Diese m Factoren mögen allen Grössen q entsprechen, die kleiner als h sind, wo h irgend eine ganze Zahl vorstellt.

Sei dann $L = \lambda + \mu i$ der Werth der in 3) gegebenen unendlichen Reihe, so ist offenbar:

$$f_m - \lambda + i(g_m - \mu) = \Sigma \left(\omega^{\text{Ind}\, n} \frac{1}{p^s} \right),$$

wo die Summe rechts nur Ausdrücke n, die nicht kleiner als h sind, enthält. Also ist:

$$f_m - \lambda \text{ und } g_m - \mu < \frac{1}{h^s} + \frac{1}{(h+1)^s} + \frac{1}{(h+2)^s} \ldots,$$

ein Ausdruck, der unter jede Grenze sinkt, wenn h wachsend genommen wird, jedoch nur dann, wenn $s > 1$ ist. Dann ist also $f_m = \lambda$, $g_m = \mu$, und unsere Reihe

convergirt in der That. Man kann aber s auch gleich $1+\varrho$ setzen, und ϱ jeden noch so kleinen positiven Werth geben. Es fragt sich, was wird aus L, wenn ϱ unendlich klein wird? Hierbei ist jedoch auf die verschiedenen Werthe von L Rücksicht zu nehmen. Den $p-1$ Werthen von ω, nämlich:

$$\omega=\varepsilon^0,\ \varepsilon^1,\ \varepsilon^2\ \ldots\ \varepsilon^{p-2},$$

wo ε eine primitive Wurzel der Einheit ist, entsprechen die Werthe von L:

4) $$L=L_0,\quad L=L_1\ \ldots\ L=L_{p-1},$$

und hierin ist:

$$\varepsilon^0=1,\quad \varepsilon^{\frac{p-1}{2}}=-1$$

zu setzen. Wir suchen zunächst den Werth von L_0, der $\varepsilon^0=1$ entspricht.

Betrachten wir zunächst die Reihe:

$$S=\frac{1}{k^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+1)^{1+\varrho}}+\ldots,$$

wo k eine positive ganze Zahl ist.

Setzt man in die Formel:

$$\int_0^1 x^{k-1}\lg^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{\Gamma(1+\varrho)}{k^{1+\varrho}}$$

für k der Reihe nach k, $k+1$, $k+2$ ... und addirt, so erhält man:

$$S=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1 \lg^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)\frac{x^{k-1}}{1-x}\,\partial x.$$

Addirt man $\frac{1}{\varrho}$ und subtrahirt:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1+\varrho)}=\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1 \lg^{\varrho-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

so erhält man:

$$S=\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\Gamma(1+\varrho)}\int_0^1\left\{\frac{x^{k-1}}{1-k}-\frac{1}{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}\lg^{\varrho}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Das zweite Glied nähert sich für unendlich kleines ϱ der Grenze:

$$\int_0^1\left\{\frac{x^{k-1}}{1-x}-\frac{1}{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}\right\}dx.$$

Nehmen wir nun die Reihe:

$$\frac{1}{b^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\ldots=\frac{1}{a^{1+\varrho}}\left\{\frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{1+\varrho}}+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}+1\right)^{1+\varrho}}+\frac{1}{\left(\frac{b}{a}+2\right)^{1+\varrho}}+\ldots\right\},$$

so ist diese $=\frac{1}{a}\,\frac{1}{r}+\varphi(\varrho)$, wo sich $\varphi(\varrho)$ einer endlichen Grenze nähert. Nun besteht L_0 aus $p-1$ Partialreihen von der Form:

$$\frac{1}{m^{1+\varrho}}+\frac{1}{(p+m)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2p+m)^{1+\varrho}}+\ldots,$$

wo man für m: 1, 2 . . . $p-1$ zu setzen hat, also:

5)
$$L_0 = \frac{p-1}{p}\,\frac{1}{\varrho} + \psi(\varrho),$$

wo $\psi(\varrho)$ für unendlich kleines ϱ einen endlichen Werth annimmt. Also wird L_0 für $\varrho = 0$ ∞, so dass $L_0 - \frac{p-1}{p\varrho}$ endlich bleibt.

Denken wir uns jetzt die allgemeine Reihe L so geordnet, dass n wachsend fortschreitet, so ist für unendlich kleines ϱ die Reihe gleich $\Sigma\left(\omega^\gamma \frac{1}{n}\right)$, was für andere Ordnung nicht nöthig wäre. Denn sei h irgend eine ganze Zahl, so ist die Summe der $hp-1$ ersten Glieder gleich:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p} \lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx - \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p} \lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)x^{hp}\,dx,$$

weil:

$$\int_0^1 x^{n-1}\lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{\Gamma(s)}{n^s},$$

wo:

$$f(x) = \omega^{\gamma_1}x + \omega^{\gamma_2}x^2 + \ldots + \omega^{\gamma_{p-1}}x^{p-1}.$$

Ist nun ω nicht gleich 1, so ist $\frac{1}{x}f(x)$ durch $1-x$ theilbar, denn man hat:

$$f(x) = \omega^{\gamma_1} + \omega^{\gamma_2} + \ldots + \omega^{\gamma_n} = 1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{p-2} = 0.$$

Befreit man Zähler und Nenner des Bruches unter dem Integralzeichen von diesem Factor $1-x$, so wird derselbe: $\frac{t+ui}{1+x+x^2+\ldots+x^{p-1}}$. t und u sind Polynome mit reellen Coefficienten. Seien nun T und U die grössten Zahlenwerthe von t und u zwischen den Grenzen 0 und 1, so sind der reelle und imaginäre Theil des zweiten Integrales bezüglich kleiner als:

$$\frac{T}{\Gamma(s)}\int_0^1 x^{hp}\lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{T}{(hp+1)^s},$$

und:

$$\frac{U}{\Gamma(s)}\int_0^1 x^{hp}\lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{U}{(hp+1)^s}.$$

Das Integral verschwindet also für $h = \infty$. Also convergirt die Reihe für die angenommene Ordnung der Glieder, und es ist:

$$\Sigma\omega^\gamma \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p}\lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx.$$

Hier wie im Folgenden ist immer:

$$\gamma = \operatorname{Ind} q, \quad \gamma_m = \operatorname{Ind} m \;\ldots$$

So lange $s > 0$ ist, bleibt diese Function stetig und endlich, und ebenso ihr Differenzialquotient nach s, wie man findet, wenn man nach s differenziirt, und berücksichtigt, dass $\Gamma(s)$, $\frac{d\Gamma(s)}{dx}$ stetig und endlich sind, und dass für positives s: $\Gamma(s)$ nicht 0 wird. Setzt man also:

$$\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 \frac{\frac{1}{x}f(x)}{1-x^p}\lg^{s-1}\left(\frac{1}{x}\right)dx+\psi(s)+i\chi(s),$$

so ist für positives ϱ:

6) $\psi(1+\varrho)=\psi(1)+\varrho\,\psi'(1+\vartheta\varrho),\qquad \chi(1+\varrho)=\chi(1)+\varrho\chi'(1+\varepsilon\varrho),$

wo ϑ und ε positive, von ϱ abhängige Brüche sind. Für $\omega=-1$ wird $\chi(1)=0$, und die conjugirten Wurzeln ω, $\frac{1}{\omega}$ haben gleiche ψ, entgegengesetzte χ.

Es ist nun zu beweisen, dass die endliche Grenze, der sich $\Sigma\omega^\gamma\frac{1}{n^{1+\varrho}}$ nähert, wenn ω nicht $=1$ ist, für unendlich kleines ϱ von 0 verschieden ist. Diese Grenze ist:

$$\Sigma\omega^\gamma\frac{1}{n}=-\int_0^1\frac{\frac{1}{x}f(x)}{x^p-1}dx.$$

Sei irgend ein Linearfactor des Nenners $x-e^{\frac{2m\pi}{p}i}$, m aus der Reihe 0, 1, 2 . . . $p-1$. Zerlegt man $\frac{\frac{1}{x}f(x)}{x^p-1}$ in Partialbrüche, so wird der Zähler des Bruches $\frac{A_m}{x-e^{\frac{2m\pi}{p}\sqrt{-1}}}$ durch den Ausdruck $\frac{\frac{1}{x}f(x)}{px^{p-1}}$, worin $x=e^{\frac{2m\pi}{p}i}$ zu setzen ist, also:

$$A_m=\frac{1}{p}f\left\{e^{\frac{2m\pi}{p}i}\right\}.$$

Da $A_0=0$ ist, so hat man:

$$\Sigma\omega^\gamma\frac{1}{n}=-\frac{1}{p}\sum_{m=1}^{m=p-1}f\left\{e^{\frac{2m\pi}{p}i}\right\}\int_0^1\frac{dx}{x-e^{\frac{2m\pi}{p}i}}$$

$$f\left\{e^{\frac{2m\pi}{p}i}\right\}=\sum_{g=1}^{g=p-1}\omega^{\gamma_g}e^{gm\frac{2\pi}{i}i}.$$

Setzt man für gm den Rest h nach mod p, so sind 1, 2 . . . $p-1$ die Werthe von h, und da:

$$gm\equiv h \bmod p,$$

so ist:

$$\operatorname{Ind} g\equiv\operatorname{Ind} h-\operatorname{Ind} m \bmod p-1,$$

also:

$$f\left\{e^{\frac{2m\pi}{p}i}\right\}=\omega^{-\gamma_m}\Sigma\omega^{\gamma_h}e^{h\frac{2\pi}{p}i}=\omega^{-\gamma_m}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\},$$

und man hat:

$$\Sigma\omega^{\gamma}\frac{1}{n}=-\frac{1}{p}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\}\Sigma\omega^{-\gamma_m}\int_0^1\frac{dx}{x-e^{\frac{2m\pi}{p}i}}$$

$$=-\frac{1}{p}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\}\Sigma\omega^{-\gamma_m}\left[\lg\left(2\sin\frac{m\pi}{p}\right)+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2m}{p}\right)i\right].$$

Hieraus kann man noch nicht schliessen, dass dieser Ausdruck im Allgemeinen von 0 verschieden ist. Ist jedoch $\omega=-1$, so erhält man, da $\operatorname{Ind} m$ grade oder ungrade, je nachdem $\left(\frac{m}{p}\right)$ gleich $+1$ oder -1, also:

$$(-1)^{-\operatorname{Ind} m}=\left(\frac{m}{p}\right),\quad (-1)^{\operatorname{Ind} n}=\left(\frac{n}{p}\right),$$

als Grenze von $L_{\frac{p-1}{2}}$ für unendlich kleines ϱ:

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=-\frac{1}{p}fe^{\frac{2\pi}{p}i}\Sigma\left(\frac{m}{p}\right)\left[\lg\left(2\sin\frac{m\pi}{p}\right)+\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2m}{p}\right)i\right],$$

und da zwischen den Grenzen $m=1$ und $m=p-1$: $\Sigma\left(\frac{m}{p}\right)=0$ ist:

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=-\frac{1}{p}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\}\Sigma\left(\frac{m}{p}\right)\left[\lg\left(2\sin\frac{m\pi}{p}\right)-\frac{\pi}{p}mi\right].$$

Wir unterscheiden nun die Fälle, wo p von der Form $4\mu+3$ und wo es $4\mu+1$ ist. Im ersten Falle ist:

$$\left(\frac{m}{p}\right)=-\left(\frac{p-m}{p}\right)\text{ und }\sin\frac{m\pi}{p}=\sin\frac{(p-m)\pi}{p},$$

also verschwindet der reelle Theil der Summe, und wenn man mit a die Werthe von m bezeichnet, für die $\left(\frac{m}{p}\right)=1$, mit b die, wo $\left(\frac{m}{p}\right)=-1$ ist, so ist:

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{p^2}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\}(\Sigma a-\Sigma b)\,i.$$

Ist $p=4\mu+1$, so verschwindet der imaginäre Theil, und man hat:

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{p}f\left\{e^{\frac{2\pi}{p}i}\right\}\lg\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}}.$$

Wenn nun $\omega=-1$ ist, so ist im ersten Falle $f\left(e^{\frac{2\pi}{p}i}\right)=\sqrt{p}\sqrt{-1}$, im zweiten $=\sqrt{p}$. Man hat also respective:

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{\pi}{p\sqrt{p}}(\Sigma b-\Sigma a),$$

$$\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{p}}\lg\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}}.$$

Im ersten Falle ist jedenfalls $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ von 0 verschieden, da $\Sigma a+\Sigma b=p\left(\frac{p-1}{2}\right)$

ungrade ist, also Σa nicht gleich Σb. Für den zweiten Fall nimmt man die Gleichungen:

$$2\Pi\left(x-e^{\frac{2a\pi}{p}i}\right)=Y-Z\sqrt{p},$$

$$2\Pi\left(x-e^{\frac{2b\pi}{p}i}\right)=Y+Z\sqrt{p},$$

wo Y und Z Polynome mit ganzen Coefficienten sind Die Multiplication dieser Producte gibt:

$$4\frac{x^p-1}{x-1}=Y^2-pZ^2.$$

Sei nun $x=1$, und nennt man g und h die ganzen Zahlen, die Y und Z gleich werden, so kommt:

$$2^{\frac{p+1}{2}}\Pi\sin\frac{a\pi}{p}=g-h\sqrt{p},$$

$$2^{\frac{p+1}{2}}\Pi\sin\frac{b\pi}{2}=g+h\sqrt{p},\quad g^2-ph^2=4p.$$

Es ist also g durch p theilbar. Setzt man $g=pk$, und dividirt die beiden ersten Glieder durch einander, so kommt:

$$\frac{\Pi\sin\frac{b\pi}{p}}{\Pi\sin\frac{a\pi}{p}}=\frac{k\sqrt{p}+h}{k\sqrt{p}-h},$$

$$h^2=pk^2=-4.$$

Nach der zweiten Gleichung ist h nicht 0, also sind beide Seiten der ersten von 1 verschieden, woraus mit Berücksichtigung des obigen Ausdruckes folgt, dass $\Sigma\left(\frac{n}{p}\right)\frac{1}{n}$ nicht gleich Null ist. Als Grenzwerth eines Productes positiver Factoren $\Pi\frac{1}{1-\left(\frac{q}{q}\right)\frac{1}{q^{1+\varrho}}}$ ist es auch positiv. (Hieraus folgt übrigens auch, dass für $p=4\mu+3$, $\Sigma b>\Sigma a$ ist.)

Wenn m weder 0 noch $\frac{p-1}{2}$ ist, soll jetzt nachgewiesen werden, dass L_m für unendlich kleines ϱ von 0 verschieden ist. Man entwickelt in $\Pi\frac{1}{1-\omega^\gamma\frac{1}{q^{1+\varrho}}}$ den Logarithmus jeden Factors durch die Formel:

$$-\lg(1-x)=x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\ldots,$$

und findet:

$$\Sigma\omega^\gamma\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\omega^{2\gamma}\frac{1}{(q^2)^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{3}\Sigma\omega^{3\gamma}\frac{1}{(q^3)^{1+\varrho}}+\ldots=\lg L,$$

wo sich die Summe auf q bezieht. Setzt man für ω der Reihe nach $1, \varepsilon, \varepsilon^2 \ldots \varepsilon^{p-2}$, addirt, mit Berücksichtigung, dass $1+\varepsilon^{h\gamma}+\varepsilon^{2h\gamma}+\ldots+\varepsilon^{(p-2)h\gamma}$ verschwindet, wenn $h\gamma$ nicht durch $p-1$ theilbar ist, wenn letzteres aber stattfindet, gleich $p-1$ ist, und dass die Bedingung $h\gamma\equiv 0 \bmod p-1$ gleichbedeutend $1^h\equiv 1 \bmod p$ ist, so ist:

$$(p-1)\left(\Sigma\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\tfrac{1}{3}\Sigma\frac{1}{q^{3+3\varrho}}+\ldots\right)=\lg(L_0\,L_1\ldots L_{p-2}),$$

wo sich die erste, zweite . . . Summation auf die Werthe von q erstreckt, deren erste, zweite . . . Potenzen in der Form $\mu p+1$ enthalten sind. Da die erste Seite reell ist, so ist das Product, dessen Logarithmus genommen ist, positiv. Die linke Seite bleibt stets positiv, und es lässt sich zeigen, dass wenn man L_m als verschwindend annähme, die zweite Seite $-\infty$ würde. Diese zweite Seite ist:

$$\lg L_0+\lg\frac{L_{p-1}}{2}+\lg L_1\frac{L_{p-2}}{3}+\lg L_2\,L_{p-3}+\ldots,$$

wo wegen 5):

$$\lg L_0=\lg\left(\frac{p-1}{p}\,\frac{1}{\varrho}+q\,\varrho\right)=\lg\left(\frac{1}{\varrho}\right)+\lg\left(\frac{p-1}{p}+\varrho\,q\,\varrho\right)$$

ist. Das zweite Glied nähert sich der endlichen Grenze $\lg\left(\frac{p-1}{p}\right)$. $\lg\frac{L_{p-1}}{2}$ bleibt endlich, da der Grenzwerth von $\frac{L_{p-1}}{2}$ von 0 verschieden ist. Einer der übrigen Logarithmen, $\lg L_m,\ L_{p-1-m}$ ist noch:

$$\lg[\psi^2(1+\varrho)+\chi^2(1+\varrho)],$$

welcher Ausdruck, wenn L_m, also auch L_{p-1-m} die 0 zur Grenze hätte, so dass $\psi(1)=\chi(1)=0$ wäre, in:

$$\lg\varrho^2[\psi'^2(1+\vartheta\varrho)+\chi'^2(1+\varepsilon\varrho)]=-\lg\frac{1}{\varrho}+\lg[\psi'^2(1+\vartheta\varrho)+\chi'^2(1+\varepsilon\varrho)]$$

überginge. Vereinigt man $-2\lg\frac{1}{\varrho}$ mit dem ersten Gliede von $\lg L_0$, so bleibt $-\lg\frac{1}{\varrho}$, welcher Ausdruck für unendlich kleines ϱ $-\infty$ wird, und nicht durch $\lg[\psi'^2(1+\vartheta\varrho)+\chi'^2(1+\varepsilon\varrho)]$ aufgehoben wird, denn dieser Ausdruck bleibt endlich oder wird $-\infty$, wenn $\psi'(1)=\chi'(1)=0$ wäre. Also wird L_m nicht 0, wenn m nicht Null ist, d. h.:

$$7)\qquad \Sigma\omega^{\gamma}\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\omega^{2\gamma}\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\tfrac{1}{3}\Sigma\omega^{3\gamma}\frac{1}{q^{3+3\varrho}}+\ldots=\lg L$$

nähert sich immer, wenn nicht $\omega=1$ ist, einer Grenze, wird für $\omega=1$ aber unendlich.

B) Anwendung auf die arithmetischen Reihen.

Setzen wir jetzt in Gleichung 7) nach einander $\omega=1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2\ \ldots\ \varepsilon^{p-2}$ und addiren die so entstehenden Gleichungen bezüglich mit $1,\ \varepsilon^{-\gamma_m},\ \varepsilon^{-2\gamma_m}\ \ldots\ \varepsilon^{-(p-2)\gamma_m}$, addiren dann die so gebildeten Gleichungen, so kommt links:

$$1+\varepsilon^{\gamma-\gamma_m}+\varepsilon^{2(\gamma-\gamma_m)}+\ldots+\varepsilon^{(p-2)(\gamma-\gamma_m)}\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\Big(1+\varepsilon^{2\gamma-\gamma_m}$$
$$+\varepsilon^{2(2\gamma-\gamma_m)}+\ldots+\varepsilon^{(p-2)(2\gamma-\gamma_m)}\Big)\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\tfrac{1}{3}\Sigma\Big(1+\varepsilon^{3\gamma-\gamma_m}$$
$$+\varepsilon^{2(3\gamma-\gamma_m)}+\ldots+\varepsilon^{(p-2)(3\gamma-\gamma_m)}\Big)\frac{1}{q^{3+3\varrho}}+\ldots.$$

Die Summenzeichen gehen hier auf die Werthe von q, und es ist $\gamma = \operatorname{Ind} q$, $\gamma_m = \operatorname{Ind} m$. Nun ist immer:

$$1 + \varepsilon^{h\gamma - \gamma_m} + \varepsilon^{2(h\gamma - \gamma_m)} + \ldots + \varepsilon^{(p-2) h\gamma - \gamma_m} = 0,$$

ausgenommen den Fall, wenn:

$$h\gamma - \gamma_m \equiv 0 \bmod p-1,$$

d. h. wenn:

$$q^h = m \bmod p$$

ist, und hieraus folgt dann:

$$\Sigma \frac{1}{q^{1+\varrho}} + \tfrac{1}{2} \Sigma \frac{1}{q^{2+2\varrho}} + \ldots = \frac{1}{p-1} (\lg L_0 + \varepsilon^{-\gamma_m} \lg L_1 + \ldots + \varepsilon^{-(p-2)\gamma_m} \lg L_{p-2}).$$

Hier bezieht sich bezüglich die erste, zweite, dritte ... Summe links auf alle Primzahlen q, deren erste, zweite, dritte ... Potenzen in der Form $\mu p + m$ enthalten sind. Ist nun ϱ verschwindend klein, so wächst $\lg L_0$ ins Unendliche, während $\frac{1}{2} \Sigma \frac{1}{q^2} + \frac{1}{3} \Sigma \frac{1}{q^3} + \ldots$ noch endlich bleibt. Es muss also $\Sigma \frac{1}{q^{1+\varrho}}$ unendlich sein, d. h. es gibt unendlich viele Primzahlen von der Form $\mu p + m$. Es ist also unser Satz für den speciellen Fall bewiesen, dass p eine Primzahl und m kleiner als p ist.

Um diesen Beweis auf beliebige Differenzen m auszudehnen, nimmt man folgende Sätze der Zahlentheorie (Gauss, Sect. III) zu Hülfe:

I) Die Existenz primitiver Wurzeln findet auch für Potenzen ungrader Primzahlen p^π statt. Ist c eine primitive Wurzel von p^π, so sind die Reste der Potenzen c^0, c^1, c^2 ... $c^{(p-1)p^{\pi-1}-1}$ von einander verschieden, und fallen mit der Reihe der Zahlen zusammen, die kleiner als p^π und relativ einfach zu p^π sind. Hat man also irgend eine nicht durch p theilbare Zahl n, so ist der Exponent $\gamma_n < (p-1)p^{\pi-1}$, welcher der Congruenz $c^{\gamma_n} \equiv n \pmod{p^\pi}$ genügt, völlig bestimmt. Man kann also auch hier setzen: $\gamma_n = \operatorname{Ind} n$. Von diesen Indices gelten wieder die Sätze, dass:

$$\operatorname{Ind} ab \equiv \operatorname{Ind} a + \operatorname{Ind} b \bmod (p-1)p^{\pi-1},$$

und γ_n ist grade oder ungrade, je nachdem:

$$\left(\frac{n}{p}\right) = +1 \text{ oder } = -1,$$

unter $\left(\frac{n}{p}\right)$ das bekannte Symbol (vergleiche den Artikel: Quadratischer Rest) verstanden.

II) 1. Lassen wir die Potenz 2^1 ausser Acht, so hat man für den mod 2^2 die primitive Wurzel -1. Bezeichnet man den Index für eine ungrade Zahl n mit α_n, so dass $(-1)^{\alpha_n} \equiv n \bmod 4$, so ist $\alpha_n = 0$ oder 1, je nachdem n von der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$.

2. Ist der Modul 2^λ, $\lambda \gtreqless 3$, so gibt es keine primitive Wurzel. Nimmt man aber 5 oder $8\mu+5$ zur Basis, so sind die Reste von 5^0, 5^1 ... $5^{2^{\lambda-1}-1}$ verschieden, und alle Zahlen kleiner als 2^λ von der Form $4\mu+1$. Ist also n von

der Form $4\mu+1$, so lässt sich $5^{\beta_n} \equiv n \bmod 2^\lambda$ durch ein und nur ein β_n lösen, wenn es kleiner als $2^{\lambda-2}$ sein soll. Hat n die Form $4\mu+3$, so ist die Congruenz unmöglich. Da aber dann $-n$ die Form $4\mu+1$ hat, so sei der Index einer ungraden Zahl n der, welcher kleiner als $2^{\lambda-2}$ ist, und die Congruenz $5 \equiv \pm n \bmod 2^\lambda$ erfüllt. Also durch den Modul β_n ist der Rest n nicht völlig bestimmt, da ihm zwei Reste entsprechen, die sich zu 2^λ ergänzen. Für diese Indices gelten die Sätze, dass:

$$\text{Ind}\, ab \equiv \text{Ind}\, a + \text{Ind}\, b \bmod 2^{\lambda-2},$$

β_n grade oder ungrade, je nachdem n die Form $8\mu \pm 1$ oder $8\mu \pm 5$ hat. Um die Zweideutigkeit zu heben, muss man ausser $\text{Ind}\,\beta_n$, der sich auf $\bmod 2^\lambda$ Basis 5 bezieht, noch $\text{Ind}\,\alpha_n$, der sich auf mod 4 Basis -1 bezieht, betrachten, und je nachdem $\alpha_n = 0$ oder 1, ist das obere oder untere Zeichen $5^{\beta_n} \equiv \pm m \bmod 2^\lambda$ zu nehmen. Man kann auch schreiben $(-1)^{\alpha_n} 5^{\beta_n} \equiv n \bmod 2^\lambda$.

III) Sei $k = 2^\lambda p^\pi p'^{\pi'}$, $\lambda \gtreqless 3$, p, p' von einander verschiedene ungrade Primzahlen. Ist n durch keine der Zahlen 2, p, p' . . . theilbar, und kennt man die den Moduln 4, 2^λ, p^π, $p'^{\pi'}$ und ihren primitiven Wurzeln -1, 5, c, c' . . . entsprechenden Indices α_n, β_n, γ_n, γ'_n . . ., so hat man die Congruenzen:

$$(-1)^{\alpha_n} \equiv n \bmod 4, \quad 5^{\beta_n} \equiv \pm n \bmod 2^\lambda, \quad c^{\gamma_n} \equiv n \bmod p^\pi, \quad c'^{\gamma'_n} \equiv n \bmod p'^{\pi'},$$

wodurch der Rest von n nach k vollständig bestimmt ist. α, β, γ, γ' heissen System der Indices für n. Da α, β, γ, γ' . . . resp. 2, $2^{\lambda-2}$, $(p-1)p^{\pi-1}$ $(p'-1)p'^{\pi'-1}$ . . . verschiedene Werthe erhalten können, so ist:

$$8) \quad 2 \cdot 2^{\lambda-2}(p-1)p^{\pi-1}(p'-1)p'^{\pi'-1} = k\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p'}\right) \ldots = K.$$

Wir beweisen jetzt unsern Satz in der Voraussetzung, dass die Differenz k durch 8 theilbar sei, was natürlich der Allgemeinheit nicht schadet. Denn in einer beliebigen Reihe können ja immer die je achten Glieder betrachtet werden, unter welchen sich dann unendlich viel Primzahlen befinden müssen.

Seien ϑ, φ, ω, ω' . . . irgend welche Wurzeln der Gleichungen:

$$9) \qquad \vartheta^2-1=0, \quad \varphi^{2^{\lambda-2}}-1=0, \quad \omega^{(p-1)p^{\pi-1}}-1=0,$$
$$\omega'^{(p'-1)p'^{\pi'-1}}-1=0 \ldots,$$

q eine beliebige, von 2, p, p' . . . verschiedene Primzahl. Es ist nun:

$$\frac{1}{1-\vartheta^\alpha \varphi^\beta \omega^\gamma \ldots \frac{1}{q^s}} = 1 + \vartheta^\alpha \varphi^\beta \omega^\gamma \ldots \frac{1}{q^s} + \vartheta^{2\alpha} \varphi^{2\beta} \omega^{2\gamma} \ldots \frac{1}{q^{2s}} + \ldots,$$

wo $s>1$, und das System der Indices α, β, γ . . . sich auf q bezieht. Man multiplicirt alle Gleichungen dieser Form für alle Primzahlen q, so kommt:

$$10) \qquad \Pi \frac{1}{1-\vartheta^\alpha q^\beta \omega^\gamma \ldots \frac{1}{q^s}} = \Sigma\, \vartheta^\alpha \varphi^\beta \omega^\gamma \ldots \frac{1}{n^s} = L,$$

wo sich das Multiplicationszeichen auf q, das Summenzeichen auf alle aus allen

q zusammengesetzte Zahlen bezieht. Das System der Indices entspricht links q, rechts n. Die Gleichung 10), in der die verschiedenen Wurzeln ϑ, φ, ω . . . combinirt werden können, enthält K besondere Gleichungen. Um das L, was jeder Verbindung entspricht, zu bezeichnen, denke man sich die Wurzeln jeder der Gleichungen 9) als Potenzen von einer dargestellt. Seien $\Theta=-1$, Φ, Ω, Ω' u. s. w. geeignete Wurzeln, so setzt man:

$$\vartheta=\Theta^a,\quad \varphi=\Phi^b,\quad \omega=\Omega^c,\quad \omega'=\Omega'^{c'}\ \ldots,$$

wo:

$$a<2,\quad b<2^{\lambda-2},\quad c<(p-1)p^{n-1}\ \ldots,$$

und dieser Darstellung entsprechen:

$$11)\qquad L,\ a,\ b,\ c,\ c'\ \ldots$$

Die Reihen L lassen sich in drei Klassen theilen:

Erste Klasse: $L_{0,0,0}$, d. h. wo $\vartheta=1$, $\varphi=1$, $\omega=1$ . . .,

Zweite Klasse: enthält alle L, wo nur reelle Wurzeln der Gleichung vorkommen: $\vartheta=\pm1$, $\varphi=\pm1$, $\omega=\pm1$ . . .,

Dritte Klasse: wo wenigstens eine Wurzel imaginär ist.

Die Reihen dieser Klassen sind einander paarweise zugeordnet. Werde nun in $s=1+\varrho$ ϱ unendlich klein. Betrachten wir die erste Klasse, so ist diese die Summe von K Partialreihen:

$$\frac{1}{m^{1+\varrho}}+\frac{1}{(k+m)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2k+m)^{1+\varrho}}+\ldots,$$

$m<k$ und relativ einfach zu k, und wie in A) gezeigt ist, die Summe der Reihen dieser Klasse:

$$12)\qquad \frac{K}{k}\,\frac{1}{\varrho}+q\varrho.$$

Für die Reihen zweiter und dritter Klasse findet man, wenn n wachsend fortschreitet, und $s>0$:

$$13)\quad \Sigma\vartheta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\ \ldots\ \frac{1}{n^s}=\frac{1}{\Gamma s}\int_0^1\frac{\Sigma\vartheta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\ldots\chi^{n-1}}{1-x^k}\,\lg^{t-s}\left(\frac{1}{x}\right)dx,$$

wo sich Σ rechts auf alle $n<k$ und zu k relativ einfach erstreckt, und α, β, γ, γ' . . . das System der Indices für n bedeutet. Um zu beweisen, dass die zweite Seite endlich, bemerke man, dass $\Sigma\vartheta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\ldots\chi^{n-1}$ den Factor $1-\chi$ hat, was erhellt, wenn man $x=1$ setzt, was:

$$(1+\vartheta)(1+\varphi^{2^{\lambda-2}-1})(1+\omega+\ \ldots\ +\omega^{(p-1)p^{n-1}-1})\ \ldots$$

gibt, von dessen Factoren wenigstens einer verschwindet, da die Wurzelcombinationen $\vartheta=1$, $\varphi=1$, $\omega=1$ . . ., als der ersten Klasse entsprechend, ausgeschlossen ist. Die zweite Seite der Gleichung 13), so wie ihr Differenzialquotient nach s sind stetige Functionen von s, also jede Reihe zweiter und dritter Klasse nähert sich der endlichen Grenze:

$$14)\qquad \Sigma\vartheta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\omega'^{\gamma'}\ \ldots\ \frac{1}{n}=\int_0^1\frac{\Sigma\vartheta^\alpha\varphi^\beta\omega^\gamma\ldots\chi^{n-1}}{1-x^k}\,dx.$$

Noch ist zu beweisen, dass diese Grenze von 0 verschieden ist.

Nehmen wir an, diese Eigenschaft sei für L der zweiten Klasse bewiesen, und beweisen es für die dritte. Nehme man von Gleichung 10) auf beiden Seiten die Logarithmen, so erhält man durch Entwickelung:

$$\Sigma\,\vartheta^{\alpha}\varphi^{\beta}\omega^{\gamma}\ldots\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\,\vartheta^{2\alpha}\varphi^{2\beta}\omega^{2\gamma}\ldots\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\ldots=\lg L,$$

wo die Indices zu q gehören. Stellt man die Wurzeln ϑ, φ, $\omega\ldots$ nach Formel 10) dar, so ist das allgemeine Glied der ersten Seite:

$$\frac{1}{h}\Sigma\,\Theta^{h\alpha a}\Phi^{h\beta b}\Omega^{h\gamma c}\ldots\frac{1}{q^{h+h\varrho}},$$

und die zweite Seite:

$$\lg L_{a,\,b,\,c\,\ldots}$$

Sei nun m irgend eine ganze Zahl $<k$, relativ einfach zu k. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit:

$$\Theta^{-\alpha_m a}\Phi^{-\beta_m b}\Omega^{-\gamma_m c}\Omega'^{-\gamma'_m c'}\ldots,$$

und schreibt auf der ersten Seite nur das allgemeine Glied:

$$\ldots+\frac{1}{h}\Sigma\,\Theta^{(h\alpha-\alpha_m)a}\Phi^{(h\beta-\beta_m)b}\Omega^{(h\gamma-\gamma_m)c}\ldots\frac{1}{q^{h+h\varrho}}+\ldots$$

$$=\Theta^{-\alpha_m a}\Phi^{-\beta_m b}\Omega^{-\gamma_m c}\ldots\lg L_{a,\,b,\,c\,\ldots}$$

Summirt man nun von $\left.\begin{matrix}a\\ b\\ c\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{matrix}\right\}=0$ bis $\begin{matrix}a=1\\ b=2^{\lambda-2}-1\\ c=(p-1)p^{\pi-1}-1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{matrix}$, so kommt links das allgemeine Glied: $\frac{1}{h}\Sigma\,W\frac{1}{q^{h+h\varrho}}$, wo Σ sich auf q bezieht und W das Product der nach a, b, $c\ldots$ zwischen den angegebenen Grenzen zu nehmenden Summen $\Sigma\,\Theta^{(h\alpha-\alpha_m)}$, $\Sigma\,\Phi^{(h\beta-\beta_m)}$ bedeutet.

Wir haben oben gezeigt, dass die erste Summe 2 oder 0 ist, je nachdem die Cougruenz $h\alpha-\alpha_m\equiv$ mod 2, oder was dasselbe ist $q^h\equiv m$ mod 4 stattfindet oder nicht, dass die zweite $2^{\lambda-2}$ oder 0 ist, je nachdem $q^h\equiv\pm m$ mod 2^{λ} stattfindet oder nicht, dass die dritte $(p-1)p^{\pi-1}$ oder 0 ist, je nachdem $q^h\equiv m$ mod p^{π} stattfindet oder nicht u. s. w. W verschwindet also, wenn nicht $q^h\equiv m$ mod k, in welchem Falle $W=K$ wird, also:

$$15)\quad \Sigma\frac{1}{q^{1+\varrho}}+\tfrac{1}{2}\Sigma\frac{1}{q^{2+2\varrho}}+\ldots=\frac{1}{K}\Sigma\,\Theta^{-\alpha_m a}\Phi^{-\beta_m b}\Omega^{-\gamma_m c}\ldots$$
$$\ldots\lg L_{a,\,b,\,c\,\ldots},$$

wo sich Σ links auf alle q bezieht, deren 1, 2, 3 . . . Potenzen die Form $\mu k+m$ enthalten, Σ rechts erstreckt sich über a, b, $c\ldots$ in den gegebenen Grenzen. Sei $m=1$, so wird $\alpha_m=\beta_m=\gamma_m\ldots=0$, und die rechte Seite $\frac{1}{k}\Sigma\lg L_{a,\,b,\,c\,\ldots}$ Unter den Gliedern dieser Summe wird das, welches $L_{0,\,0\,\ldots}$ entspricht, nach 12) $\lg\frac{1}{\varrho}$ enthalten, die Glieder zweiter Klasse geben nach der Annahme endliche Resultate; wäre nun der Grenzwerth dritter Klasse gleich Null, so würde wie in 13) für den Logarithmus dieses L mit dem ihm

zugeordneten das Glied $-2\lg\frac{1}{\varrho}$ sich ergeben, was $-\infty$ gäbe. Also hat kein L dritter Klasse Null zum Grenzwerth, also bleibt $\lg L_{a,\,b,\,c\,\ldots}$ endlich, ausser wenn $a=b=c=\ldots=0$, wo der Logarithmus unendlich wird. Dies auf 15) angewandt, zeigt, dass die zweite Seite unendlich wird, also auch die erste, also enthält $\Sigma\frac{1}{q^{1+\varrho}}$ unendlich viel Glieder, d. h. die Anzahl der Primzahlen von der Form $k\mu+m$ ist unendlich gross.

Aus 14) folgt noch:

$$16)\qquad \Sigma(\pm 1)^{\alpha}(\pm 1)^{\beta}(\pm 1)^{\gamma}\ldots=\frac{1}{n},$$

wo $\alpha\ldots$ (auf n bezüglich) nicht Null wird. Dies ergibt sich nämlich aus dem Ausdruck für die Anzahl quadratischer Formen für eine gegebene Determinante.

Zahlensystem (Arithmetik).

Die wohlgeordnete Zusammenstellung aller Zahlen, worin jeder ihr Platz angewiesen ist, so dass, obgleich deren unendlich viel sind, sie aufgefunden und dargestellt werden kann. Unser Zahlensystem beruht darauf, dass jede ganze Zahl M als Potenzensumme einer beliebigen α dargestellt werden, also:

$$M=a\alpha^{n}+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\alpha+a_n,$$

wo $a, a_1, a_2 \ldots a_n$ alle kleiner als α sind. Für jede Zahl kleiner als α muss es ein besonderes Zeichen (Ziffer, Zahlzeichen) geben. Führt man noch ein Zeichen 0, welches anzeigt, dass ein Coefficient a_s nicht vorhanden ist, ein, so können die Grössen $\alpha^{n}, \alpha^{n-1}\ldots$ ganz wegbleiben, da sie schon durch die Stellung der Coefficienten angezeigt sind, so dass $a\,a_1\,a_2\ldots a_n$ das abgekürzte Zeichen für das obige Polynom ist.

In unserm Zahlensystem ist α gleich zehn, und es sind daher ausser 0 noch 9 Ziffern nöthig.

Die Brüche fügen sich durch die Betrachtung ein, dass Zähler und Nenner derselben ganze Zahlen sind. Jedoch gibt die Theorie der Decimalbrüche, oder die Anordnung der Zahlen, welche kleiner als die Einheit sind, nach negativen Potenzen von α einen noch genaueren Zusammenhang zwischen Brüchen und ganzen Zahlen. Auf dem Zahlensystem beruht unser numerisches Rechnen (vergleiche hierüber den Artikel: Quantität).

Unser Zahlensystem ist den Indiern entnommen, soweit es die schriftliche Anordnung der Zahlen anbetrifft. Jedoch die Aussprache der Zahlen, welche sich ebenfalls dem zehntheiligen System anschliesst, ist allen einigermaassen gebildeten Völkern gemein. (Einige Völker auf der untersten Stufe der Bildung sollen nach anderen Zahlen ordnen.)

Der Umstand, dass man zuerst die zehn Finger zum Zählen benutzt, haben ohne Zweifel auf die Zahl zehn geführt. Dieses System vereinigt auf glückliche Weise die beiden Vortheile, dass man nicht zu viel Ziffern braucht, deren grössere Anzahl das Rechnen erschwert, und auch nicht bei mässigen Zahlen zu viel Stellen bedarf. (Bei einem dreitheiligen System, welches nur die Ziffern 0, 1, 2 hat, würde z. B. die Zahl 112 schon 5 Ziffern haben.)

Dennoch lässt sich die Frage, ob dies System das allerzweckmässigste mögliche sei, nicht unbedingt bejahen. Die Division wird erleichtert, namentlich auch bei Einführung der negativen Potenzen, wenn die Grundzahl α viel Theiler hat. 10 hat jedoch nur 2 und 5 zu Theilern, während die ebenfalls nicht zu grosse Zahl 12 die Theiler 2, 3, 4, 6 hat. Wollte man dessenungeachtet einwenden, dass das Multipliciren und Dividiren zwölftheiliger Systeme zu schwierig sei, so widerlegt sich dies dadurch, dass man ja z. B bei der Eintheilung des Fusses in 12 Zoll sich eines secundären zwölftheiligen Systems wegen des überwiegenden Vortheils der häufigeren Theilung bedient. Indess ist dieser Vortheil immerhin kein sehr bedeutender, und kann namentlich nicht veranlassen, etwa das seit Jahrhunderten und theilweise seit Jahrtausenden eingebürgerte zehntheilige System aufzugeben.

Zahlzeichen, Ziffer (Arithmetik).

Siehe Zahlensystem.

Zahn (Maschinenlehre).

Siehe Rad.

Zahnrad (Maschinenlehre).

Siehe Rad.

Zahnreibung (Maschinenlehre).

Siehe Rad.

Zahnstange (Maschinenlehre).

Siehe Rad.

Zapfenreibung (Mechanik).

Siehe Reibung.

Zauberquadrat (Arithmetik).

Siehe Quadrat — magisches.

Zecchine (Münzkunde).

Italienisches Goldstück, gleich 1 Dukaten. Auch in der Türkei und Ägypten kommt eine Münze dieses Namens vor.

Zehneck (Geometrie).

Ueber die Construction und Berechnung desselben vergleiche den Artikel: Raumlehre.

Zeichenapparat — dynamometrischer (Maschinenlehre).

Ein Federdynamometer, in welchem das Maass der Kraft vermittelst eines Stiftes auf einen unter demselben fortgezogenen Papierstreifen aufgezeichnet wird (vergleiche den Artikel: Dynamometer).

Zeichenregel des Descartes (Algebra).

Diese Regel lehrt eine obere Grenze für die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer beliebigen algebraischen Gleichung finden, und die Anzahl der positiven und negativen Wurzeln überhaupt bestimmen, wenn alle Wurzeln reell sind. Sie lautet:

„Wenn man bei irgend einer algebraischen, nach Potenzen von x geordneten Gleichung die Vorzeichen aller Coefficienten nach ihrer Reihenfolge, und diejenigen Coefficienten, welche etwa gleich Null sind, ganz beliebig als positiv oder negativ betrachtet, so kann die Anzahl der positiven Wurzel nicht grösser als die der Zeichenfolgen sein.

Da nun die Summe der Zeichenfolgen und Zeichenwechsel gleich dem Grade der Gleichung, also gleich der Anzahl der Wurzeln ist, so drückt, wenn alle Wurzeln reell sind, die Anzahl der Zeichenwechsel die der positiven, die Anzahl der Zeichenfolgen die der negativen Wurzeln genau aus.“

Dieser Satz gilt zunächst, wie leicht zu sehen, für die Gleichung ersten Grades:

$$ax+b=0.$$

Haben a und b gleiche Zeichen, so findet in der That eine Zeichenfolge und auch eine negative Wurzel, haben a und b ungleiche Zeichen, ein Zeichenwechsel und eine positive Wurzel statt.

Wir beweisen nun, dass wenn unser Satz für jede Gleichung $n-1$ten Grades gilt, er auch für jede $n$ten Grades statthat, womit dann derselbe ganz allgemein erwiesen ist.

Sei die gegebene Gleichung:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n=0.$$

In dem Differenzialquotienten:

$$f'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1},$$

haben nun die betreffenden Coefficienten dieselben Vorzeichen wie in $f(x)$ und unserer Annahme zufolge findet für die Gleichung:

$$f'(x)=0$$

die Zeichenregel des Descartes statt.

Da nun aber diese letzte Gleichung die Werthe von x anzeigt, in welchen der Ausdruck $f(x)$ ein Maximum oder Minimum haben kann (ohne dass dies nothwendig ist), so lehrt diese Regel:

Die Anzahl der Zeichenwechsel der n ersten Coefficienten von $f(x)$ zeigt die höchste Anzahl der positiven, die Anzahl der Zeichenfolgen die der negativen Werthe von x an, in welchen $f(x)$ einen Grenzwerth (Maximum oder Minimum) haben kann.

Es liegt nun aber in der Natur der Sache, dass immer einem Maximum ein Minimum folgen muss und umgekehrt, und dass zwischen je zweien dieser Grenzwerthe höchstens eine, jenseits der beiden äussersten Grenzwerthe auch nur je eine Wurzel liegen kann, und mehr reelle Wurzeln kann es nicht geben. Da nun die zwischen zwei positiven Grenzwerthen liegende Wurzel auch positiv, die zwischen zwei negativen negativ ist, so kann nur das Zeichen derjenigen Wurzel fraglich sein, welches zwischen dem kleinsten positiven und negativen Grenzwerth möglicherweise liegt. Die Anzahl der übrigen ist $n-1$, und von diesen wird also der obere Grenzwerth der Anzahl der positiven, bezüglich negativen durch die Zeichenwechsel in den Coefficienten von $f(x)$ mit Ausnahme des letzten angezeigt. Was nun die noch nicht bestimmte Wurzel anbetrifft, so kommt es hierbei auf das Zeichen von a_{n-1} und das von a_n an. Für $x=0$ ist:

$$f(x)=a_n, \quad f'(x)=a_{n-1}.$$

Je nachdem die letztere Grösse positiv oder negativ ist, ist $f(x)$ für $x=0$ im Steigen oder Fallen. Ist im ersteren Falle a_n positiv, so ist für $x=0$ der Wurzelwerth von $f(x)$ bereits überschritten, also die fragliche Wurzel negativ, ist dagegen a_n negativ, so ist der Wurzelwerth noch nicht erreicht, also die Wurzel positiv. Ist dagegen a_{n-1} negativ, so ist für positives a_n der Nullwerth von $f(x)$ noch nicht erreicht, da die Function fällt, und für negatives a_n bereits überschritten, also im ersteren Falle die Wurzel positiv, im letzteren negativ. Also für:

a_{n-1}	a_n
+	+
+	−
−	+
−	−

so findet im ersten und letzten Falle eine negative, im zweiten und dritten eine positive Wurzel statt. Dem entsprechend aber ist auch eine Zeichenfolge im ersten und vierten, ein Zeichenwechsel im zweiten und dritten Falle hinzugekommen, womit unser Satz erwiesen ist Selbstverständlich ist, wenn von einer positiven oder negativen Wurzel geredet ist, dies immer so zu verstehen, dass sie jedenfalls vorhanden sei, wie dies oben schon gesagt worden ist.

Wir haben noch den Fall nicht berücksichtigt, wo $f(x)$ und $f'(x)$ eine gemeinschaftliche Wurzel haben, dann tritt der Grenzwerth für die Wurzel selbst ein, und diese ist eine mehrfache, hat dann aber selbstverständlich mit dem Grenzwerthe dasselbe Vorzeichen, womit dieser Fall erschöpft ist.

Verschwinden endlich einzelne Coefficienten, so kann man dieselben durch abnehmende, nach Belieben positive oder negative Zahlen ersetzen Da sich die Wurzeln der gegebenen Gleichung nun auf eine beliebige Differenz der so modificirten nähern, so ist der obige Satz, der für die letztere richtig ist, auch noch für die erstere richtig. Ist eine Wurzel selbst gleich Null, so kann man diese nach Belieben als positiv oder negativ betrachten. Da in diesem Falle $a_n=0$ ist, so entspricht a_n negativ angenommen in der That dem einen, a_n positiv angenommen dem andern der beiden Fälle.

Beispiele.

Die Gleichung:

$$x^4-4x^3-7x^2+22x+24=0$$

hat 4 reelle Wurzeln;

$$x=-1, \quad x=-2, \quad x=3, \quad x=4.$$

Die Zeichenreihe ist:

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$$

Das sind zwei Zeichenwechsel und zwei Folgen, also zwei Wurzeln sind positiv und zwei negativ

Die Gleichung:

$$x^8-1=0$$

hat die Wurzeln:

$$x=1, \quad x=-1, \quad i, \quad -i, \quad \pm\sqrt{i}, \quad \pm\sqrt{-i},$$

Die Zeichenreihe ist:

$$+ \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -$$

Wie man die Coefficienten, die gleich Null sind, auch positiv oder negativ annimmt, immer wird zwischen dem ersten und letzten ein Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge eintreten. Die geringste Anzahl der Zeichenwechsel tritt nämlich ein, wenn man allen Nullen dasselbe Zeichen gibt, und dann ist ein Zeichenwechsel noch vorhanden. Die geringste Anzahl der Zeichenfolgen aber ist die, wo den Nullen immer abwechselndes Zeichen gegeben wird, und da die Anzahl derselben ungrade ist, so muss eins der Zeichen dann noch mit dem ersten oder letzten übereinstimmen.

Zeigerwage (Statik).

Siehe Wage.

Zeit (Chronologie).

Die Zeit tritt uns ins Bewusstsein durch die verschiedenen Zustände, welche dasselbe Ding annehmen kann. Diese Zustände lassen sich immer auf Raumänderungen zurückführen. Obgleich nun ein Gegenstand nach verschiedenen Raumänderungen wieder auf seinen früheren Ort zurückkommen kann, so schreiben wir ihm doch einen Unterschied von seinem früheren Zustande zu, und dieser Unterschied ist eben die Zeitverschiedenheit. Die Zeit ist also zu definiren als dasjenige, was zwei Zuständen desselben Dinges nicht gemein sein kann.

Da die Raumänderung eine continuirliche ist, so müssen wir auch der Zeit

Continuität zuschreiben. Die Zeit ist also eine Grösse, d h. theilbar und kann gemessen werden. Das wirkliche Messen der Zeit gelingt natürlich nur durch Vermittelung des Raumes und auf einem Umwege.

Zunächst kommt es darauf an, gleiche Zeiten zu bestimmen. Der Raumänderung oder Bewegung schreiben wir nämlich immer eine Ursache zu (Kraft) und müssen annehmen, dass wenn dieselbe Ursache zu verschiedenen Zeiten auf dasselbe Ding wirkt, dies auch gleiche Zeiten gebraucht, um gleiche Räume zurückzulegen. Also wenn z. B. zu verschiedenen Zeiten ein Körper im luftleeren Raume zu fallen anfängt, so können wir sagen, es seien gleiche Zeiten verflossen, wenn er jedesmal 1 Fuss zurückgelegt hat.

Die Theilung der Zeit beruht nun darauf, dass ein Körper fortwährend derselben bewegenden Ursache ausgesetzt sein kann. Ein Gegenstand, der einmal gestossen ist, unterliegt, wenn wir die Nebenhindernisse vernachlässigen, immer derselben bewegenden Ursache, er bewegt sich also gleichmässig, d. h. es sind also dann gleiche Zeiten verflossen, wenn er gleiche Räume zurücklegt, und wenn wir den durchlaufenen Raum theilen, ist also die Zeit zugleich mit getheilt. — Theoretische Betrachtungen und Vergleiche mit anderen Bewegungen haben uns darauf geführt, dass die Bewegung der Erde um ihre Axe, und die mittlere Bewegung derselben um die Sonne gleichmässig seien; dies führt uns auf das Maass der Zeit. Als Maass nimmt man an: das mittlere Jahr für grössere, und den Sternentag, auch den durch eine Abstraction sich ergebenden mittleren Sonnentag für kleinere Zeiträume. Jedoch kommt nur der Tag (Sternen- oder mittlere Sonnentag) als Einheit der Zeit in Betracht, da das Jahr durch Tage ausgedrückt werden muss. Um so wichtiger ist es daher, dass in neuester Zeit Delaunay aus theoretischen Gründen (der Reibung an der Erdoberfläche, welche Ebbe und Fluth bedingen) und Erfahrungen (die nicht völlige Uebereinstimmung der Beschleunigung der Revolutionsperiode des Mondes mit der Theorie) auf eine Beschleunigung der Axendrehung der Erde schliesst. Indess mag diese noch streitige Frage dieser jedenfalls sehr geringen Aenderung des Tages hier noch unerörtert bleiben.

Die Betrachtung, dass unter gewissen Umständen ein Pendel und eine Stahlfeder isochrone (gleichzeitige) Schwingungen machen, führt uns zum Messen der Zeit durch Uhren, welche von dergleichen Apparaten regulirt sind.

So einfach das Prinzip der Zeittheilung ist, welcher überdies der glückliche, wenigstens bis vor Kurzem als feststehend angenommene Umstand des unveränderlichen Sternentages und des mittleren siderischen Jahres — doch was das letztere anbetrifft, abgesehen von periodischen Störungen — zu statten kommt, so schwierig hat sich doch in der That die Sache gestaltet, und zwar einestheils deshalb, weil die wirkliche Zeiteinheit auf die periodischen, durch das Wechselverhältniss zwischen Sonne und Erde bedingten Aenderungen bezogen werden muss, andererseits aber deshalb, weil beide Einheiten Tag und Jahr in keinem rationalen Verhältnisse stehen. Was den ersteren Umstand anbetrifft, so muss der Tag sich nach dem höchsten Stande der Sonne Mittags regeln, nicht aber dem Stande der Sterne nach, es ist also der Sonnentag an die Stelle des Sternentages zu setzen. Der Sonnentag aber steht allerdings in der Beziehung zu dem letzteren, dass das tropische Jahr einen Sonnentag weniger als Sternentage enthält, da die Sonne im Laufe des tropischen Jahres 360 Grad zurücklegt, im Uebrigen aber sind die Sonnentage ungleich. Wenn man also trotzdem, wie es früher geschehen, den wahren Sonnentag als Maass der bürgerlichen Zeit annimmt, so hat man eine veränderliche Zeiteinheit, also eine Differenz zwischen der gleichmässigen Uhrzeit und der ungleichmässigen — etwa von einer Sonnenuhr angegebenen Sonnenzeit.

Ausgeglichen wird diese Differenz durch die mittlere Sonnenzeit, d. h. die Theilung des tropischen Jahres in so viel mittlere gleiche Tage, als es wahre Sonnentage enthält. Es entsteht hierbei allerdings eine Differenz zwischen den bürgerlichen und den wahren, durch den Stand der Sonne bedingten Tageszeiten, jedoch sind diese nicht so gross, um Störungen in den täglichen Geschäften hervorzubringen Wohl zu merken aber ist, dass absolute Gleichmässigkeit der Zeiteinheit selbst hierdurch nicht erreicht ist, da das tropische Jahr vermöge der Präcession selbst einer säcularen Aenderung von freilich geringer Grösse unterliegt.

Was den zweiten Umstand, das irrationale Verhältniss zwischen Tag und Jahr, anbetrifft, so haben verschiedene Völker sich die Sache noch mehr erschwert, indem sie selbst den Mond her-

beizogen, und dem bürgerlichen Jahre eine volle Anzahl Mondumläufe und Sonnentage gaben. Bei dem Sonnenjahre ist jedoch der Mond ausser Betracht geblieben, und das bürgerliche Jahr mit einer vollen Anzahl Tage derart abgeschlossen, dass durch einen Tag, welcher von Zeit zu Zeit eingeschaltet wird, die überschiessenden Stunden und Minuten wieder ausgeglichen werden. In welcher Weise dies beim Gregorianischen Jahre geschieht, darüber vergleiche den Artikel: Kalender, auch: Zeitrechnung. Unser bürgerliches Jahr ist also eine ungleichmässige, jedoch nur periodisch und um einen Tag sich ändernde Einheit.

Zeitgleichung (Astronomie und Chronologie).

Die Differenz zwischen mittlerer und wahrer Sonnenzeit. Da die erstere durch eine Räderuhr, die letztere durch eine Sonnenuhr angegeben wird, so ist die Zeitgleichung auch diejenige Anzahl von Minuten und Secunden, welche zu der von der Sonnenuhr angegebenen Zeit hinzugezählt werden muss, wenn sie zum Reguliren einer Räderuhr dienen soll. Astronomisch ist die Zeitgleichung zu definiren als der Unterschied des Stundenwinkels der wirklichen Sonne von dem, welchen eine gedachte mittlere Sonne zurücklegen würde, welche wie die wahre in einem Jahre ihren Lauf vollendet, sich aber nicht ungleichmässig in der Ekliptik, sondern gleichmässig im Aequator bewegt.

Ueber die Entwickelung des Ausdruckes der Zeitgleichung siehe den Artikel: Astronomie — theorische. Die Formel für dieselbe ist folgende:

Ist x der Unterschied zwischen wahrer und mittlerer Sonnenzeit in Secunden, L die mittlere Länge der mittleren Sonne, so hat man:

$$x = 79'',4 \sin L + 435'',8 \cos L$$
$$-597'',1 \sin 2L + 1'',6 \cos 2L$$
$$-3'',4 \sin 3L - 18'',8 \cos 3L$$
$$+13'',2 \sin 4L + \ldots$$

Zeitrechnung (Chronologie).

Man kann hierunter die Beantwortung aller die Zeit betreffenden Fragen verstehen. Diese Wissenschaft zerfällt somit in drei Theile, einen mathematischen, welcher die Theorie der Sonnen- und Mondbewegung, auf welcher die Zeitmessung beruht, gibt, und in Bezug auf den wir auf den Artikel: Astronomie verweisen, einen zweiten, der die praktisch angewandte Art der Zeitmessung und Zeiteinheiten also die Jahresbestimmung und Theilung der verschiedenen Völker, die Anfangspunkte ihrer Aeren, auch die Bestimmung der Feste enthält, dieser Theil, auch Calendorographie genannt, soll hier namentlich, so weit er den bei uns gebräuchlichen Kalender betrifft, mitgetheilt werden. Endlich gibt es einen dritten Theil, welcher die Zeiten historischer Begebenheiten, ausgedrückt in die Daten eines gegebenen Kalenders, namentlich des jetzt allgemein gebräuchlichen finden lehrt. Die Hauptfrage desselben ist, eine in irgend einem Kalender gegebene Zeitbestimmung auf einen andern zurückzuführen. Da aber nicht die Zeit jeder Begebenheit vollständig gegeben, sondern zuweilen nur durch coincidirende Begebenheiten, namentlich auch Jahreszeiten, Mondphasen und Finsternisse angedeutet ist, so kommen hier mancherlei astronomische Betrachtungen und historische Combinationen in Betracht, die sich kaum einem bestimmten System unterordnen lassen. Wir beginnen hier mit dem jetzt gebräuchlichen Kalender.

1) Grundzüge des Julianischen und Gregorianischen Kalenders.

Das von Julius Cäsar 709 nach der Erbauung Roms eingeführte reine Sonnenjahr besteht aus Cyclen von je vier Jahren, deren drei je 365, das vierte (Schaltjahr) aber 366 Tage hat. In unserer von Christi Geburt an gezählten Aera ist das vierte n. Chr. das erste Schaltjahr, so dass also von den Jahren n. Chr. im Julianischen Kalender jedes, dess Zahl von der Form $4n$ ist, ein Schaltjahr sein wird. Was die Jahre vor Christus anbetrifft, denn um eine einheitliche Zeitrechnung zu haben, zählt man dieselben auch nach dem Julianischen Kalender und nimmt Christi Geburt als Anfangspunkt, so ist hier eine zweifache Art zu zählen. Die astronomische Zählung bezeichnet das Jahr der Geburt Christi mit 0, das vorhergehende mit -1 u. s. w., so dass bei dieser Zählung immer $4n$ ein Schaltjahr ist, n möge positiv oder negativ sein. Diese Art der Zählung, als die einzige consequente, legen wir den hier zu gebenden Betrachtungen zu Grunde. Indess bei der historischen Zählung wird das Jahr der Geburt Christi selbst mit -1, das vorhergehende mit -2 bezeichnet, so dass, wenn $-n$ die astronomische Jahreszahl, $-(n+1)$ die historische ist, und

die Schaltjahre von der Form $-(4n+1)$ sind.

Jede der beiden Zählungen lässt sich natürlich sogleich auf die andere reduciren.

Das Julianische Jahr hat im Durchschnitte $365\frac{1}{4} = 365{,}25$ Tage. Wir wollen dies mit dem wahren tropischen Jahr vergleichen. Obgleich dasselbe nicht ganz unveränderlich ist, so ändert es sich doch in einem Jahrhundert um keine volle Secunde (jetzt im Abnehmen). Man kann es daher als fest betrachten. Das tropische Jahr hat nun 365,242255 Tage = 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 51 Secunden. Das Julianische Jahr ist also gegen das wahre um 11 Minuten 9 Secunden zu gross, ein Fehler, der alle 129,2 Jahre schon einen Tag beträgt. Die Festtage, Mondwechselberechnung u. dergl. sind nach diesem Kalender auf dem Nicäischen Concil 328 n. Chr. geordnet worden. Von dieser Zeit an, bis zur Gregorischen Kalender-Reformation 1582 n. Chr. war also bereits ein Fehler von $\frac{1267}{129} = 10$ Tagen ungefähr entstanden, und diesen glich Gregor derart aus, dass er im gedachten Jahre auf den 4. October den 15. fallen liess: Um aber für die Folge einen ähnlichen Uebelstand zu vermeiden, sollte in allen vollen Jahrhunderten (deren Jahreszahlen mit zwei Nullen endigen) der Schalttag ausfallen, ausgenommen diejenigen, deren Zahl, abgesehen von den beiden Nullen, durch 4 theilbar ist. Es entstehen also Cyclen von 400 Jahren mit $3 \cdot 24 + 25 = 97$ Schalttagen, während ein solcher Cyclus im Julianischen Kalender 100 Schalttage hat. Es ist also das mittlere Gregor'sche Jahr um $\frac{3}{400} = 0.0075$ Tage kürzer als das Julianische, und hat somit 365,2425 Tage, ist also in der That noch um 0,000245 Tage zu lang. Dies beträgt einen Tag in $\frac{1}{0{,}000245} = 4082$ Jahren. Bleibt in den Jahren 4000, 8000 u. s. w. der Schalttag wieder weg, so ist auch dieser Fehler fast ganz ausgeglichen.

2) Mondphasen.

Unter Mondphase kann die Zeit vom letzten Neumonde bis zu einem gegebenen Zeitpunkte verstanden werden. Die Hauptphasen sind dann, ausser dem Neumond selbst, der mit 0 zu bezeichnen ist, der Vollmond, das erste und das letzte Viertel. Zur genauen Bestimmung der Phasen ist astronomische Rechnung nöthig, da der Umlauf des Mondes sehr ungleichmässig ist, und ausser den periodischen auch einer säcularen Aenderung unterliegt. Sehen wir von der letzteren als sehr unbedeutend hier ganz ab, so kann man einen mittleren Mondumlauf, den man sich gleichmässig denkt, einführen, um wenigstens die vollen Tage der verschiedenen Phasen zu ermitteln. Dies ist schon aus dem Grunde nöthig, weil von dem mittleren Mondumlauf unter andern die beweglichen Feste der christlichen Kirche abhängen. Bis zur Kalenderreformation war bei dieser Bestimmung das Julianische Jahr als richtig angenommen worden, und obgleich diese Annahme machte, dass die berechneten Mondphasen mit den wirklichen nicht übereinstimmten, ist diese Annahme zunächst hier beizubehalten, um das Julianische Osterfest zu ermitteln. Behufs der wirklichen annähernden Bestimmung der Mondphasen im Julianischen Kalender soll dann nachher die nöthige Correction gegeben werden.

Die mittlere Dauer des Mondumlaufes beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden, also etwa $29\frac{1}{2}$ Tag, und man kann daher, wenn es nur auf volle Tage ankommt, den Mondumläufen abwechselnd 29 und 30 Tage geben, wie es auch in denjenigen Kalendern, welche die Monate mit den Mondumläufen zusammenfallen lassen, geschieht. Ein Schalttag gleicht dann von Zeit zu Zeit die Differenz aus.

Zwölf wahre Mondumläufe umfassen hiernach einen Zeitraum von 354 Tagen 8 Stunden 48 Minuten 36 Secunden, bei der eben gegebenen angenäherten Bestimmung dagegen 354 Tage. Es schiessen also im mittleren Julianischen Jahre von 365 Tagen 6 Stunden noch 10 Tage 21 Stunden 11 Minuten 24 Secunden gegen die zwölf wahren Vollmonde über, um soviel Zeit fallen also in jedem Jahre die Vollmonde früher als im vorhergehenden. Im nächsten Jahre ist diese Zahl zu verdoppeln, im folgenden zu verdreifachen u. s. w. und dabei, wenn es möglich ist, die Dauer eines vollen Monats, 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden abzuziehen, um die Unterschiede in den Vollmondsdaten zu ermitteln. Diese Reste heissen wahre Epakten. Dieselben sind bezüglich in 1, 2 . . . Jahren:

Jahr	Wahre Epakte			
1	10 Tage	21 Stunden	11 Minuten	24 Secunden
2	21	18	22	48
3	3	2	50	9
4	14	0	1	33
5	24	21	1	57
6	6	5	40	18
7	17	2	51	42
8	28	0	3	6
9	9	8	30	27
10	20	5	41	51
11	1	14	9	12
12	12	11	20	36
13	23	8	3	20
14	4	16	59	21
15	15	1	30	45
16	26	11	22	9
17	7	19	49	30
18	18	17	0	54
19	0	1	27	15

Nach Verlauf von 19 Jahren wird die Epakte also nur etwa $1\frac{1}{2}$ Stunden betragen, die Mondphasen also werden auf dieselben Monatstage wie 19 Jahre zuvor fallen. Da es nur auf die vollen Tage ankommt, betrachtet man die Zahl 11 und die Reste ihrer Vielfachen nach 30 als abgekürzte Epakte, und lässt nach 19 Jahren dieselbe von vorn anfangen. Man hat also einen Cyclus von 19 Jahren für den Mondzirkel, in welchem die Epakten sind:

Jahre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Epakte	11	22	3	14	25	6	17	28	9	20
Jahre	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Epakte	1	12	23	4	15	26	7	18	29	

Man sieht durch Vergleiche, dass diese Zahlen gute Annäherungen an die wahren Epakten bieten. Der Mondzirkel von 19 Jahren liegt, wie hier schon bemerkt werden mag, auch dem Mondenjahre zu Grunde. Immer wenn sich die 11 überschiessenden Tage jedes Jahres zu mehr als 30 vereinen, sind dem Jahre 13 statt 12 Monate zu geben, es sind also in dem Mondzirkel die Jahre 3, 6, 9, 11, 14, 17, 19 Schaltjahre zu 13 Monaten, die Periode enthält deren also 7 zu 383 oder 384 Tagen, während das Gemeinjahr 354 Tage und 12 Monate hat. Kehren wir jedoch zum Julianischen Jahre zurück.

Um die Tage sämmtlicher Mondphasen eines bestimmten Jahres zu kennen, braucht man nur eine, etwa einen Vollmond, zu kennen, und wir wählen hierzu denjenigen, welcher auf das Frühlingsäquinoctium (21. März) folgt, den sogenannten Ostervollmond. Zu dem Ende bemerken wir, dass derselbe im Jahre 323 n. Chr. auf den 5. April, also 15 Tage nach dem 21. März fiel. Soll nun der Ostervollmond des $n$ten auf 323 folgenden Jahres gefunden werden, d. h. wieviel Tage derselbe nach dem 21. März fällt, so ist offenbar die Epakte von n von 15 abzuziehen, wenn diese Zahl aber negativ wird, so ist die Dauer eines Monats, also 30 hinzuzuzählen.

Bezeichnen wir mit $A_{\mathrm{mod}\, a}$ den Rest der Zahl A nach a genommen, so ist die Epakte von n offenbar gleich $11n_{\mathrm{mod}\, 30}$, wenn n kleiner als 19 ist; ist n aber grösser als 19, so muss hierin statt n der Rest von n nach 19, also $N \equiv n_{\mathrm{mod}\, 19}$ genommen werden. Der Ostervollmond ist dann $(15-11\,N)_{\mathrm{mod}\, 30}$ Tage nach dem 21. März, oder da ein

Vielfaches von 30 diese Restbestimmung nicht ändert:

$$(15+30\,N-11\,N)_{\mathrm{mod}\,30}$$
$$=(15+19\,N)_{\mathrm{mod}\,30}$$

nach besagtem Datum.

Uebrigens kann man statt n die Jahreszahl selbst nehmen, da, wenn dieselbe gleich S ist, $N=(S-323)_{\mathrm{mod}\,19}$ aber 323 durch 19 theilbar ist. Die Rechnung ist also folgende. Sei S die Jahreszahl. Man berechne:

$$S_{\mathrm{mod}\,19}=N,$$
$$(15+19\,N)_{\mathrm{mod}\,30}=d,$$

und der Julianische Ostervollmond fällt dann auf den $21+d$ ten März, oder wenn d grösser als 10 ist, auf den $d-10$ten April.

Man könnte, falls diese Rechnung den wahren Vollmond ergäbe, auch die Zahl S selbst negativ (für astronomische Jahre) nehmen, es ist dann für N immer der kleinste positive Rest nach 19 zu nehmen.

Beispiel.

Im Jahre des Concils 325 ist:

$$N=2,\quad d=23.$$

der Ostervollmond also fiel auf den $23-10=13$ten April.

Wir wollen jetzt aus dem kirchlichen Vollmond des Julianischen Jahres den angenähert wahren Vollmond der Julianischen Jahre bestimmen.

Der Grund, warum dieselben mit den eben berechneten nicht übereinstimmen, ist der, dass nach 19 Jahren der Vollmond nicht auf dieselbe Stunde fällt, sondern 1 Stunde 27 Minuten 15 Secunden später, als 19 Jahr zuvor, und in etwa $16\frac{1}{2}$ Mondzirkeln oder in $312\frac{1}{2}$ Jahren wird sich diese Zahl bereits zu einem Tage vermehrt haben, wo dann die Epakte um 1 grösser wird. Da wir die Epakte des mit 1 bezeichneten Jahres mit 11 bezeichnet haben, so ist sie also $312\frac{1}{2}$ Jahre später gleich 12, wieder nach $312\frac{1}{2}$ Jahren gleich 23 u. s. w. Um die Vollmondsformel zu verbessern, wollen wir jetzt unter $\left(\frac{a}{b}\right)$ die grösste in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ enthaltene ganze Zahl verstehen. Von der Zahl:

$$d=(15+19\,N)_{\mathrm{mod}\,30}$$

ist nun derjenige Quotient abzuziehen, der entsteht, wenn man den Ueberschuss der Jahreszahl über 325, von welchem Jahre die Bestimmungen datiren, durch $312\frac{1}{2}$ dividirt. Statt der Zahl 325 nehmen wir die runde Zahl 300, was nur einen Unterschied macht, der keinen vollen Tag beträgt, und ändern die Epakte nur im vollen Jahrhundert, was auch gestattet ist, da in 100 Jahren die Mondphasen noch nicht um $\frac{1}{3}$ Tag vortreten. Ist dann H die Anzahl der in der Jahreszahl enthaltenen vollen Jahrhunderte, so ist $H-3$ mit der Aenderung eines Jahrhunderts $\frac{100}{312\frac{1}{2}}=\frac{8}{25}$ zu multiplicirt, aber der Bruch zu vernachlässigen, es ist also nach der obigen Bezeichnung die Zahl $\left(\frac{8\,(H-3)}{25}\right)$ von $15+19\,N$ abzuziehen. Nun ist:

$$\left(\frac{8\,(H-3)}{25}\right)=\left(\frac{8\,H+1}{25}\right)-1,$$

so dass man hat:

$$S_{\mathrm{mod}\,19}=N,$$
$$16+19\,N-\left(\frac{8\,H+1}{25}\right)_{\mathrm{mod}\,30}=d.$$

Beispiel.

Im Jahre der Kirchenverbesserung 1582 ergab die Julianische Regel für den Ostervollmond:

$$N=5,\quad d=20,$$

also den 10. April. In der That aber war:

$$H=15,\quad \left(\frac{8\,H+1}{25}\right)=4,$$

also:

$$d=17,$$

und dieser Vollmond fiel auf den 7. April.

Wir wollen jetzt den Ostervollmond auch für das Gregorianische Jahr berechnen.

In demselben nimmt die Zahl gegen den angenommenen Vollmond des Julianischen Jahres folgende vier Aenderungen an:

1) wegen der 10 im Jahre 1582 ausgefallenen Tage fällt jeder Vollmond 10 Kalendertage später,

2) die säculare Aenderung liess denselben, wie das eben gegebene Beispiel zeigt, statt auf den 10ten auf den 7ten April, also 3 Tage früher fallen, wegen beider Aenderungen ist also zu dem Werthe von d 7 zuzuzählen,

3) kommt die säculare Aenderung für

die Gregorianischen Jahre hinzu, derzufolge in jedem vollen Jahrhunderte vom 16ten an, die durch 4 theilbaren ausgenommen, der Vollmond um einen Tag früher fällt; die zuzuzählende Zahl ist also, wenn H die Anzahl der verflossenen Jahrhunderte ist:

$$H-16-\left(\frac{H-16}{4}\right),$$

4) fällt weg die in der Anzahl der vollen Jahrhunderte mit $\frac{8}{25}$ multiplicirt enthaltene grösste ganze Zahl, ganz wie oben, jedoch muss, da die Aenderung zuerst im 16ten Jahrhundert, also von 1500 ab, stattfindet, daselbst $H-3$ durch $H-14$ ersetzt werden, so dass $\left(\frac{8(H-14)}{25}\right)$ zu subtrahiren ist. Die beiden letzten Aenderungen geben:

$$H-16-\left(\frac{H-16}{4}\right)-\left(\frac{8(H-14)}{25}\right).$$

Nun ist:

$$\left(\frac{H-16}{4}\right)=\left(\frac{H}{4}\right)-4,\quad \left(\frac{8(H-14)}{25}\right)=\left(\frac{8H-125+13}{25}\right)=\left(\frac{8H+13}{25}\right)-5.$$

Es geben nun alle vier Aenderungen:

$$15+19N+7+H-16-\left(\frac{H}{4}\right)+4-\left(\frac{8H+13}{25}\right)+5,$$

also:

$$15+19N+H-\left(\frac{H}{4}\right)-\left(\frac{8H+13}{25}\right)_{\text{mod }30}=d.$$

Alle drei Vollmondsregeln lassen sich vereinigen in den Formeln:

$$S_{\text{mod }19}=N,\qquad 15+19N+\varrho_{\text{mod }30}=d,$$

und:

$$\varrho=0$$

für den Julianischen Kirchenvollmond,

$$\varrho=1-\left(\frac{8H+1}{25}\right)$$

für den wirklichen Vollmond der Julianischen Jahre,

$$\varrho=H-\left(\frac{H}{4}\right)-\left(\frac{8H+13}{25}\right)$$

für den Gregorischen Vollmond.

Aus dem Ostervollmonde eines Jahres lassen sich alle übrigen Vollmonde desselben Jahres durch Zuzählen oder Abziehen von $n\cdot 29\frac{1}{2}$ oder $\frac{n\cdot 59}{2}$ Tagen finden, der Neumond ist dann 15 Tage später zu nehmen.

Offenbar kann man in dieser Rechnung gegen die astronomische Bestimmung Fehler von einem und selbst zwei Tagen machen.

Um die Regel für (astronomische) Jahre vor Christus anzuwenden, ist S negativ zu nehmen, es kann aber ein Vielfaches von 19 zugezählt werden, damit der Rest positiv sei.

Beispiel.

Das Jahr von Cäsars Tode 44 v. Chr. ist nach astronomischer Zeit $=-43$; zählen wir $3\cdot 19=57$ hinzu, so wird $N=14$. Da es im -1ten Jahrhunderte liegt, so ist $H=-1$, und da wir Julianische Jahre haben:

$$\varrho=1-\left(\frac{-8+1}{25}\right)=2.$$

Es ist nämlich im algebraischen Sinne:

$$-1<\frac{-7}{25}<0,$$

also:

$$\left(\frac{-7}{25}\right)=-1,$$

$$d=(15+19\cdot 14+2)_{\text{mod }30}=12,$$

so dass der Vollmond auf den 3. April fiel. Der nächst vorhergehende Neumond war 15 Tage früher, also am 19. März. Die Nacht vor Cäsars Ermordung (15. März) hat also eine Mondphase zwischen letztem Viertel und Neumond.

8) Die beweglichen Feste.

Die Feste der christlichen Kirche fallen theilweise auf bestimmte Kalender-

tage, diese sind: Neujahr 1 Januar, Weihnachten 25 Dezember; theilweise ergeben sie sich nach dem Osterfeste: Charfreitag fällt 2 Tage vor, Pfingsten 7 Wochen nach Ostern.

Für das Osterfest selbst stellt das Nicäische Concil die Regel auf, dass der Ostersonntag unmittelbar auf denjenigen Vollmond folgen solle, der nach der Frühlingsnachtgleiche folgt, wobei für diese Nachtgleiche der 21. März angenommen, der Ostervollmond durch die obige Durchschnittsrechnung ermittelt wird. Fällt der Vollmond hierbei selbst auf einen Sonntag, so ist natürlich der nächste zu nehmen. Man glaubte mit Unrecht, auf diese Weise ein Zusammenfallen des Osterfestes mit dem jüdischen Passah zu vermeiden.

Es lässt sich hiernach das Osterfest nach beiden Kalendern berechnen, indem man für den Julianischen Kalender:

$$\varrho = 0,$$

für den Gregorianischen:

$$\varrho = H - \left(\frac{H}{4}\right) - \left(\frac{8H+13}{25}\right)$$

setzt.

Bemerken wir nun, dass der früheste Ostertermin der 22. März ist, wenn nämlich der Vollmond auf den 21. März und einen Sonnabend fällt, und berechnen wir den Wochentag des 21. März für beide Kalender. Im Jahre von Christi Geburt Null war dieser Tag ein Montag, im Jahre S würde er S Wochentage später fallen, wenn wir es nur mit Gemeinjahren zu thun hätten, und wegen der Schaltjahre noch $\left(\frac{S}{4}\right)$ Tage später. Da die Woche aber einen Zirkel von 7 Tagen bildet, so ist der Rest von $S+\left(\frac{S}{4}\right)$ nach 7 zu nehmen. Je nachdem nämlich die Zahl:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)_{\text{mod } 7}$$

gleich 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ist, wird der 22. März ein Montag, Dienstag u. s. w. sein, so dass 6 dem Sonntag entspricht. Was den Gregorischen Kalender anbetrifft, so rückt im Jahre 1582 der Wochentag des 22. März um 10 Tage, also nach Abzug einer Woche um 3 Wochentage zurück, ganz als wenn im Jahre Null der 22. März ein Freitag gewesen wäre. Wegen der ausfallenden Schalttage aber ist von $S+\left(\frac{S}{4}\right)$ abzuziehen:

$$H-16-\left(\frac{H-16}{4}\right) = H-12-\left(\frac{H}{4}\right);$$

in dem Ausdrucke:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)+\left(\frac{H}{4}\right)+12-H_{\text{mod } 7}$$

entspricht also der 0 ein Freitag, der 1 ein Sonnabend u. s. w. Damit wie oben dem Werthe 0 ein Montag entspreche, ist 3 abzuziehen. Dadurch erhalten wir folgende Regel für beide Kalender.

Man untersucht den Ausdruck:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)+\sigma_{\text{mod } 7},$$

wo im Julianischen Kalender:

$$\sigma = 0,$$

im Gregorischen:

$$\sigma = \left(\frac{H}{4}\right)+9-H$$

ist, und je nachdem dieser Ausdruck den Werth 0, 1, 2 . . . hat, ist der 22 März ein Montag, Dienstag u. s. w. Da der $21+d$te März der Vollmondstag war, so kann der Ostertag auf den $22+d$ten März frühestens fallen, und auch dieser Tag ist ein Montag u. s. w., wenn:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)+\sigma+d_{\text{mod } 7}=0$$

u. s. w. ist. Es fällt dann Ostern 6 Tage später, wenn der Rest 1 ist 5 Tage u. s. w., wenn er 6 ist, also 0 Tage später, d. h. auf diesen Tag selbst. Setzt man also:

$$6-S-\left(\frac{S}{4}\right)-\sigma-d_{\text{mod } 7}=e,$$

so wird der Ostersonntag immer der $22+d+e$te März, oder wenn diese Zahl grösser als 31 ist, der $d+e-9$te April sein.

Für den Julianischen Kalender ist diese Regel immer richtig, für den Gregorischen aber tritt vermöge einer eigenthümlichen Bestimmung noch eine Ausnahme ein. Da $S_{\text{mod } 19}=N$ war, so kann N jede Zahl von 0 bis 18 sein, der Werth von d im Julianischen Kalender $15+19\,S_{\text{mod } 30}$ gibt für alle diese Werthe von S:

15, 4, 23, 12, 1, 20, 9, 28, 17, 6, 25,
14, 3, 22, 11, 0, 19, 8,

so dass der grösste Werth 28 ist, also dass der späteste Ostervollmond auf den 18. April fällt, Ostern selbst spätestens am 25. April eintreten muss. Die Gre-

gorischen Ostern könnten dagegen, da d jede Zahl bis 29 sein kann, auch auf den 26. April fallen. Indess war einmal der 25. April als letzter Ostertermin angenommen. Die Gregorische Kalenderverbesserung bestimmte daher, dass zunächst, wenn dieser Fall sich ereignete, also der Vollmond auf den 19. April und einen Sonntag fiele, der vorhergehende Tag, der 18. April, als Vollmondstag betrachtet, und somit Ostern auf den 19. April fallen solle, also 7 Tage früher, als unsere Rechnung ergibt. Tritt dies indess in irgend einem Jahrhundert ein, so kann ein anderer Vollmond wirklich auf den 18. April fallen, und um dies zu vermeiden, wurde bestimmt, dass der Vollmond dann für den 17. April gedacht werde. Einen Einfluss hat dies nur, wenn der 18te ein Sonntag ist, Ostern würde dann auf den 25. April fallen; durch diese Verbesserung aber fällt es auf den 18ten, also ebenfalls 7 Tage früher. Um diese Aenderung der Rechnung zu unterwerfen, stellen wir sie folgendermaassen dar.

In denjenigen Jahrhunderten, wo d einmal wenigstens gleich 29 wird, soll Ostern immer 7 Tage früher fallen, als unsere Formel angibt. wenn d gleich 28 oder 29 und zugleich der $21+d$ te März ein Sonntag ist. Letzteres aber ist der Fall, wenn:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)+\sigma+d_{\text{mod }7}=6$$

ist.

Es fragt sich zunächst, in welchen Jahrhunderten diese Ausnahme stattfinden kann. Wir hatten:

$$d=15+\varrho+19\,N_{\text{mod }30}.$$

N konnte jeden Werth von 0 bis 18 haben, es muss also, falls diese Ausnahme sich ereignen kann, für einen dieser Werthe:

$$15+\varrho+19\,N_{\text{mod }30}=29$$

sein, also:

$$19\,N-30\,x=14-\varrho,$$

wo x eine beliebige ganze Zahl ist.

Die Gleichung:

$$19\,N-30\,x=-1$$

gibt (vergleiche den Artikel: Unbestimmte Aufgaben):

$$N=11,\quad x=7$$

also unsere Gleichung:

$$N=11\,(\varrho-14)+30\,n,$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Da es aber nur auf den Rest nach 30 ankommt, kann man setzen:

$$N=11\,(\varrho-14)_{\text{mod }30}=11\varrho+26_{\text{mod }30}.$$

Nun ist N höchstens 18, es wird also $29-N$ zwischen 11 und 29 (inclusive) liegen. Aber:

$$29-N=29-11\,\varrho-26_{\text{mod }30}.$$

$$3-11\varrho_{\text{mod }30}=3+19\varrho_{\text{mod }30}.$$

Die Bedingung, dass in einem Jahrhundert die Ausnahme eintreten kann, ist also die, dass der Ausdruck:

$$\delta=(3+19\,\varrho)_{\text{mod }30}$$

zwischen 11 und 29, also $8+\delta$ zwischen 19 und 37 liegt. In diesem Falle, und nur in diesem, ist aber $\left(\frac{8+\delta}{19}\right)=1$ sonst $=0$. Der erste Fall zeigt, dass in einem gegebenen Jahrhunderte (wo δ durch ϱ und ϱ durch H bestimmt ist), die Ausnahme eintreten kann, der zweite, dass es nicht geschieht.

Beispiel.

Im laufenden Jahrhundert ist:

$$H=18,$$

$$\varrho=H-\left(\frac{H}{4}\right)-\left(\frac{8\,H+13}{25}\right)_{\text{mod }30}=8,$$

$$\delta=(8+152)_{\text{mod }30}=10,$$

$$\left(\frac{10}{19}\right)=0.$$

Die Ausnahme findet nicht statt.

Für $H=19$ ist:

$$\varrho=9,\quad \delta=24,\quad \left(\frac{24}{19}\right)=1,$$

sie wird also im kommenden Jahrhundert eintreten.

Suchen wir nun die Jahre, in welchen die Ausnahme in der That stattfindet. Für dieselben ist $d=28$ oder 29, also $\left(\frac{d}{28}\right)=1$, sonst ist $\left(\frac{d}{28}\right)=0$. Da sich nun beide Bedingungen vereinigen müssen, so ist die Bedingung $\left(\frac{d}{28}\right)\left(\frac{8+\delta}{19}\right)=1$ für die Ausnahme nothwendig. Es tritt aber die Bedingnng hinzu, dass der Vollmondstag, der $21+d$ te März, ein Sonntag, also der $22+d$ te ein Montag, d. h.:

$$S+\left(\frac{S}{4}\right)+\sigma+d_{\text{mod }7}=0$$

sei; in diesem Falle ist $e=6$. — Die Ausnahme nimmt nun folgende Gestalt an:

Wenn gleichzeitig $e=6$ und:

$$\left(\frac{d}{28}\right)\left(\frac{8+\delta}{19}\right)=1$$

ist, so ist der Ostersonntag nicht der $22+d+e$ te, sondern der $22+d+e-7$ te März.

Wir wollen jedoch die Formel so ändern, dass die Zahl $22+d+e$ immer richtig bleibt.

Zu dem Ende fügen wir zu dem Werthe von e noch die Zahl $\left(\frac{d}{28}\right)\left(\frac{8+\delta}{19}\right)$ hinzu. e bleibt dann ungeändert, wenn das Product Null ist, und nimmt um 1 zu, wenn es gleich Eins ist. Ist aber der frühere Werth von e:

$$6-S-\left(\frac{S}{4}\right)-\sigma-d_{\mathrm{mod}\,7}$$

gleich 6, so wird der jetzige Werth von e:

$$=7_{\mathrm{mod}\,7}=0,$$

und dies tritt ein, wenn die Ausnahme stattfindet.

Nimmt man nun den:

$$22+d+e-\left(\frac{d}{28}\right)\left(\frac{8+\delta}{19}\right)\text{ ten März}$$

als Ostertermin, so ist allen Fällen Rücksicht gewidmet, nämlich eine Aenderung findet gar nicht statt, wenn das letzte Glied 0 ist. Ist es gleich 1, aber nicht zugleich e gleich 0 oder der alte Werth von $e=6$, so wird einerseits e um Eins vermehrt, andererseits der Ostertag um Eins zurückgerückt, nur wenn gleichzeitig $e=0$ (d. h. der alte Werth von $e=6$) ist, wird e um 6 vermindert und der Ostertag tritt noch um Eins zurück, so dass in der That derselbe eine Woche früher genommen wird, wie dies sein muss.

Wir wollen nun die entwickelten Formeln noch etwas vereinfachen.

Es war für die Julianischen Ostern:

$$e=6-S-\left(\frac{S}{4}\right)-d_{\mathrm{mod}\,7},$$

wozu für die Gregorischen noch:

$$-\sigma+\left(\frac{d}{18}\right)\left(\frac{8+\delta}{19}\right)$$

tritt. Setzen wir nun:

$$b\equiv S_{\mathrm{mod}\,4},$$

so ist:

$$\left(\frac{S}{4}\right)=\frac{S-b}{4},$$

also:

$$e=6-\frac{5}{4}S+\frac{b}{4}-d_{\mathrm{mod}\,7}.$$

Noch kann ein Vielfaches von 7, also:

$$7S-7\frac{S-b}{4}+7d$$

zugezählt werden, und man erhält:

$$e=6+4S+2b+6d_{\mathrm{mod}\,7},$$

auch kann man statt S seinen Rest nach 7, also c, wenn:

$$c\equiv S_{\mathrm{mod}\,7}$$

ist, nehmen. Zu der so gefundenen Zahl tritt im Gregorischen Kalender noch:

$$AB-\sigma,$$

wenn:

$$A=\left(\frac{8+\delta}{19}\right),\ B=\left(\frac{d}{28}\right)$$

ist, hinzu. Noch war:

$$\sigma=\left(\frac{H}{4}\right)+9-H,$$

also:

$$e=AB+2b+4c+6d+H-\left(\frac{H}{4}\right)-3_{\mathrm{mod}\,7},$$

also wenn:

$$\beta\equiv H_{\mathrm{mod}\,4},\quad\left(\frac{H}{4}\right)=\frac{H-\beta}{4}$$

ist, und wenn man:

$$7H-\frac{7(H-\beta)}{4}+7$$

zuzählt:

$$e=AB+4+2b+4c+6d+6\gamma+2\beta_{\mathrm{mod}\,7},$$

wo:

$$\gamma\equiv H_{\mathrm{mod}\,7}$$

ist.

Wir geben jetzt die Formeln für den Ostersonntag und den Ostervollmond nach beiden Kalendern in übersichtlicher Form, indem wir statt der Zahl N jetzt a setzen wollen.

I. Julianische Ostern.

S ist die Jahreszahl.

$$a = S_{\text{mod }19}, \quad b = S_{\text{mod }4}, \quad c = S_{\text{mod }7}, \quad d = 15 + 19a_{\text{mod }30},$$
$$e = 6 + 2b + 4c + 6d_{\text{mod }7},$$

Ostervollmond (nach dem Kalender):

$21 + d$ te März oder $d - 10$ te April,

Ostersonntag:

$22 + d + e$ te März oder $d + e - 9$ te April.

Für den wahren Vollmond, der auf die Frühlingsnachtgleiche folgt, setze noch die Anzahl der verflossenen Jahrhunderte gleich H und nehme:

$$d = 16 + 19a - \left(\frac{8H+1}{25}\right)_{\text{mod }30},$$

den Vollmond aber wie oben.

II. Gregorische Ostern.

Setze wieder S für die Jahreszahl, H für die darin enthaltenen vollen Jahrhunderte.

A) Säculare Grössen:

$$\varrho = H - \left(\frac{H}{4}\right) - \left(\frac{8H+13}{25}\right), \quad \beta = H_{\text{mod }4}, \quad \gamma = H_{\text{mod }7},$$
$$\delta = 3 + 19\varrho_{\text{mod }30}, \quad A = \left(\frac{8+\delta}{19}\right).$$

B) Jährliche Grössen:

$$a = S_{\text{mod }19}, \quad b = S_{\text{mod }4}, \quad c = S_{\text{mod }7}, \quad d = 15 + \varrho + 19a_{\text{mod }30},$$
$$B = \left(\frac{d}{28}\right), \quad e = 4 + 2\beta + 6\gamma + 2b + 4c + 6d + AB_{\text{mod }7}.$$

Ostervollmond:

$21 + d$ te März oder $d - 10$ te April.

Ostersonntag:

$22 + d + e - AB$ te März oder $d + e - AB - 9$ te April.

Das Glied AB kommt nur in den Jahrhunderten in Betracht, wo $A = 1$ ist, und nur dann, wenn $B = 1$, d. h. $d = 28$ oder 29, und wenn $e = 0$ ist.

Diese Formeln geben fürs 16te Jahrhundert:

$$H = 15, \quad \varrho = 7, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 1, \quad \delta = 16, \quad A = 1.$$

Wenn man die Rechnung auch für die anderen Jahrhunderte macht, kommt:

16tes Jahrhundert:

$$d = 22 + 19a_{\text{mod }30}, \quad e = 2 + 2b + 4c + 6d + B_{\text{mod }7},$$

17tes Jahrhundert:

$$d = 22 + 19a_{\text{mod }30}, \quad e = 2 + 2b + 4c + 6d + B_{\text{mod }7},$$

18tes Jahrhundert:

$$d = 23 + 19a_{\text{mod }30}, \quad e = 3 + 2b + 4c + 6d_{\text{mod }7},$$

19tes Jahrhundert:

$$d = 23 + 19a_{\text{mod }30}, \quad e = 4 + 2b + 4c + 6d_{\text{mod }7},$$

20tes Jahrhundert:

$$d = 24 + 19a_{\text{mod }30}, \quad e = 5 + 2b + 4c + 6d + B_{\text{mod }7}.$$

Die Formeln für a, b, c, B sind in allen Jahrhunderten dieselben.

Wir haben bereits oben die Bedingung abgeleitet, unter welcher in einem Jahrhunderte $A=1$ ist, also die Ausnahme eintreten kann. Es war die, dass der Rest von $3+19\varrho$ nach Modul 30 für dies Jahrhundert zwischen 11 und 29 fällt.

Beantworten wir noch die Frage, *a priori* die Jahre eines solchen Jahrhunderts zu finden, wo diese Ausnahme wirklich eintritt, d. h. wo $d=28$ oder 29, $e=0$ ist. Da die Rechnung immer dieselbe ist, wollen wir uns hierbei aufs 20. Jahrhundert beschränken. Es war für dasselbe:

$$d=24+19a_{\text{mod }30},$$

also im Falle der Ausnahme:

$$\left.\begin{matrix}28\\29\end{matrix}\right\}=24+19a_{\text{mod }30},$$

oder:

$$\left.\begin{matrix}4\\5\end{matrix}\right\}=19a_{\text{mod }30}.$$

Von den zwei Werthen ist der obere immer auf den Fall bezogen, wo der Ostersonntag auf den 18ten, der untere, wo er auf den 19ten April fällt. Diese Gleichung ist gleichbedeutend mit:

$$19a-30x=\begin{cases}4\\5\end{cases}.$$

Die Auflösung ergibt sich leicht (vergleiche den Artikel: Unbestimmte Aufgaben):

$$a=\begin{cases}-44+30y\\-55+30y\end{cases},$$

oder wenn man $y=z+2$ setzt:

$$a=\begin{cases}16+30z\\5+30z\end{cases}.$$

Da aber a kleiner als 19 sein muss, so entspricht jedem Falle nur ein Werth von a, nämlich:

$a=16$ für den 18ten,

$a=\ 5$ für den 19ten April,

wegen:

$$a=S_{\text{mod }19}$$

muss also die entsprechende Jahreszahl von der Form:

$$S=19\lambda+\begin{cases}16\\5\end{cases}$$

sein, und dies ist die erste Bedingung der Ausnahme. Setzen wir jetzt zunächst den oberen Werth, also:

$$S=19\lambda+16,\quad d=28$$

voraus, so gibt die Gleichung:

$$e=0=5+2b+4c+6d+1_{\text{mod }7}.$$

Da d durch 7 theilbar ist, so erhält man:

$$0=6+2b+4c_{\text{mod }7},$$

d. h.:

$$1=2b+4c_{\text{mod }7},$$

also die zweite Bedingung. Was die Werthe von b und c anbetrifft, so ist:

$$c=S_{\text{mod }7}=19\lambda+2_{\text{mod }7}=5\lambda+2_{\text{mod }7},$$

und dieser Werth kann in der vorletzten Gleichung den Rest c ersetzen, da der Modul 7 in beiden Gleichungen derselbe ist. Die zweite Bedingung ergibt sich dann in der Form:

$$0=2b+6\lambda_{\text{mod }7}.$$

b ist hier gegeben durch die Gleichung:

$$b=S_{\text{mod }4},$$

und wegen $S=19\lambda+16$ erhält man:

$$b=3\lambda_{\text{mod }4}.$$

Also damit die Ausnahme stattfinde, und der 18. April Ostersonntag ist, sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

A) Die Grösse $\frac{S-16}{19}=\lambda$ muss eine ganze Zahl sein, die zwischen 1900 und 2000 liegt. Dem entsprechen offenbar die Werthe:

$$S=1916,\ 1935,\ 1954,\ 1973,\ 1992,$$

und bezüglich:

$$\lambda=100,\ 101,\ 102,\ 103,\ 104,$$

wegen der Gleichung:

$$b=3\lambda_{\text{mod }4}$$

aber noch:

$$b=0,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0.$$

B) Der Ausdruck $2b+6\lambda$ muss durch 7 theilbar sein. Man hat bezüglich:

$$2b+6\lambda=600,\ 612,\ 616,\ 620,\ 624,$$

von denen nur der dritte durch 7 theilbar ist. Die Ausnahme tritt also im 20ten Jahrhundert nur im Jahre 1954 mit der Bedingung ein, dass der Ostersonntag auf den 18. April fällt.

Soll er aber auf den 19. April fallen, so ist:

$$S=19\lambda+5,\quad d=29.$$

Die Gleichung:

$$0=5+2b+4c+6d+1_{\text{mod }7}$$

gibt dann wie oben als zweite Bedingung:

$$2 = 2b + 4c_{\text{mod } 7}.$$

Es ist nun:

$$c = S_{\text{mod } 7} = 5\lambda + 5_{\text{mod } 7},$$

und dieser Werth kann in die vorige Gleichung eingesetzt werden. Es ergibt sich:

$$3 = 2b + 6\lambda_{\text{mod } 7},$$

für b hat man:

$$b = S_{\text{mod } 4},$$

also:

$$b = 3\lambda + 1_{\text{mod } 4}.$$

Die Bedingungen dafür, dass die Ausnahme stattfinde und der Ostersonntag der 19. April ist, sind also:

A) $\frac{S-5}{19} = \lambda$ muss eine ganze Zahl sein. Man erhält die Werthe:

$$S = 1905,\ 1924,\ 1943,\ 1962,\ 1982,$$

und bezüglich:

$$\lambda = 100,\ 101,\ 102,\ 103,\ 104,$$

wegen Gleichung:

$$b = 3\lambda + 1_{\text{mod } 4}$$

aber:

$$b = 1,\ 0,\ 3,\ 2,\ 1.$$

B) Der Ausdruck:

$$2b + 6\lambda - 3$$

muss durch 7 theilbar sein. Man erhält:

$$2b + 6\lambda - 3 = 599,\ 603,\ 615,\ 619,\ 623.$$

Nur der letzte ist durch 7 theilbar. Im 20ten Jahrhundert findet also die Ausnahme nur im Jahre 1981 mit der Bedingung statt, dass der Ostersonntag auf den 19. April fällt. Die Jahre 1954 und 1981 sind also die einzigen Ausnahmen des 20ten Jahrhunderts.

Es ist auch nicht schwer, die Jahre eines Jahrhunderts zu ermitteln, in welchen der Ostersonntag auf einen der äussersten Termine, bezüglich den 22. März und 25. Apil fällt. Wir wollen diese Aufgabe für das laufende Jahrhundert lösen. In jedem anderen Jahrhundert ist sie natürlich ganz ebenso zu behandeln.

Soll der 22. März der Ostersonntag sein, so muss offenbar:

$$d = e = 0$$

sein. Wegen dieser Bedingungen hat man:

$$23 + 19a \equiv 0_{\text{mod } 30},$$

$$4 + 2b + 4c \equiv 0_{\text{mod } 7}.$$

Die erste Congruenz ist identisch mit:

$$30x - 19a = 23,$$

woraus sich ergibt:

$$a = 13 + 30n.$$

Aber da a der Rest nach Modul 19 ist, kann nur der Werth $a = 13$ in Betracht kommen. Da das Jahr 1805 das erste in diesem Jahrhundert vorkommende durch 19 theilbare Jahr ist, so ist $a = 13$ für die Jahre:

1818, 1837, 1856, 1875, 1884,

die entsprechenden Werthe von b und c für diese Jahre sind:

$$b = 2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 2,$$

$$c = 5,\ 3,\ 1,\ 6,\ 4,$$

und die von $4 + 2b + 4c$ sind:

28, 18, 8. 34, 24,

von welchen Zahlen nur die erste durch 7 theilbar ist, so dass in diesem Jahrhundert nur im Jahre 1818 der Ostersonntag auf den 22. März fiel.

Damit der Ostersonntag aber der 25. April sei, muss man haben:

$$22 + d + e = 56,$$

d. h.:

$$d + e = 34.$$

Da e höchstens gleich 6 sein kann, so muss d mindestens gleich 28 sein, und kann daher nur einen der Werthe 28 oder 29 haben.

Man hat also die Congruenz:

$$23 + 19a \equiv \left.\begin{matrix}28\\29\end{matrix}\right\}_{\text{mod } 30}.$$

Die entsprechenden Werthe von a ergeben sich wie oben:

$a = 5$ für den ersten Fall.

Für den zweiten Fall würde sich:

$$a = 24 + 30n$$

ergeben. Da in diesem Ausdruck aber keine positive Zahl, die kleiner als 19, enthalten ist, so kann dieser Fall nicht eintreten. Die entsprechenden Jahre sind somit:

1810, 1829, 1848, 1867, 1886.

Diesen Jahren entsprechen also die Werthe:

$$a = 5,$$
$$b = 2,\ 1,\ 0,\ 3,\ 1,$$
$$c = 4,\ 2,\ 0,\ 5,\ 2,$$
$$d = 28,$$

und wegen:

$$e = 4 + 2b + 4c + 6d_{\text{mod }7} = 4 + 2b + 4c_{\text{mod }7}$$

hat man:

$$e = 3,\ 0,\ 4,\ 2,\ 0.$$

Da nur der Werth $e = 6$ unserem Falle entspricht, so kommt in diesem Jahrhundert kein Jahr vor, wo der Ostersonntag auf den 25. April fällt.

Beispiele.

Im Jahre der Kalender-Reformation 1582 ist für die Julianischen Ostern:

$$a = 5,\ b = 2,\ c = 0,\ d = 20,\ e = 4,$$

Ostern fiel also auf den 15 April.

Im Jahre 1864 ist für die Gregorischen Ostern:

$$a = 2,\ b = 0,\ c = 2,\ d = 1,\ e = 4,$$

Ostern fiel auf den 27. März, der Ostervollmond auf den 22. März.

(Die astronomische Rechnung gibt den Vollmond für den 23 März Vormittags.)

Historisch ist zu bemerken, dass die deutschen Protestanten, welche erst 1700 die Kalender-Reformation annahmen, zuerst den Ostervollmond und die Frühlings-Nachtgleiche durch astronomische Rechnung ermittelten. Dies führte zu dem Uebelstande, dass zuweilen die katholischen Ostern mit den protestantischen nicht übereinstimmten. Auch hat hier die astronomische Rechnung manche Uebelstände. Falle z. B. in Frankreich der Ostervollmond zwischen 11 und 12 Uhr Nachts, so wird er in Deutschland zwischen 12 und 1 Uhr fallen. Ist dies nun die Nacht vom Sonnabend zum Sonntag, so ist für Deutschland der letztere Tag zu nehmen, und Ostern fiele hier 8 Tage später als in Frankreich. Unmöglich würde es übrigens sein, die Ortsgrenze zu bestimmen, wo das eine aufhöre und das andere eintrete. Man ist daher später auf die Gregorische Bestimmung zurückgekommen, in Preussen auf Friedrich II. Befehl 1775, in ganz Deutschland durch Reichstagsbeschluss 1777.

Die Engländer schlossen sich 1777 dem verbesserten Kalender an, die Russen und Griechen haben noch jetzt den Julianischen.

Die hier gegebene Osterregel ist in dieser Form von Gauss gegeben. Früher bediente man sich der Ostertafeln und gewisser Hülfsgrössen, nämlich ausser den Epakten noch der güldenen Zahl, welche die Stelle des Jahres im Mondzirkel vom Jahre Null ab gezählt) angab.

4) Gebrauch des immerwährenden Kalenders.

Es kann historisch wichtig sein, aber selbst auch aus Rechtsgründen und andern Veranlassungen das Bedürfniss gefühlt werden, die gewöhnlichen Kalendernotizen für irgend ein vergangenes oder zukünftiges, Julianisches oder Gregorianisches Jahr schnell zu finden. — Diesen Anforderungen genügt recht gut ein immerwährender Kalender, wie er hier beigefügt ist.

Derselbe besteht aus 3 Spalten, deren erste die Monatstage, die zweite die 7 ersten Buchstaben des Alphabets in wiederkehrender Reihenfolge, die dritte die Zahlen 30 bis 1 in wiederkehrender Folge enthalten; in dem je zweiten Monate entsprechen die Zahlen 25 und 24 demselben Tage. Für die Schaltjahre entspricht ausserdem dem 29. Februar dieselbe zweite und dritte Spalte, als dem 1. März.

Die zweite Spalte dient, um die Wochentage jedes gegebenen Monatstages zu finden. Der Buchstabe, welcher irgend einem Sonntage entspricht, heisst nämlich Sonntagsbuchstabe; aus demselben lassen sich sogleich die der andern Wochentage finden. Ist z. B. *d* der Sonntagsbuchstabe, so ist *e* der für den Montag u. s. w. Um den Sonntagsbuchstaben und selbst den jedes Monatstages zu finden, haben wir in dem Artikel: Sonntagsbuchstabe eine directe Regel gegeben, aber bestimmt man das Osterfest des betreffenden Jahres, wie es ja doch zur Vollständigkeit des Kalenders geschehen muss, so hat man, da es stets auf einen Sonntag fällt, auch den Sonntagsbuchstaben des betreffenden Jahres. Zu bemerken ist nur, dass bei Schaltjahren derselbe nur vom März an, für Januar und Februar aber der folgende Buchstabe gilt. Z. B. für 1864, wo Ostern auf den 27. März fiel, ist *b* der Sonntagsbuchstabe vom 1. März ab, für Januar und Februar aber *c*.

Die dritte Spalte gibt die Mondphasen. Bestimmt man einen Vollmond, also den Ostervollmond, so hat man diejenige

Zahl, welche jedem Vollmonde entspricht. Z. B. für 1864, wo der 22. März, also die Zahl 9 dem Vollmonde entspricht, gilt dies fürs ganze Jahr. Die Neumondszahl aber ist dann 9+15=24.

Es folgt hier der immerwährende Kalender, ausserdem eine Tafel für die beweglichen Feste, mit der Bemerkung, dass Aschermittwoch 46 Tage vor, Himmelfahrtstag 39 Tage, Pfingsten 49 Tage, Frohnleichnamsfest 60 Tage nach Ostern fällt. Der 1. Adventsonntag aber ist der vierte Sonntag vor Weihnachten. Derselbe wird also bestimmt, wenn man von dem mit Hülfe des immerwährenden Kalenders ermittelten Sonntag vor Weihnachten 28 Tage rückwärts geht.

Immerwährender Kalender.

Januar			Februar			März			April			Mai			Juni		
1	*a*	30	1	*d*	29	1	*d*	30	1	*g*	29	1	*b*	28	1	*e*	27
2	*b*	29	2	*e*	28	2	*e*	29	2	*a*	28	2	*c*	27	2	*f*	26
3	*c*	28	3	*f*	27	3	*f*	28	3	*b*	27	3	*d*	26	3	*g*	25-24
4	*d*	27	4	*g*	26	4	*g*	27	4	*c*	26	4	*e*	25	4	*a*	23
5	*e*	26	5	*a*	25-24	5	*a*	26	5	*d*	25-24	5	*f*	24	5	*b*	22
6	*f*	25	6	*b*	23	6	*b*	25	6	*e*	23	6	*g*	23	6	*c*	21
7	*g*	24	7	*c*	22	7	*c*	24	7	*f*	22	7	*a*	22	7	*d*	20
8	*a*	23	8	*d*	21	8	*d*	23	8	*g*	21	8	*b*	21	8	*e*	19
9	*b*	22	9	*e*	20	9	*e*	22	9	*a*	20	9	*c*	20	9	*f*	18
10	*c*	21	10	*f*	19	10	*f*	21	10	*b*	19	10	*d*	19	10	*g*	17
11	*d*	20	11	*g*	18	11	*g*	20	11	*c*	18	11	*e*	18	11	*a*	16
12	*e*	19	12	*a*	17	12	*a*	19	12	*d*	17	12	*f*	17	12	*b*	15
13	*f*	18	13	*b*	16	13	*b*	18	13	*e*	16	13	*g*	16	13	*c*	14
14	*g*	17	14	*c*	15	14	*c*	17	14	*f*	15	14	*a*	15	14	*d*	13
15	*a*	16	15	*d*	14	15	*d*	16	15	*g*	14	15	*b*	14	15	*e*	12
16	*b*	15	16	*e*	13	16	*e*	15	16	*a*	13	16	*c*	13	16	*f*	11
17	*c*	14	17	*f*	12	17	*f*	14	17	*b*	12	17	*d*	12	17	*g*	10
18	*d*	13	18	*g*	11	18	*g*	13	18	*c*	11	18	*e*	11	18	*a*	9
19	*e*	12	19	*a*	10	19	*a*	12	19	*d*	10	19	*f*	10	19	*b*	8
20	*f*	11	20	*b*	9	20	*b*	11	20	*e*	9	20	*g*	9	20	*c*	7
21	*g*	10	21	*c*	8	21	*c*	10	21	*f*	8	21	*a*	8	21	*d*	6
22	*a*	9	22	*d*	7	22	*d*	9	22	*g*	7	22	*b*	7	22	*e*	5
23	*b*	8	23	*e*	6	23	*e*	8	23	*a*	6	23	*c*	6	23	*f*	4
24	*c*	7	34	*f*	5	24	*f*	7	24	*b*	5	24	*d*	5	24	*g*	3
25	*d*	6	25	*g*	4	25	*g*	6	25	*c*	4	25	*e*	4	25	*a*	2
26	*e*	5	26	*a*	3	26	*a*	5	26	*d*	3	26	*f*	3	26	*b*	1
27	*f*	4	27	*b*	2	27	*b*	4	27	*e*	2	27	*g*	2	27	*c*	30
28	*g*	3	28	*c*	1	28	*c*	3	28	*f*	1	28	*a*	1	28	*d*	29
29	*a*	2	(29)	*d*	(30)	29	*d*	2	29	*g*	30	29	*b*	30	29	*e*	28
30	*b*	1				30	*e*	1	30	*a*	29	30	*c*	29	30	*f*	27
31	*c*	30				31	*f*	30				31	*d*	28			

Immerwährender Kalender.

Juli			August			September			October			November			Dezember		
1	*g*	26	1	*c*	25-24	1	*f*	23	1	*a*	22	1	*d*	21	1	*f*	20
2	*a*	25	2	*d*	23	2	*g*	22	2	*b*	21	2	*e*	20	2	*g*	19
3	*b*	24	3	*e*	22	3	*a*	21	3	*c*	20	3	*f*	19	3	*a*	18
4	*c*	23	4	*f*	21	4	*b*	20	4	*d*	19	4	*g*	18	4	*b*	17
5	*d*	22	5	*g*	20	5	*c*	19	5	*e*	18	5	*a*	17	5	*c*	16
6	*e*	21	6	*a*	19	6	*d*	18	6	*f*	17	6	*b*	16	6	*d*	15
7	*f*	20	7	*b*	18	7	*e*	17	7	*g*	16	7	*c*	15	7	*e*	14
8	*g*	19	8	*c*	17	8	*f*	16	8	*a*	15	8	*d*	14	8	*f*	13
9	*a*	18	9	*d*	16	9	*g*	15	9	*b*	14	9	*e*	13	9	*g*	12
10	*b*	17	10	*e*	15	10	*a*	14	10	*c*	13	10	*f*	12	10	*a*	11
11	*c*	16	11	*f*	14	11	*b*	13	11	*d*	12	11	*g*	11	11	*b*	10
12	*d*	15	12	*g*	13	12	*c*	12	12	*e*	11	12	*a*	10	12	*c*	9
13	*e*	14	13	*a*	12	13	*d*	11	13	*f*	10	13	*b*	9	13	*d*	8
14	*f*	13	14	*b*	11	14	*e*	10	14	*g*	9	14	*c*	8	14	*e*	7
15	*g*	12	15	*c*	10	15	*f*	9	15	*a*	8	15	*d*	7	15	*f*	6
16	*a*	11	16	*d*	9	16	*g*	8	16	*b*	7	16	*e*	6	16	*g*	5
17	*b*	10	17	*e*	8	17	*a*	7	17	*c*	6	17	*f*	5	17	*a*	4
18	*c*	9	18	*f*	7	18	*b*	6	18	*d*	5	18	*g*	4	18	*b*	3
19	*d*	8	19	*g*	6	19	*c*	5	19	*e*	4	19	*a*	3	19	*c*	2
20	*e*	7	20	*a*	5	20	*d*	4	20	*f*	3	20	*b*	2	20	*d*	1
21	*f*	6	21	*b*	4	21	*e*	3	21	*g*	2	21	*c*	1	21	*e*	30
22	*g*	5	22	*c*	3	22	*f*	2	22	*a*	1	22	*d*	30	22	*f*	29
23	*a*	4	23	*d*	2	23	*g*	1	23	*b*	30	23	*e*	29	23	*g*	28
24	*b*	3	24	*e*	1	24	*a*	30	24	*c*	29	24	*f*	28	24	*a*	27
25	*c*	2	25	*f*	30	25	*b*	29	25	*d*	28	25	*g*	27	25	*b*	26
26	*d*	1	26	*g*	29	26	*c*	28	26	*e*	27	26	*a*	26	26	*c*	25
27	*e*	30	27	*a*	28	27	*d*	27	27	*f*	26	27	*b*	25-24	27	*d*	24
28	*f*	29	28	*b*	27	28	*e*	26	28	*g*	25	28	*c*	23	28	*e*	23
29	*g*	28	29	*c*	26	29	*f*	25-24	29	*a*	24	29	*d*	22	29	*f*	22
30	*a*	27	30	*d*	25	30	*g*	23	30	*b*	23	30	*e*	21	30	*g*	21
31	*b*	26	31	*e*	24				31	*c*	22				31	*a*	20

Tafel der beweglichen Feste.

	Aschermittwoch	Ostersonntag	Himmelfahrtstag	Pfingstsonntag	Frohnleichnamsfest	1. Adventsonntag
1862	5. März	20. April	29. Mai	8. Juni	19. Juni	30. November
1863	18 Februar	5. April	14. Mai	24. Mai	4. Juni	29. November
1864	10. Februar	27. März	5. Mai	15. Mai	26. Mai	27. November
1865	1. März	16. April	25. Mai	4. Juni	15. Juni	3. December
1866	19. Februar	1. April	10. Mai	20. Mai	31. Mai	2. December
1867	6. März	21. April	30. Mai	9. Juni	20. Juni	1. December
1868	26. Februar	12. April	21. Mai	31. Mai	11. Juni	29. November
1869	10. Februar	28. März	6. Mai	16. Mai	27. Mai	28. November
1870	2. März	17. April	26. Mai	5. Juni	16. Juni	27. November
1871	22. Februar	9. April	18. Mai	28. Mai	8. Juni	3. December
1872	14. Februar	31. März	9. Mai	19. Mai	30. Mai	1. December
1873	26. Februar	13. April	22. Mai	1. Juni	12. Juni	30. November
1874	18. Februar	5. April	14. Mai	24. Mai	4. Juni	29. November
1875	10. Februar	28 März	6. Mai	16. Mai	27. Mai	28. November
1876	1. März	16. April	25. Mai	4. Juni	15. Juni	3. December
1877	14. Februar	1. April	10. Mai	20. Mai	31. Mai	2. December
1878	6. März	21. April	30. Mai	9. Juni	20. Juni	1. December
1879	26. Februar	13. April	22. Mai	1. Juni	12. Juni	30. November
1880	10. Februar	28. März	6. Mai	16. Mai	27. Mai	28. November
1881	2. März	17. April	26. Mai	5. Juni	16. Juni	27. November
1882	22. Februar	9. April	18. Mai	28. Mai	8. Juni	3. December
1883	7. Februar	25. März	3. Mai	13. Mai	24. Mai	2. December
1884	25. Februar	11. April	20. Mai	30. Mai	10. Juni	28. November
1885	16. Februar	3. April	12. Mai	22. Mai	2. Juni	27. November
1886	8. März	23. April	1. Juni	11. Juni	22. Juni	3. December
1887	21. Februar	8. April	17. Mai	27. Mai	7. Juni	2. December
1888	13. Februar	30. März	8. Mai	18. Mai	29 Mai	30. November
1889	4. März	19. April	28. Mai	7. Juni	18. Juni	29. November
1890	24. Februar	11. April	20. Mai	30. Mai	10. Juni	28. November
1891	11 Februar	29. März	7. Mai	17. Mai	28. Mai	29. November
1892	2 März	17. April	26. Mai	5. Juni	16. Juni	27. November
1893	15. Februar	2. April	11. Mai	21. Mai	1. Juni	3. December
1894	7. Februar	25. März	3. Mai	13. Mai	24. Mai	2. December
1895	28. Februar	14. April	23. Mai	2. Juni	13. Juni	1. December
1896	18. Februar	5. April	14. Mai	24. Mai	4. Juni	29. November
1897	3. März	18. April	27. Mai	6. Juni	17. Juni	28. November
1898	23. Februar	10. April	19. Mai	29. Mai	9. Juni	27. November
1899	15. Februar	2. April	11. Mai	21. Mai	1. Juni	3. December

5) Ueber einige andere Kalender.

Der Sonnenjahre bedienten sich schon frühe einige Völker

Die Aegyptier hatten ein solches von 365 Tagen; da kein Schaltjahr war, so musste sich bald eine Ungenauigkeit einstellen, und in der That nahm man eine Periode von 1460 Jahren an, nach deren Verlauf die Stellung der Gestirne wieder denselben Monatstagen entspreche.

Die Aegyptier hatten 12 Monate, jeden zu 30 Tage, und ausserdem 5 eingeschaltete Tage (ἐπαγόμενοι), ein Verfahren, welches der französische Revolutionskalender nachgeahmt hat. Die Monatsnamen der Aegyptier sind:

Thot, Phaophi, Athyr, Chocak, Tybi, Mechir, Phomenoth, Pharmuthi, Pachon, Payni, Epiphi, Metori.

Dem alten römischen Jahre scheint ebenfalls das Sonnenjahr zu Grunde gelegen zu haben. Es wurde anfänglich in 10 Monate getheilt, von denen der erste, dritte, fünfte und achte 31, die übrigen 30 Tage hatten, so dass das ganze Jahr 304 Tage enthielt. Wie gross die Verwirrung gewesen, die hieraus erfolgte, lässt sich denken. Die Pontifices bestimmten die Länge jedes Jahres, nicht ohne Parteirücksichten, indem sie befreundeten Consuln ihr Amt verlängerten, andern abkürzten. Die alten Monatsnamen waren:

Martis, Aprilis, Majus, Junius, Quintilis (später *Julius*, dem Cäsar zu Ehren), *Sextilis* (später *Augustus*), *September, October, November, December.*

Den 11ten und 12ten Monat *Januarius* und *Februarius* soll schon Numa hinzugefügt haben, jedoch scheint man beiden zusammen nur 51, also dem Jahre 355 Tage gegeben zu haben. Diese neuen Monate waren die letzten, da das Jahr mit dem 1. März begann. Julius Cäsar führte auf den Rath des Sosigenes 44 v. Chr. (astronomisch —43) und 709 nach Erbauung der Stadt das nach ihm benannte Jahr ein. Um alle Uebelstände auszugleichen, wurden dem Jahre 708 445 Tage und 15 Monate gegeben, es heisst daher Jahr der Verwirrung. Noch ist zu bemerken, dass die Pontifices die Regel, dass das vierte Jahr ein Schaltjahr sein solle, nach römischer Art zu zählen so verstanden, dass sie das erste, vierte, siebente u. s. w. Jahr zum Schaltjahre machten, was erst nach 40 Jahren wieder ausgeglichen wurde. Der 1. Januar als Jahresanfang trat darum ein, damit die Consuln nach Verlauf des Winters schon bei ihren Heeren sein könnten.

Zu bemerken ist auch die römische Art, die Monatstage zu zählen.

Diese geschah von 3 Tagen aus, *Calendae, Nonae, Idus*, von denen die *Calendae* auf den 1. jedes Monats, die *Nonae* und *Idus* für März, Mai, Juli und October auf den 7ten und 15ten, für die übrigen Monate auf den 5ten und 13ten fielen.

Von diesen Terminen wurde zurück- und vorwärts gezählt, nach römischer Art jedoch so, dass dieselben als erster Tag mitgezählt wurden. Also:

Dritter Tag vor den Kalenden des Juli (*dies tertius ante Calendas Julias*) = 29. Juni, nämlich man zählt zurück 1. Juli, 30. Juni, 29. Juni.

Von den Kalenden des März zählte man bis zum 6ten Tage zurück, diese Tage entsprechen also im Gemeinjahr dem 1. März, 28., 27., 26., 25., 24 Februar, im Schaltjahre 1. März, 29., 28., 27., 26., 25. Februar. Es wurde dann ein zweiter 6ter Tag, der 24. Februar (*dies bis sextus a. Cal. M.*) angenommen, und dies war also der Schalttag. Daher der müssige Streit, ob der 29. oder 24. Februar Schalttag sei.

Das Schaltjahr selbst hiess aus diesem Grunde *annus bis sextus* (noch jetzt im Französischen *bis sextile*).

Die folgende Tafel gibt eine Uebersicht, wie die römischen Tage unseren Monatstagen entsprechen.

Unsere Monatstage	März, Mai, Juli und October (haben 31 Tage)	Januar, August, December (haben auch 31 Tage)	April, Juni, September, November (30 Tage)	Februar hat 28 und in Schaltjahren 29 Tage
1	*Calendis*	*Calendis*	*Calendis*	*Calendis*
2	VI	IV } *ante Nonas*	IV } *ante Nonas*	IV } *ante Nonas*
3	V } *ante Nonas*	III	III	III
4	IV	*Pridie Nonas*	*Pridie Nonas*	*Pridie Nonas*
5	III	*Nonis*	*Nonis*	*Nonis*
6	*Pridie Nonas*	VIII	VIII	VIII
7	*Nonis*	VII	VII	VII
8	VIII	VI } *ante Idus*	VI } *ante Idus*	VI } *ante Idus*
9	VII	V	V	V
10	VI } *ante Idus*	IV	IV	IV
11	V	III	III	III
12	IV	*Pridie Idus*	*Pridie Idus*	*Pridie Idus*
13	III	*Idibus*	*Idibus*	*Idibus*
14	*Pridie Idus*	XIX	XVIII	XVI
15	*Idibus*	XVIII	XVII	XV
16	XVII	XVII	XVI	XIV
17	XVI	XVI	XV	XIII
18	XV	XV	XIV	XII
19	XIV	XIV	XIII	XI
20	XIII	XIII	XII	X
21	XII	XII	XI	IX
22	XI } *ante Calendas* (des folgenden Monats)	XI } *ante Calendas* (des folgenden Monats)	X } *ante Calendas* (des folgenden Monats)	VIII } *ante Calendas Martias*
23	X	X	IX	VII
24	IX	IX	VIII	VI
25	VIII	VIII	VII	V
26	VII	VII	VI	IV
27	VI	VI	V	III
28	V	V	IV	*Pridie Calendas Martias*
29	IV	IV	III	
30	III	III	*Prid. Calend.* (des folgenden Monats)	
31	*Prid. Calend.* (des folgenden Monats)	*Prid. Calend.* (des folgenden Monats)		

Bei den Sonnenjahren wollen wir schliesslich noch des persischen von Omar Cheiam im 11. Jahrhundert eingeführten Jahres erwähnen. Dasselbe hat eine noch genauere Schaltperiode als das Gregorianische. Es besteht nämlich aus Zirkeln von 33 Jahren, in dem sich 25 Gemein- und 8 Schaltjahre befinden. Das mittlere Omar'sche Jahr hat sonach 365 Tage 5 Stunden 49 Minuten $5\frac{1}{11}$ Secunden. Es ist dem wahren also näher als das Gregorianische.

Das Mondjahr stellt sich die Aufgabe, die Rotation der Erde, den Lauf der Sonne und des Mondes zu vereinigen. Bei diesem Jahre sind die Monate nicht blosse Theilungsperioden, sondern jeder Monat beginnt und schliesst mit dem Neumonde. Wir haben oben gesehen, dass dies erreicht wird, wenn in einer Periode von 19 Jahren sich 12 Gemeinjahre zu 354 und 7 Schaltjahre zu 383 bis 384 Tagen befinden, die Monate abwechselnd 30 und 29 Tage haben. Da freilich zwei Gemeinjahre oft auf einander folgen, so wird der Sonnenlauf und die von ihm bedingten Erscheinungen, also z. B. die Jahreszeiten, nur sehr unvollkommen wiedergegeben, da 22 Tage Unterschied hier stattfinden kann. Wegen des Ueberschusses von 1 Stunde 27 Minuten nach Verlauf des Mondzirkels ist übrigens von Zeit zu Zeit eine Einschaltung von 1 Tag nöthig, welches durch den Wechsel zwischen 29 und 30 Tagen erreicht werden kann. Das Mondjahr entbehrt indess aus diesen Gründen der Uebersichtlichkeit und ist daher von den meisten gebildeten Völkern wieder aufgegeben worden. — Die Völker, welche sich desselben bedienten, sind folgende:

Die Griechen. Sie legten zuerst ihre Eintheilung in Olympiaden von 4 Jahren zu Grunde, und gaben einer Doppelolympiade 3 Schaltjahre, das dritte, fünfte und achte. Da diese Theilung ungenau war, so traf jeder der griechischen Staaten eine andere Correction, und hatte sonach seinen eigenen Mondkalender, so gut wie die deutschen Staaten ihre eigene Art des Messens und Wiegens.

Meton vereinigte diese verschiedenen Kalender durch Einführung des Mondzirkels von 19 Jahren, welcher übrigens auch ziemlich gut die Sonnen- und Mondfinsternisse periodisch wiedergibt.

Die Schaltjahre hatten in dieser Periode nicht ganz die in Abschnitt 2) gegebenen Zahlen, sondern die folgenden:

3, 5, 8, 11, 13, 16, 19.

Im Uebrigen ist der Kalender des Meton und die Monatsnamen in folgender Uebersicht zusammengestellt.

Metonische Periode.

Monate	Jahre des Cyclus								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Hekatombäon	30	29	30	30	30	30	29	30	30
Metagitnion	30	30	29	29	30	29	30	29	29
Boëdromion	29	29	30	30	29	30	29	30	30
Pyanepsion	30	30	29	29	30	30	30	29	29
Mämakterion	29	29	30	30	29	29	29	30	30
Poseideon	30	30	29	29	30	30	30	29	29
Poseidon II. (Schaltmonat)			30		29			30	
Gamelion	29	30	29	30	30	29	29	29	30
Anthesterion	30	29	30	29	29	30	30	30	29
Elaphebolion	29	30	30	30	30	29	30	29	30
Munychion	30	29	29	29	29	30	29	30	29
Thurgelion	29	30	30	30	30	29	30	30	30
Skirophorion	30	29	29	29	29	30	29	29	29
Anzahl der Tage des Jahres	355	354	384	354	384	355	354	384	354

Metonische Periode.

Monate	Jahre des Cyclus									
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Hekatombäon	30	29	29	30	30	30	29	29	30	30
Metagitnion	29	30	30	29	29	29	30	30	29	29
Boëdromion	30	29	29	30	30	30	29	29	30	30
Pyanepsion	30	30	30	29	29	29	30	30	29	30
Mämakterion	29	29	29	30	30	30	29	29	30	29
Poseideon	30	30	30	29	29	30	30	30	29	30
Poseideon II. (Schaltmonat)		30		30			29			29
Gamelion	29	29	29	29	30	29	30	29	30	30
Anthesterion	30	30	30	30	29	30	30	30	29	29
Elaphebolion	29	29	29	29	30	29	29	29	30	30
Munychion	30	30	30	30	29	30	30	30	29	29
Thargelion	29	29	30	29	30	29	29	29	30	30
Skirophorion	30	30	29	30	29	30	30	30	29	29
Anzahl d. Tage d. Jahres	355	384	354	384	354	355	384	354	354	384

Die ganze Periode ist =19 Jahr, =235 Monat, =6940 Tage.

Uebrigens ist die Metonische Periode dennoch etwa um ¼ Tag zu lang, und Calippus führte daher eine 76jährige ein, oder einen Zirkel von 4 Metonischen, in welcher ein Tag ausfiel (300 v. Chr.).

Das hebräische Jahr ist dem Metonischen nachgebildet, jedoch complicirt durch religiöse Gründe. Es darf nämlich ein streng gefeierter Festtag (die alle auf bestimmte Monatstage fallen) nie dem Sabbath vorhergehen oder demselben folgen, wegen der bürgerlichen Schwierigkeit, welche in diesem Falle die Arbeitseinstellung verursachen würde, auch soll das Jahr nie mit einem Sonntag, Mittwoch oder Freitag beginnen. So entstehen 6 Arten von Jahren: abgekürzte, ordentliche und überzählige Gemeinjahre zu 353, 354, 355, und dergleichen Schaltjahre zu 383, 384, 385 Tagen. Schaltjahre sind 3, 6, 8, 11, 14, 17, 19.

Die Namen und Tage der Monate sind:

Tisri,	Marchesvan,	Kislev,	Tebeth,	
30	29	30	29	
Schebat,	Adar,	Nisan,	Ijar,	Sivan,
30	29	30	29	30
	Thamus,	Ab,	Elul.	
	29	30	29	

Die Tageszahl gilt fürs ordentliche Gemeinjahr, im überzähligen Jahre kommen auf Marchesvan 30, im abgekürzten auf Kislev 29, im ordentlichen Schaltjahr hat Adar 30 Tage und ihm folgt der Schaltmonat Weadar mit 29. Der 1te des Monats Tisri, also der Jahresanfang, fällt zwischen 6. September und 7. October unseres Kalenders.

Auch die Türken haben ein Mondjahr zu 354 und 355 Tagen, aber ohne weitere Einschaltung, also sie sehen von dem Stand der Sonne ganz ab. Die Monate haben abwechselnd 30 und 29 Tage. Ihre Namen sind:

Moharrem, Safar, Rebi el awwel, Rebi el accher, Dschemadi el awwel, Dschemadi el accher, Redscheb, Schaban, Ramadan, Schewwal, Dfu'l kade, Dfu'l hedche. — Im Schaltjahr hat der letzte Monat 30 Tage.

Es sind noch einige Worte über die Anfangspunkte der Zeitrechnung oder über die Aeren zu sagen.

Die Geburt Christi ist nach der Annahme des Dionysius Exiguus 600 Jahre nach unserer Zeitrechnung festgesetzt, wahrscheinlich nicht genau. Ein anderer Anfangspunkt, der noch viel willkürlicher, ja ohne allen Halt ist, ist die Erschaffung der Welt. Die Juden nehmen dafür das historische Jahr 3761 v. Chr., Petavius 3984, die neueren Griechen 5508.

Die Römer zählten von der Erbauung

Roms, 753 v. Chr., die alten Griechen von der Einführung der olympischen Spiele, 776 v. Chr., die Mahomedaner von der Flucht Mahomeds, 16. Juli 622 n. Chr.

Historische Begebenheiten werden, in welchem Volke und zu welcher Zeit sie auch vorgefallen seien, in Julianischen Jahren wiedergegeben, falls sie vor 1582 fallen, sonst in Gregorianischen. Die Weise, wie dies geschehen muss, ist an sich einleuchtend.

Was die Theilung des Jahres anbetrifft, so stammt die in Monate jedenfalls von dem Mondjahre her, wenn auch in unseren Monaten diese Beziehung zum Monde verschwunden ist. Die Woche ist vielleicht ebenfalls von den 4 Mondvierteln, deren jedes 7 Tage hat, entstanden, vielleicht aber auch von den 7 Planeten der Alten, deren jeder einen Tag lang herrschen sollte, hergenommen. Die lateinischen Namen der Wochentage wenigstens: *dies — Solis, Lunae, Martis, Mercurii, Iovis, Veneris, Saturni*, deuten darauf hin. Unsere Wochentagsnamen sind Uebersetzungen der lateinischen, freilich mit dem Missverständnisse, dass die Gottheiten, welche den Planeten ihren Namen gegeben, genommen, und ihre nordischen Vertreter an deren Stelle gesetzt sind. Dienstag stammt nämlich von Thuit oder Teut, dem Mars des Nordens, Donnerstag vom Donnergott (Thor), Freitag von der Freia, der Liebesgöttin, her. Bei Mittwoch und Sonnabend ist diese Beziehung aufgegeben. Der Name Samstag für den letzteren hängt vielleicht mit Sabbattag zusammen.

Schliesslich sei noch des Kalenders der französischen Revolution erwähnt. Derselbe ist am 5. October 1793 eingeführt, zählt von der Entstehung der Republik 1792 n. Chr. an, wurde aber im Gegensatze zu den übrigen Reformen in der Messkunst, welche diese Zeit hervorbrachte und die sich immer mehr Bahn brachen, nach 14 Jahren wieder aufgegeben. Die Grundzüge dieses Kalenders sind folgende.

Der Tag ist in 10 Stunden, die Stunde in 100 Minuten, die Minute in 10 Secunden getheilt.

An die Stelle der Woche tritt die Decade, ein Zeitraum von 10 Tagen, welche die Namen haben:

Primidi, Duodi, Tridi, Quartidi, Quintidi, Sextidi, Septidi, Octidi, Nonidi, Décadi.

Der *Décadi* ist der Ruhetag an der Stelle des Sonntag.

Der Monat hat immer 30 Tage, also 3 Decaden.

Das Jahr hat 12 Monate und 5 Ergänzungs- oder Festtage (*jours complémentaires* auch *Sansculotides*), im Schaltjahre 6, also 365 bezüglich 366 Tage. Es beginnt mit dem Herbstäquinoctium. Ein Schaltjahr tritt ein, wenn der Ueberschuss der tropischen Jahre gegen die bürgerlichen mehr als einen Tag beträgt, also in der Regel nach 4, von Zeit zu Zeit nach 5 Jahren.

Die Schaltperiode hiess *Franciade*.

Die Monatsnamen sind:

Herbstmonate: *Vendémiaire, Brumaire, Frimaire.*

Wintermonate: *Nivose, Pluviose, Ventose.*

Frühlingsmonate: *Germinal, Floréal, Prairial.*

Sommermonate: *Messidor, Thermidor, Fructidor.*

Die Ergänzungstage sind: *Fête de la vertu, du génie, du travail, de l'opinion, des récompenses.*

Zeitrente (Rentenrechnung).

Eine Rente, die aus irgend einem Grunde nur auf eine bestimmte Zeit zu zahlen ist. Ueber deren Berechnung vergleiche den Artikel: Rente.

Zellenrad (Hydraulik).

Siehe Wasserrad.

Zenith, Scheitelpunkt (Astronomie).

Der Punkt, in welchem die durch den Mittelpunkt der Erde gehende Grade, welche auf dem Horizont eines gegebenen Ortes senkrecht steht, das Himmelsgewölbe trifft.

Zenithabstand (Astronomie).

Der Theil des grössten Kreises, welcher durch einen gegebenen Stern und den Zenith geht, welcher von diesen beiden Punkten begrenzt ist.

Zerstreuungsglas (Optik).

Siehe den Artikel: Optik (Dioptrik).

Zerstreuungskreis (Optik).

Siehe den Artikel: Optik (Dioptrik).

Ziffer (Arithmetik).

Siehe Zahlzeichen.

Zimmer (Metronomie).

Gewöhnlich 40, zuweilen 20 Stück.

Zinsen (angewandte Rechenkunst).

Zinsen sind der Lehenspreis für ein vorgeschossenes Capital oder auch die Ertragsrente eines solchen, wenn es, wie z. B. der Boden an sich, einen solchen zu gewähren im Stande ist.

Die Zinsen werden vom Hundert gerechnet und also in Procenten gegeben.

Man unterscheidet einfache Zinsen, welche während der Dauer des Leihgeschäftes zu bestimmten Zeiträumen, z. B. jährlich, vom Schuldner geleistet werden, und Zinszinsen, wo für gewisse Zeiträume die fälligen Zinsen berechnet, aber nicht bezahlt, sondern selbst als Capital betrachtet, also verzinst werden. In gewöhnlichen Leihgeschäften sind Zinszinsen ausgeschlossen, Sparkassen gewähren dergleichen, auch muss jeder Boden- oder Geschäftsbesitzer den Theil des Ertrages, den er zur Erweiterung und Verbesserung seines Geschäftes verwendet, als auf Zinseszins gegeben betrachten.

Die Formeln für einfache Zinsrechnung sind leicht. Sei C das Capital, n die Anzahl der Jahre oder sonstigen Zeiträume, für welche der Zins berechnet wird, K die Summe, zu der das Capital anwächst, p die Procente, z die Zinssumme, so erhält man für je 100 Einheiten in einem Jahre deren p, also für C deren $\frac{Cp}{100}$, also in n Jahren:

$$z=\frac{Cpn}{100},\quad K=C+\frac{Cpn}{100}.$$

Was die Zinszinsen anbetrifft, so ist nach Verlauf eines Jahres das Capital angewachsen zu:

$$C+\frac{Cp}{100}=Cq,$$

wenn:

$$q=1+\frac{p}{100}$$

gesetzt wird. Da nun Cq das neue Capital ist, so wird daraus nach zwei Jahren:

$$Cq\cdot q=Cq^2,$$

also nach n Jahren:

$$K=Cq^n.$$

Sehr leicht lassen sich aus diesen Formen die Fragen erledigen, wo statt nach K nach C, p oder n gefragt ist.

$$C=\frac{K}{q^n},\quad n=\frac{\lg K-\lg C}{\lg q},$$

$$p=100\left\{\sqrt[n]{\left(\frac{K}{C}\right)}-1\right\}.$$

Die Grundsätze der Zinseszinsrechnung kommen auch bei Volkszählungen, Zuwachs von Wäldern u. s. w. in Anwendung, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel.

Eine Stadt ist in 5 Jahren von 120,000 Menschen auf 150,000 Menschen angewachsen. Wieviel Procent hat die durchschnittliche jährliche Vermehrung betragen?

Auflösung.

Es ist:

$$K=150000,\quad p=120000,\quad n=5,$$

also nach der letzten Formel:

$$p=(\sqrt[5]{1,25}-1)\,100,$$

$$\begin{array}{rr} & \lg 1,25=0,09691 \\ \hline 5) & 0,01938 \\ & \text{num}=1,0455 \\ & -1 \\ \hline & 0,0455 \\ & 100 \\ \hline & p=4,55 \end{array}$$

Werden die Procente jährlich berechnet, aber in Zeiträumen von $\frac{1}{s}$ Jahren die Zinsen zum Capital geschlagen, so erhält man:

$$K=C\left(1+\frac{p}{s\cdot 100}\right)^{ns}.$$

Bei Geschäftsetablissements, die in sehr gutem Fluss sind, z. B. Banken, kann man s sehr gross nehmen, und erhält dann, da:

$$\lim\left(1+\frac{h}{s}\right)^{ns}=e^{nh}$$

ist, den Grenzwerth:

$$K=C\,e^{\frac{np}{100}},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Zinszahl, Indiction (Chronologie).

Auch Römer Zinszahl. Die Zahl, welche die Stelle eines bestimmten Jahres in einer Periode von 15 Jahren angibt, die 3 Jahre (historisch) v. Chr. beginnt. Sie hängt wahrscheinlich mit den Steuerverhältnissen der Römer zusammen, und steht in unseren Kalendern ohne andern Zweck als den, dass früher zur Gültigkeit der Testamente auch die Angabe dieser Zahl erforderlich war.

Zoll (Metronomie).

$\frac{1}{12}$ oder $\frac{1}{10}$ Fuss.

Zollgewicht (Metronomie).

Das im deutschen Zollvereine eingeführte Gewicht, welches jetzt auch Landesgewicht für die Zollvereinsstaaten geworden ist. Das Zollpfund enthält $\frac{1}{2}$ Kilogramm = 500 Gramms.

Zone (Geometrie).

Der von zwei parallelen Kreisen eingeschlossene Theil der Oberfläche eines Rotationskörpers.

Um die Formel für die Zone zu finden, setzen wir die Radien der begrenzenden Kreise gleich r und r', die Entfernungen derselben vom Anfangspunkt gleich h und h', also die Höhe gleich $h'-h$. Sei die Höhe zunächst unendlich klein gleich dh, so kann die Zone als Oberfläche eines abgestumpften Kegels betrachtet, und nach der Formel:

$$\pi s(r+r')$$

(siehe den Artikel: Raumlehre) berechnet werden, wo s die Kegelseite, also hier:

$$s=\sqrt{(r'-r)^2+dh^2}$$

ist. Setzen wir noch:

$$r'=r+dr,\quad r+r'=2r+dr=2r,$$

indem dr verschwindeud klein ist, so kommt:

$$2\pi r\sqrt{dr^2+dh^2}.$$

Sind nun h, r und r' beliebig, so ist die Summe aller unendlich kleinen Zonen, oder das Integral in den Grenzen r und r' zu nehmen, und man hat für die Zone:

$$Z=2\pi\int_r^{r'} r\sqrt{1+\left(\frac{dh}{dr}\right)^2}\,dr$$

$$=2\pi\int_h^{h'} r\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dh}\right)^2}\,dh.$$

Für die Kalotte, welche nur von einem Kreise abgeschnitten wird, ist $r=0$ zu setzen. Haben wir es z. B. mit einer Kugel zu thun, so ist:

$$r^2+h^2=R^2,$$

wenn R der Kugelradius ist:

$$\frac{dr}{dh}=-\frac{h}{r},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{dr}{dh}\right)^2}=\frac{R}{r},$$

$$Z=2\pi R\int_h^{h'} dh=2\pi R(h'-h),$$

wie sich auch leicht auf elementarem Wege finden lässt. Vergleiche den Artikel: Raumlehre.

Zone (mathematische Geographie).

Die Zonen der Erdoberfläche, welche besonders zu beachten sind, heissen heisse Zone, nördliche und südliche gemässigte, nördliche und südliche kalte Zone. Betrachtet man die Erde als Kugel, so lassen sich ihre Inhalte leicht berechnen.

Heisse Zone heisst der Theil der Erde zwischen beiden Wendekreisen, wo also die Sonne zweimal im Jahre im Scheitelpunkt steht.

Sei der Winkel zwischen Aequator und Ekliptik φ, also $\varphi=23^\circ\,27'$, so ist für die halbe heisse Zone:

$$h=0,\quad h'=R\sin\varphi.$$

Die gemässigte Zone ist der Theil zwischen Wendekreis und Polarkreis, also:

$$h=R\sin\varphi,\quad h'=R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

da der Polarkreis mit der Erdaxe den Winkel φ macht, und:

$$h'-h=2R\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=Rr_2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right).$$

Die kalte Zone wird vom Pole an durch den Polarkreis abgeschnitten. Für dieselbe ist somit:

$$h=R\cos\varphi,\quad h'=R,$$

$$h'-h=R(1-\cos\varphi)=2R\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

also die Flächeninhalte:

für die heisse Zone:

$$4\pi R^2\sin\varphi,$$

für die kalte:

$$4\pi R^2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

für die gemässigte:

$$2\pi R^2 \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Die Formeln für die Erdzonen, falls man die Erde als Sphäroid betrachtet, sind ebenfalls nicht schwer zu finden.

Zuber (Metronomie).

Ein Hohlmaass, das verschieden eingetheilt wird. In Baden ist es ein Getreidemaass = 15 Hektoliter, in Chur ein Flüssigkeitsmaass = 106,323 Liter.

Zufälliger Punkt (Perspective).

Der Punkt, in welchem eine Linie, die einer gegebenen parallel durch das Auge geht, die Projectionsebene schneidet.

Zugbrücke (angewandte Mechanik).

Siehe Brücke.

Zugeordnete Form oder Contravariante (Algebra).

Siehe Substitution (lineare).

Zugeordneter Punkt (Geometrie).

So heisst ein Punkt, der durch die Gleichung einer Curve gegeben ist, aber ganz von derselben getrennt liegt. Z. B. in der Gleichung:

$$(x^2+y^2)(x^n-a)=0$$

ist der Anfangspunkt der Coordinaten, wo $x=y=0$, ein zugeordneter Punkt, da er die Gleichung erfüllt, die Nebenpunkte aber nicht. Ueber die Berechnung der zugeordneten Punkte siehe: besondere Punkte.

Zuglinie (Geometrie).

Siehe Tractorie.

Zugramme (Maschinenlehre).

Siehe Ramme.

Zunahme und Abnahme.

I. Eine Function f von einer oder mehreren Variablen x, y, z, die jedoch als reell vorausgesetzt werden müssen, ist im Zunehmen für alle Werthe von x, y, z, für welche sie die Bedingung:

$$f(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma\ldots) > f(x,\ y,\ z\ldots)$$

erfüllt, wenn α, β, γ verschwindend kleine positive, sonst aber beliebige Grössen sind. Sie ist im Abnehmen, wenn die Bedingung:

$$f(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma\ldots) < f(x,\ y,\ z\ldots)$$

erfüllt ist.

Für den Uebergang vom Zunehmen zum Abnehmen, d. h. fürs Maximum oder Minimum, muss also entweder:

$$f(x+\alpha,\ y+\beta,\ z+\gamma\ldots) = f(x,\ y,\ z\ldots)$$

werden, und zwar findet dies immer statt, wenn die Function continuirlich ist, oder es muss eine Discontinuität eintreten, in welchem Falle der Werth der Function in anderer Weise zu prüfen ist.

Diese Betrachtung, die übrigens leicht zu den in der Differenzialrechnung vorkommenden Criterien führt, ist die allgemeinste, und z. B. von Fermat schon vor Erfindung der Differenzialrechnung angewendet worden.

Da die allgemeine Theorie der Maxima und Minima in den Artikeln: Quantität und Variationsrechnung enthalten ist, wollen wir hier einige elementare Betrachtungen und Beispiele über diesen Gegenstand geben.

Zunächst soll hier die Methode folgen, nach der Fermat dergleichen Probleme behandelt.

Sei:

$$x+\alpha=x_1,$$

so ist die Bedingung dafür, dass $f(x)$ ein Maximum oder Minimum sei:

$$f(x_1)=f(x).$$

Bringt man diese Gleichung auf eine Form:

$$\varphi(x,\ x_1)=0,$$

wo, vorausgesetzt, dass f eine algebraische Function sei, alles Irrationale entfernt ist, so muss φ nothwendig durch eine Grösse von der Gestalt:

$$(x_1-x),$$

oder allgemeiner:

$$(x_1^n-x^n)$$

theilbar sein, und nach Entfernung dieses Factors kann man, da α unendlich klein ist, x_1 mit x identificiren, was eine Gleichung gibt, aus der man die dem Falle des Maximum oder Minimum entsprechendrn Werthe von x findet. Da übrigens:

$$f(x+\alpha)=f(x)$$

werden kann, ohne dass ein Maximum oder Minimum stattfindet, so ist die Frage, ob ein solches vorhanden sei, noch direct zu entscheiden.

Wir geben hierzu einige Beispiele.

Aufgabe I.

Unter allen gleichschenkligen Dreiecken, deren Grundlinien parallele Sehnen desselben Kreises sind, und deren Spitze im Mittelpunkt liegt, das grösste zu bestimmen.

Sei x die Grundlinie, y die Höhe eines solchen Dreiecks, r der Radius des Kreises, so ist:

$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - x^2)},$$

und der Inhalt des Dreiecks gleich:

$$\frac{x}{4}\sqrt{(4r^2 - x^2)}.$$

Man hat also die Gleichung:

$$x\sqrt{(4r^2 - x^2)} = x_1\sqrt{(4r^2 - x_1^2)},$$

oder durch Quadriren, bezüglich Subtrahiren:

$$4r^2(x^2 - x_1^2) = x^4 - x_1^4.$$

Dividirt man mit $x^2 - x_1^2$, und identificirt dann x mit x_1, so kommt:

$$4r^2 = 2x^2,$$

also:

$$x = r\sqrt{2},\quad y = \frac{r}{\sqrt{2}},$$

also auch:

$$\frac{x}{2} = \frac{r}{\sqrt{2}} = y.$$

Die halbe Grundlinie ist also gleich der Höhe, der Winkel an der Spitze ein rechter.

Offenbar ist, wenn die Sehne gleich Null wird, der Inhalt des Dreiecks gleich Null, und dasselbe tritt ein, wenn beide Schenkel einen Winkel von 180° machen. Es muss also nothwendig einmal zwischen beiden Werthen ein Maximum liegen. Es gibt aber überhaupt nur dies, und kein Minimum, da unsere Bedingungsgleichung nur eine Auflösung zulässt.

Aufgabe II.

Einer Kugel denjenigen Kegel einzuschreiben, dessen Inhalt ein Maximum ist.

Zu jeder gegebenen Basis gehören unendlich viel Kegel, von denen derjenige, dessen Spitze in der Verbindungslinie des Mittelpunktes der Basis mit dem der Kugel liegt, offenbar die grösste Höhe hat. Der fragliche Kegel ist also ein Rotationskegel. Sei ϱ der Radius der Grundfläche, h die Höhe, so ist der Inhalt:

$$\frac{\pi\varrho^2 h}{3},$$

aber, wenn r der Kugelradius, x die Entfernung der Mittelpunkte von Basis und Kugel ist:

$$\varrho^2 = r^2 - x^2,\quad h = r + x,$$

also der Inhalt gleich:

$$\frac{\pi(r^2 - x^2)(r + x)}{3},$$

und die Bedingungsgleichung:

$$(r^2 - x^2)(r + x) = (r^2 - x_1^2)(r + x_1),$$

oder:

$$r(x_1^2 - x^2) - (x_1 - x)r^2 + x_1^3 - x^3 = 0,$$

oder wenn man durch $x_1 - x$ dividirt, und x mit x_1 identificirt:

$$2rx - r^2 + 3x^2 = 0,$$

woraus sich:

$$x = -\tfrac{1}{3}r \pm \sqrt{(\tfrac{4}{9}r^2)} = \tfrac{1}{3}r$$

ergibt, da der negative Werth ausser Betracht bleibt. Es ist also die Höhe des Kegels gleich $\tfrac{4}{3}r$, der Radius seiner Basis gleich $\tfrac{2}{3}r\sqrt{2}$. Der Schwerpunkt des so bestimmten Kegels fällt in den Mittelpunkt der Kugel.

Aufgabe III.

Das Rechteck vom grössten Umfange zu bestimmen, welches einem Kreise eingeschrieben ist.

Die Seiten seien x und y, r der Radius des Kreises, so ist:

$$\frac{y^2}{4} = r^2 - \frac{x^2}{4},$$

also der Umfang gleich:

$$2x + 2\sqrt{(4r^2 - x^2)}.$$

Die Bedingungsgleichung ist:

$$x + \sqrt{(4r^2 - x^2)} = x_1 + \sqrt{(4r^2 - x_1^2)},$$

d. h.:

$$4r^2 - x^2 = (x_1 - x)^2 + 4r^2 - x_1^2 + 2(x_1 - x)\sqrt{(4r^2 - x^2)},$$

oder:

$$xx_1 - x^2 = (x_1 - x)\sqrt{(4r^2 - x_1^2)},$$

also wenn man mit $x_1 - x$ dividirt, und dann quadrirt:

$$x^2 = 4r^2 - x_1^2.$$

Wird x_1 mit x identificirt, so kommt:

$$x = r\sqrt{2}.$$

Das Rechteck ist ein Quadrat.

II. Namentlich bei geometrischen Aufgaben ist es oft gerathen, den Ausdruck:

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma \ldots) - f(x, y, z \ldots),$$

der im Falle des Maximums oder Minimums verschwinden muss, nicht durch Rechnung, sondern durch geometrische Betrachtungen zu ermitteln.

Dies soll ebenfalls an einigen Beispielen dargethan werden.

Fig. 225.



Aufgabe I.

Denjenigen Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungssumme von n gegebenen, mit ihm in einer Ebene befindlichen Punkten ein Minimum ist.

Sei A (Fig. 225) einer der gegebenen, X der gesuchte Punkt, wo X natürlich in der Ebene der gegebenen Punkte liegt. Sei XM irgend eine feste Richtung in dieser Ebene, und Winkel $AXM = \varphi$. Wir denken uns jetzt Punkt X um unendlich wenig nach X' verschoben, fällen von X Loth XY auf AX', so ist wegen der unendlich geringen Verschiebung $AX = AY$ zu setzen (denn XY kann auch als Kreisbogen mit Mittelpunkt A gedacht werden); sei Z der Schnittpunkt von AX' und MX, und Winkel $AZM = \varphi'$, Winkel $X'XM = \alpha$, dann ist auch Winkel $XX'Y = \alpha - \varphi'$,

$$X'Y = XX' \cos(\alpha - \varphi').$$

Dies ist offenbar der Zuwachs des Strahls AX, welcher durch die Verschiebung hervorgebracht wird. Es kann aber für φ' auch φ gesetzt werden, wegen des unendlich kleinen Unterschiedes beider Winkel. Versteht man nun unter φ_1, φ_2, $\varphi_3 \ldots$ bezüglich die Winkel der durch einen der gegebenen Punkte A, B, $C \ldots$ und den gesuchten Punkt X gelegten Strahlen mit irgend einer festen Richtung, so ist also:

$$XX' [\cos(\alpha - \varphi_1) + \cos(\alpha - \varphi_2) + \cos(\alpha - \varphi_3) + \ldots] = 0.$$

α ist der Winkel der Verschiebungsrichtung mit der festen Richtung, und ist daher ganz beliebig, auch gleich Null zu setzen, was ohne die Allgemeinheit zu beschränken geschehen kann, und man hat also:

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 + \ldots = 0.$$

Als feste Richtung kann man nach einander die eines jeden der Strahlen AX, BX, CX u. s. w. nehmen; man erhält dann soviel Gleichungen, als Strahlen da sind, von denen jedoch nur zwei von einander unabhängig sind.

Sei jetzt Winkel:

$$AXB = \lambda_1, \quad BXC = \lambda_2, \quad CXD = \lambda_3 \ldots,$$

also wenn Ax als feste Richtung genommen wird:

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = \lambda_1, \ \varphi_3 = \lambda_1 + \lambda_2, \ \varphi_4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \ \ldots \ \varphi_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1},$$

wenn Bx als feste Richtung genommen wird:

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = \lambda_2, \ \varphi_3 = \lambda_2 + \lambda_3, \ \varphi_4 = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \ \ldots \ \varphi_n = \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots = \lambda_n,$$

u. s. w., übrigens:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 2\pi.$$

Seien z. B. drei Punkte gegeben, so ist, da $\cos 0 = 1$ ist:

$$1+\cos\lambda_1+\cos(\lambda_1+\lambda_2)=0,$$
$$1+\cos\lambda_2+\cos(\lambda_2+\lambda_3)=0,$$
$$1+\cos\lambda_3+\cos(\lambda_3+\lambda_1)=0.$$

Die zweite Gleichung nimmt wegen:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2\pi$$

die Gestalt an:

$$1+\cos\lambda_2+\cos\lambda_1=0.$$

Dieselbe von der ersten subtrahirt, gibt dann:

$$\cos(\lambda_1+\lambda_2)=\cos\lambda_2,$$

was nur möglich, wenn $\lambda_1=0$, welches keinen reellen Werth von λ_1 ergibt, oder wenn:

$$\lambda_2=2\pi-\lambda_1-\lambda_2$$

ist. Dieser letztere Werth gibt in die erste Gleichung gesetzt:

$$1+\cos\lambda_2+\cos 2\lambda_2=0,$$

also:

$$2(\cos\lambda_2)^2+\cos\lambda_2=0,$$

d. h.:

$$\cos\lambda_2=-\tfrac{1}{2},$$

(da λ_2 nicht gleich Null sein kann) $\lambda_2=120^\circ$. Derselbe Werth ergibt sich für λ_1 und λ_3.

Seien jetzt vier Punkte gegeben, so ist, wenn man die Gleichung:

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=2\pi$$

berücksichtigt:

$$1+\cos\lambda_1+\cos(\lambda_1+\lambda_2)+\cos\lambda_4=0,$$
$$1+\cos\lambda_2+\cos(\lambda_2+\lambda_3)+\cos\lambda_1=0,$$
$$1+\cos\lambda_3+\cos(\lambda_3+\lambda_4)+\cos\lambda_2=0,$$
$$1+\cos\lambda_4+\cos(\lambda_4+\lambda_1)+\cos\lambda_3=0.$$

Vergleicht man die erste dieser Gleichungen mit der zweiten, die zweite mit der dritten, die dritte mit der vierten, die vierte mit der ersten, so kommt:

$$\cos(\lambda_1+\lambda_2)+\cos\lambda_4=\cos\lambda_2+\cos(\lambda_2+\lambda_3),$$
$$\cos(\lambda_2+\lambda_3)+\cos\lambda_1=\cos\lambda_3+\cos(\lambda_3+\lambda_4),$$
$$\cos(\lambda_3+\lambda_4)+\cos\lambda_2=\cos\lambda_4+\cos(\lambda_4+\lambda_1),$$
$$\cos(\lambda_4+\lambda_1)+\cos\lambda_3=\cos\lambda_1+\cos(\lambda_1+\lambda_2).$$

Die erste Gleichnng gibt, wenn man für λ_4 wieder $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ setzt:

$$\cos(\lambda_1+\lambda_2)-\cos\lambda_2=\cos(\lambda_2+\lambda_3)-\cos(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3),$$

oder:

$$\sin\frac{\lambda_1+2\lambda_2}{2}\sin\frac{\lambda_1}{2}=-\sin\frac{\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3}{2}\sin\frac{\lambda_1}{2},$$

oder da λ_1 nicht gleich Null und gleich π sein kann:

$$\sin\left(\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2\right)=-\sin\left(\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2+\lambda_3\right),$$

dies ist der Fall, wenn man hat:

$$\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2+\lambda_3=\pi+\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2,$$

was $\lambda_3=\pi$ ergeben würde, was nicht möglich ist, ausserdem, wenn man hat:

$$\frac{\lambda_1}{2}+\lambda_2+\lambda_3=2\pi-\frac{\lambda_1}{2}-\lambda_2,$$

d. h.:

$$\lambda_1+\lambda_3=2\pi-\lambda_2,$$

ebenso ergibt sich aber wegen der Symmetrie der vorliegenden Gleichungen:

$$\lambda_2+\lambda_4=2\pi-\lambda_3,$$
$$\lambda_3+\lambda_1=2\pi-\lambda_2,$$

also:

$$\lambda_2=\lambda_4,$$

und ebenso:

$$\lambda_3=\lambda_1.$$

Die Strahlen bilden also die Diagonalen des durch die vier Punkte bestimmten Vierecks.

Diese etwas weitläufige Rechnung lässt sich vermeiden, wenn man auf die sehr einfache geometrische Bedeutung der Bedingungsgleichung achtet.

Schneidet man auf allen Strahlen gleiche Stücke a ab, und projicirt diese auf die bezeichnete feste Richtung, so ist die Summe der Projectionen gleich:

$$a\cos\varphi_1+a\cos\varphi_2+a\cos\varphi_3+\ .\ .\ .=0.$$

Dies ist bekanntlich nur möglich, wenn diese Strecken, jede in ihrer Richtung an den Endpunkt der vorhergehenden angetragen, ein geschlossenes Vieleck bilden. Also damit die Strahlensumme ein Minimum sei, muss es ein Vieleck mit gleichen Seiten geben, von denen jede je einem der Strahlen parallel ist. Sind z. B. nur drei Strahlen vorhanden, so ist das Vieleck ein gleichseitiges Dreieck, je zwei auf einander folgende Seiten bilden also einen Winkel von 60°, und da die Winkel zweier Strahlen selbst durch den Winkel einer Vielecksseite mit der Verlängerung der folgenden bestimmt wird, so schneiden sich je zwei Strahlen unter Winkeln von 120°. Bei vier Punkten hat man ein Viereck mit vier gleichen Seiten, also einen Rhombus, es sind somit je zwei nicht auf einander folgende Strahlenwinkel gleich, d. h. die vier Strahlen sind die Diagonalen des durch die vier gegebenen Punkte bestimmten Vierecks u. s. w.

Die obige Entwickelung der Bedingungsgleichungen hat vor anderen Methoden einen ganz besonderen Vorzug, den, dass man augenblicklich erkennt, dass diese Gleichungen noch dann gelten, wenn die gegebenen Punkte nicht auf einer Ebene, sondern auf einer ganz beliebigen Fläche liegen, wo dann die kürzesten Strahlen natürlich kürzeste Linien auf der gegebenen Fläche sind. Das geschlossene Vieleck, welches von den Richtungen der kürzesten Strahlen gebildet wird, ist hier aus den Tangenten derselben in ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte zu bilden.

Diese Allgemeinheit beruht darauf, dass nur bei der Entwickelung unendlich kleine Linien in Betracht kommen, die ja als Grade angenommen werden können. Die Annahme, dass dieselben in einer Ebene liegen, also die Winkel um einen Punkt zusammen gleich 2π sind, trifft bekanntlich bei einer continuirlich gekrümmten Fläche auch noch zu, ausserdem kam noch die Betrachtung in Anwendung, dass das von X auf AX' gefällte Loth XY ein Stück $AY=AX$ abschneide, und dies ist nach einem Gaussschen Satze noch vollkommen richtig, wenn AX und AX' kürzeste Linien sind. Dieser Satz lautet nämlich:

„Wird eine Schaar kürzester Linien von zwei anderen Linien orthogonal geschnitten, so sind die Stücke der ersteren zwischen den letzteren unter einander gleich. Geht also eine Schaar kürzester Linien durch einen Punkt, so schneidet jede Orthogonalcurve gleiche Stücke von denselben ab."

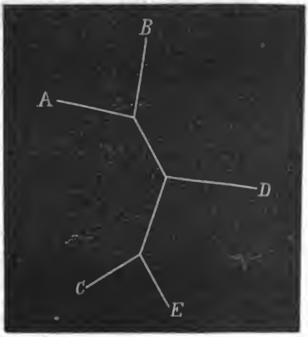
Aufgabe II.

Eine Anzahl gegebener Punkte auf die kürzeste überhaupt mögliche Art zu verbinden.

Die Aufgabe sagt, dass dasjenige Liniensystem ermittelt werden soll, welches durch alle Punkte geht und ein Minimum ist. Dieses Minimum ist ein bedingtes, wenn die Punkte und die Verbindungslinien auf einer gegebenen Fläche liegen sollen, ein unbedingtes, wenn dies nicht der Fall ist.

Wie auch die betreffenden Verbindungslinien beschaffen seien, so kann

Fig. 226.



man zunächst diejenigen Punkte fixiren, in welchen sich mehrere derselben schneiden. Sei X ein solcher Punkt, so behaupten wir, dass in einem solchen sich nur drei Linien (jedenfalls also kürzeste Linien im Falle des bedingten, grade im Falle des unbedingten Minimums) schneiden, und zwar unter Winkeln von 120°. Denn angenommen, es schnitten sich in X drei Linien unter anderen Winkeln, so nehme man auf jeder dieser Linien einen beliebigen Punkt an, seien diese A, B, C, so liessen sich nach der vorigen Aufgabe diese Punkte A, B, C durch drei Strahlen, die sich unter 120° schneiden, auf eine kürzere Weise als durch die durch X gehenden verbinden, während der übrige Theil des Liniensystems unverändert bliebe. Angenommen ferner, es gingen durch Punkt X mehr als drei Linien, so fixire man auf zweien davon beliebige Punkte A und B, die Strecke von A nach X und von X nach B lässt sich dann durch ein kürzeres System von drei Linien ersetzen, die durch A, B und X gehen, und sich in einem anderen Punkte unter 120° schneiden.

Beispiel.

Sind vier Punkte A, B, C, D gegeben, und bilden diese ein Rechteck, dessen kürzere Seiten AB und CD sind, so ist das Liniensysystem offenbar nach A und B und nach C und D hin symmetrisch. Man zieht also durch A und B zwei Linien, die AB unter 30° schneiden, ihr Schnittpunkt sei X, ferner durch C und D Linien, die CD unter 30° schneiden, ihr Schnittpunkt sei Y; die Linie XY vollendet dann das System.

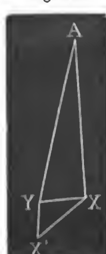
Bei 5 Punkten A, B, C, D, E (Fig. 226) ist ein System von 7, bei n Punkten $2n-3$ Linien nöthig.

Aufgabe III.

Denjenigen Punkt zu bestimmmen, dessen Entfernungssumme von n gegebenen, nicht in einer Ebene liegenden Punkten ein Minimum ist.

Der Gang der Entwickelung ist wie oben. Durch den gesuchten Punkt X wird eine beliebige Ebene gelegt, und in ihr eine beliebige durch X gehende Richtung angenommen. Einer der Strahlen AX (Fig. 227) macht mit dieser Richtung den Winkel φ. Die unendlich

Fig. 227.



geringe Verschiebung von X, also XX' kann wegen der Willkürlichkeit dieser Richtung als mit ihr zusammenfallend angenommen werden. Der Winkel von AX' mit XX' sei φ'. Fällt man Loth XY auf AX', so ist YX' der Zuwachs des Strahls AX, aber:

$$YX' = XX' \cos\varphi' = XX' \cos\varphi,$$

da der Unterschied von φ und φ' verschwindet, also wieder:

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 + \ldots = 0,$$

woraus dann wieder der Satz folgt:

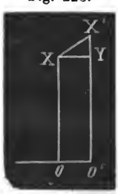
„Es gibt ein Vieleck mit gleichen Seiten, welches jedoch im Allgemeinen kein ebenes ist, dessen Seiten den entsprechenden Strahlen parallel sind."

Da drei Punkte immer in einer Ebene liegen, so sind hier die Schnittwinkel der Strahlen wieder gleich 120°. Bei vier Punkten hat man ein Viereck im Raume mit vier gleichen Seiten, und da bei einem solchen je zwei Gegenwinkel gleich sind, so bilden die Strahlen eine vierkantige Ecke, worin zwei nicht an einander grenzende Kantenwinkel gleich sind.

Anmerkung. Die Aufgabe: den Punkt zu finden, dessen Entfernungssumme von n gegebenen graden oder krummen Linien oder von n Flächen ein Minimum ist, lässt sich in ganz gleicher Weise behandeln und führt auch zu demselben Theoreme.

Sei X (Fig. 228) der gesuchte Punkt, XO das auf eine der Linien und Ebenen

Fig. 228.



gefällte Loth. Nimmt man dann eine beliebige Richtung XX', die mit der Verschiebungsrichtung zusammenfällt, wo also XX' unendlich klein ist, und fällt Loth $X'O'$ nach derselben Linie oder Ebene, ferner Loth XY auf $X'O'$, so haben XO und YO' nur einen gegen XX' verschwindenden Unterschied, und der Zuwachs YX' ist gleich $XX' \cos XX'Y$, woraus wieder der obige Satz folgt.

Dieser Satz lautet also ganz allgemein folgendermaassen:

Es sei gegeben eine beliebige Anzahl von Punkten oder von Linien (graden oder krummen) oder von Flächen (ebenen oder gekrümmten) oder ein beliebig aus Punkten, Linien und Flächen zusammengesetztes System, so ist derjenige Punkt, dessen Abstandssumme von denselben ein Minimum ist, gegeben durch folgende Bedingung, die immer gültig bleibt, das Minimum mag ein unbedingtes oder bedingtes sein, das letztere so verstanden, dass das gegebene System auf einer Fläche liegt, auf welcher dann auch der Punkt und die Minimumsstrahlen, die dann also kürzeste Linien auf der Fläche sind, zu suchen sind:

„Es gibt im Raume ein gradliniges Vieleck, dessen Seiten gleich und in ihrer Reihenfolge den Minimumsstrahlen selbst, oder deren durch den gesuchten Punkt gehenden Tangenten parallel sind."

Diese Betrachtungen unterliegen allerdings in bestimmten Fällen einer scheinbaren Schwierigkeit, der, dass gewisse Strahlen auch zuweilen negativ genommen werden müssen. Z. B. wenn drei Linien in der Ebene gegeben sind, von denen zwei einen Winkel bilden, der grösser als 120° ist, dann liegen die Minimumsstrahlen ausserhalb des von den drei Linien gebildeten Dreiecks, und die Verlängerung des einen der Strahlen bildet mit den anderen Winkel von 120°. Aus diesem Grunde ist der gedachte Strahl selbst von der Summe der anderen abzuziehen.

III Auch Aufgaben, welche eigentlich der Variationsrechnung angehören, lassen sich oft elementar durchführen. So z. B. ist von Steiner der Satz:

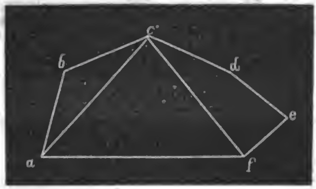
„dass von allen Curven von gegebenem Umfang der Kreis den grössten Inhalt hat"

etwa auf folgende Weise bewiesen worden.

Lehrsatz 1.

Von allen Vielecken von gleicher

Fig. 229.



Seitenanzahl n, von denen $n-1$ gegeben sind, die $n$te aber nicht, ist dasjenige, welches den grössten Flächeninhalt hat, einem Kreise eingeschrieben, und die nicht gegebene Seite ist der Durchmesser desselben.

Beweis.

Dieser Satz wird zunächst fürs Dreieck bewiesen. Seien a, b die gegebenen Seiten, h die auf a gefällte Höhe, so ist $\frac{ah}{2}$ der Inhalt, h aber immer kleiner als b, mit Ausnahme desjenigen Dreiecks, wo a und b einen rechten Winkel bilden, und wo $h=b$ ist, dieses Dreieck ist also von allen das grösste. Offenbar liegt ein solches Dreieck aber in einem Halbkreise, die nicht gegebene Seite ist also Durchmesser.

Sei jetzt *abcdef* (Fig. 229) ein n-Eck, und zwar das grösste von allen, worin *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef* die gegebenen Seiten, *af* die nicht gegebene. Um zu zeigen, dass *af* Durchmesser eines Kreises ist, in dem alle Ecken liegen, haben wir nur darzuthun, dass die beiden von a und f nach irgend einer Ecke, z. B. c, gezogenen Linien einen rechten Winkel bilden. Wäre dies aber nicht der Fall, so könnte man die Figur *abc* so um c drehen, dass Winkel *acf* ein rechter würde, wobei dann nach dem ersten Theil dieses Beweises das Dreieck *acf* zunähme, während die übrigen Theile des Vielecks und alle Seiten bis auf *af* unverändert blieben. Das betrachtete Vieleck könnte also nicht das grösste sein, womit unser Satz bewiesen ist.

Lehrsatz 2.

Von allen n-Ecken mit gegebenen Seiten liegt das grösste im Kreise.

Beweis.

Seien *ABCDEFG* (Fig. 230), *abcdefg* (Fig. 231) zwei n-Ecke mit entsprechend gleichen Seiten; möge das erste in einem Kreise liegen, das zweite aber nicht, so ist zu beweisen, dass das erstere das grössere ist.

Durch einen beliebigen Eckpunkt A

Fig. 230.

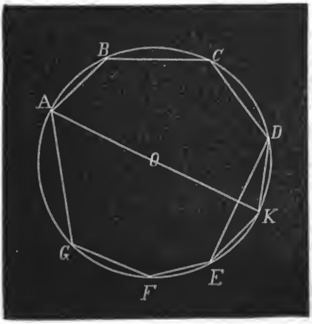
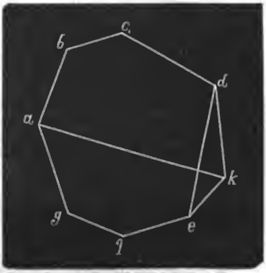


Fig. 231.



legen wir einen Durchmesser AK, dieser möge etwa die Seite DE schneiden, dann ziehen wir DK und DE, über de errichten wir ein Dreieck $dek \cong DEK$, und ziehen ka, so haben die Vielecke $abcdk$ und $ABCDK$, ferner $agfek$ und $AGFEK$ alle Seiten bis auf ak und AK gemein, es ist also nach dem vorigen Satze:

$$ABCDK > abcdk, \qquad AGFEK > agfek,$$

und durch Addition:

$$ABCDKEFG > abcdkefg,$$

oder wenn man die congruenten Dreiecke DEK und dek abzieht:

$$ABCDEFG > abcdefg,$$

was zu beweisen war.

Lehrsatz 3.

Von allen Dreiecken, worin eine Seite und die Summe der beiden anderen gegeben sind, ist dasjenige das grösste, worin die beiden nicht gegebenen Seiten gleich sind.

Beweis.

Ist a die gegebene Seite, e die Summe der nicht gegebenen, so können dieselben mit $\frac{e}{2}+x$ und $\frac{e}{2}-x$ bezeichnet werden, wo x veränderlich ist. Der Inhalt eines Dreiecks mit Seiten a, b, c ist nun bekanntlich gleich:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wenn s die halbe Summe der Seiten ist. Es ist nun hier:

$$s=\frac{a+e}{2}, \quad s-a=\frac{e-a}{2}, \quad s-b=\frac{a}{2}-x, \quad s-c=\frac{a}{2}+x,$$

also der Inhalt gleich:

$$\sqrt{\frac{e^2-a^2}{4}\left(\frac{a^2}{4}-x^2\right)}.$$

Dieser Ausdruck ist desto grösser, je kleiner x^2 ist, also ein Maximum, wenn $x=0$, womit unser Satz bewiesen ist.

Lehrsatz 4.

Von allen Vielecken von gleicher Seitenanzahl und gleichem Umfange ist das regelmässige das grösste.

Beweis.

Wir zeigen zunächst, dass das grösste dieser Vielecke gleiche Seiten hat. Denn seien zwei an einander stossende AB und BC nicht gleich, so ziehe man AC; man könnte dann nach vorigem Satze, indem man AB und BC gleich macht und BC unverändert lässt, das Dreieck ABC vergrössern. Da hierbei der übrige Theil des Vielecks und sein Umfang ungeändert bliebe, so wäre bei unverändertem Umfang das Vieleck vergrössert, das vorliegende könnte also nicht das grösste sein.

Es ist noch zu zeigen, dass das betrachtete Vieleck auch im Kreise liegt, womit dann dargethan ist, dass es regelmässig ist. Bei allen Vielecken von gleichem Umfang und gleichen Seiten sind aber die letzteren natürlich auch entsprechend gleich, und nach Lehrsatz 2. liegt das grösste unter ihnen im Kreise.

Lehrsatz 5.

Von mehreren regelmässigen Vielecken von gleichem Umfange aber ungleicher Seitenanzahl ist dasjenige das grösste, welches die meisten Seiten hat.

Beweis.

Es genügt die Bemerkung, dass ein Vieleck von $n-1$ Seiten auch als n-Eck gelten kann, worin zwei Seiten einen Winkel von 180° machen. Ein solches

n-Eck ist natürlich kein regelmässiges, folglich ist es nach dem vorigen Satze, der hier offenbar noch Anwendung findet, kleiner als das regelmässige.

Es sind also alle gradlinigen Figuren gleichen Umfanges kleiner als der Kreis, welcher denselben Umfang hat, denn alle Dreiecke sind kleiner als das regelmässige Viereck, dies wieder kleiner als das Fünfeck u. s. w. Da nun ein regelmässiges Vieleck sich mit zunehmender Seitenanzahl dem Kreise nähert, und zwar bis auf jede Grenze, so ist der Kreis von gleichem Umfange grösser als alle diese Figuren.

Endlich kann man jede ebene Figur bis auf jede Grenze durch ein *n*-Eck ersetzen, und hat also schliesslich den Satz:

Lehrsatz 6.

Von allen Figuren in der Ebene, die gleichen Umfang haben, hat der Kreis den grössten Inhalt.

Zusatz (allgemeine Mathematik).

Ein Satz, der als einfache Folge eines vorhergehenden Lehrsatzes sich ergibt.

Zwischenmaschine (Maschinenlehre).

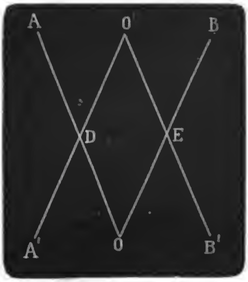
Diejenigen Vorrichtungen, durch welche die Bewegung der Kraftmaschine auf die Arbeitsmaschine übertragen wird. Es sind dies namentlich Zahn- und Riemenräder, Zahnstangen u. s. w.

Schluss.

Nachtrag.

Durch ein Versehen ist im sechsten Bande S. 574 der Artikel: Storchschnabel nur unvollständig gegeben. Die Folge desselben lautet so:

Eine der einfachsten Formen des Storchschnabels ist die folgende:



Zwei gleiche Lineale *AO* und *OB* sind um Punkt *O* wie ein Zirkel beweglich, ebenso zwei andere *A'O'* und *O'B'* um Punkt *O'*; diese vier Lineale sind von gleicher Länge, und in gleichen Entfernungen mit einer Anzahl Löcher, durch welche Stifte gesteckt werden können, versehen. Es werden die beiden Linealsysteme dann so mit einander verbunden, dass durch die Punkte *D* in *AO* und *D'* in *A'O'*, *E* in *OB* und *E'* in *O'B'* je ein gemeinschaftlicher Stift gesteckt wird, derart jedoch, dass einerseits die Linien *AD*, *DO'*, *OE* und andererseits *DO'*, *O'E* gleich werden, *DO'EO* ist also ein Parallelogramm.

Wenn man nun die ganze Verbindung um den festen Punkt *D* dreht, wo durch *D* ebenfalls ein Stift zu stecken ist, den Punkt *O'* aber dabei eine beliebige Curve beschreiben lässt, also eine gegebene Linie entlang führt, so wird Punkt *B* eine ähnliche Curve beschreiben, und zwar wird das Verhältniss beider das der Linien *OE* und *OB* sein, welches sich, da die Punkte *D* und *E* den Löchern der Lineale entsprechen, beliebig ändern lässt.

Offenbar sind nämlich immer die Dreiecke *ADO'* und *AOB* ähnlich, aus diesem Grunde liegen die Punkte *A*, *O'* und *B* stets in grader Linie, und es verhält sich $AO' : AB = OE : OB$, wodurch der obige Satz bewiesen ist.

Verbesserungen.

S. 88 Z. 22 links statt Trilimarcoordinaten lies Trilinearcoordinaten.

S. 105 Z. 12 links statt $\frac{\nu\beta}{\nu} = b$ lies $\frac{\nu\beta}{\nu} = 0$.

Inhaltsverzeichniss.

T.

W.

X.

Y.

Z.

Druck von J. F. Starcke in Berlin.